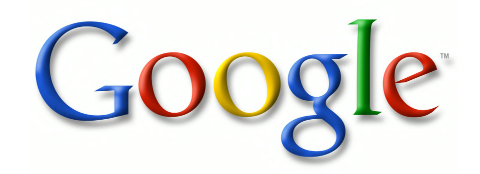
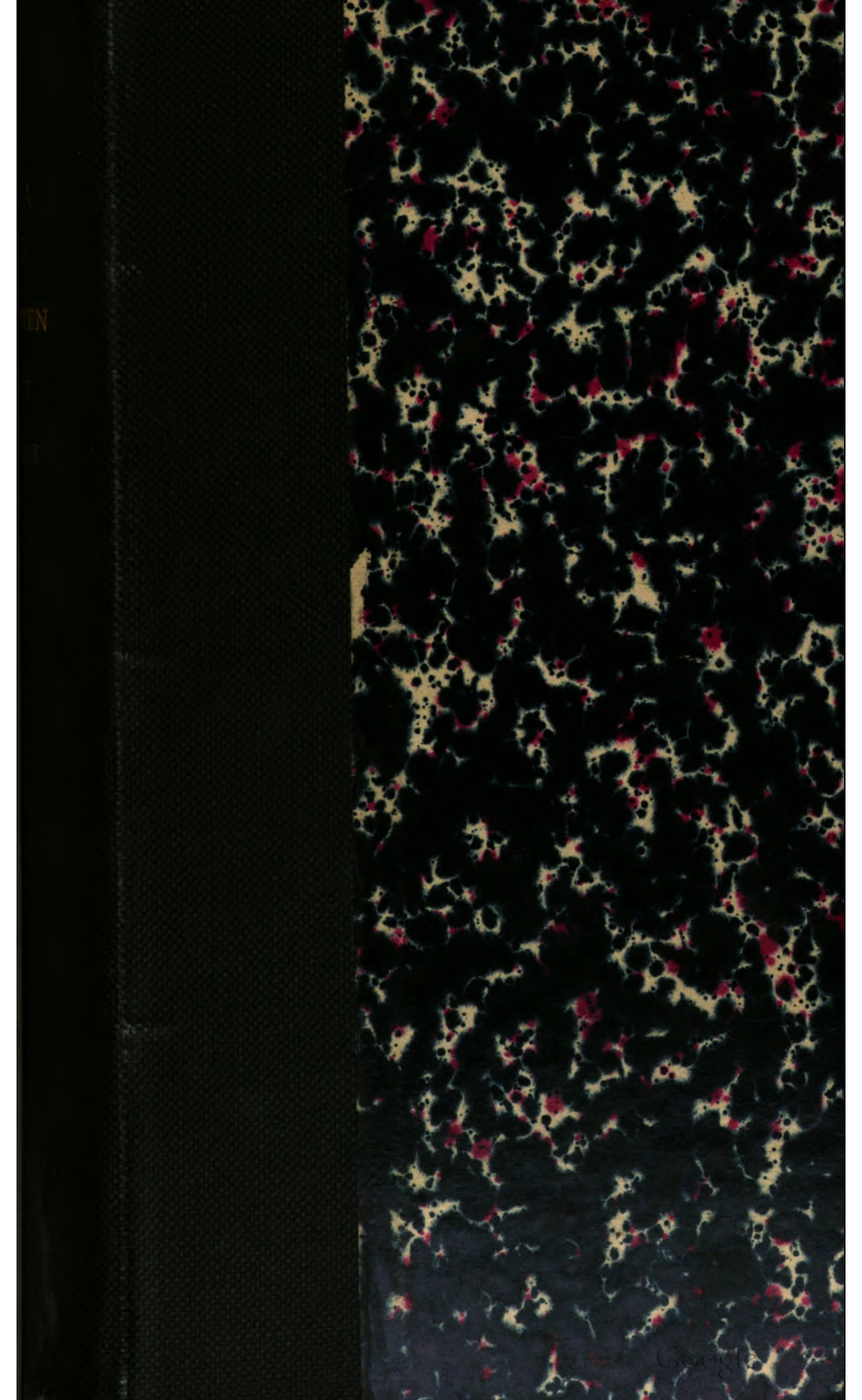




HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

September 5, 1901 – November 20, 1906.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTNEUNTER BAND.

WIEN, 1900.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CIX. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1900. — HEFT I BIS X.

(MIT 7 TAFELN UND 41 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1900.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

Seite

Seite

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. I. BIS III. HEFT.

JAHRGANG 1900. — JÄNNER BIS MÄRZ.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 2 TAFELN UND 10 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1900.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 1. bis 3. Heftes Jänner bis März 1900 des CIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

1

I. SITZUNG VOM 4. JÄNNER 1900.

Das w. M. Herr Director E. Weiss übersendet aus Benares eine Notiz über die Beobachtung des Sternschnuppenschwarms der Bieliden in Delhi.

Die Marine-Section des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums übersendet eine Arbeit über Kimmtiefenbeobachtungen zu Verudella, ausgeführt von Karl Koss, k. und k. Linienschiffslieutenant, und Emerich Graf Thun-Hohenstein, k. und k. Linienschiffsfähnrich.

Das w. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet eine von Herrn Prof. Dr. Karl Brunner in der k. k. allgemeinen Untersuchungsanstalt für Lebensmittel in Prag ausgeführte Arbeit, betitelt: »Synthese von Indolinbasen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Zd. H. Skraup in Graz übersendet eine im chemischen Institute der k. k. Universität in Graz ausgeführte Untersuchung von Dr. Richard Kudernatsch: »Über das Hexäthylidentetramin«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Lieben übersendet eine Arbeit von Herrn Prof. Dr. Richard Přibram in Czernowitz, betitelt: »Über das Austrium«. (Vorläufige Mittheilung.)

Das w. M. Herr Director Prof. F. Brauer überreicht eine Abhandlung vom c. M. Herrn Director Th. Fuchs: »Über die Natur der Edestiden mit besonderer Rücksicht auf die Gattung *Helicoprion*«.

Herr Custos Dr. Ludwig v. Lorenz legt eine Abhandlung: »Über einige Reste ausgestorbener Primaten von Madagaskar« vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Großherzogliche technische Hochschule in Karlsruhe, Festschrift zur Einweihung der Neubauten im Mai 1899.

Musée Bohême, Système silurien du centre de la Bohême par Joachim Barrande. Ière partie: Recherches paléontologiques. Vol. VII. Classe des Echinodermes. Famille des Crinoïdes. Texte, 40 planches et 33 figures dans le texte. Par le Prof. Dr. W. Waagen et le Dr. J. Jahn. Traduit par A. S. Oudin. Prag, 1899; 4°.

Vuković A., Erdbeben und Magnetnadel. Beobachtungen und Studien über den Zusammenhang zwischen den Erdbeben und den Ablenkungen der Magnetnadel. Wien, 1899; 8°.

Weinek L., Photographischer Mondatlas vornehmlich auf Grund von focalen Negativen der Lick-Sternwarte im Maßstabe eines Monddurchmessers von 10 Fuß. Heft VII. (Tafel 121—140 in Lichtdruck.) Prag, 1899; 4°.

II. SITZUNG VOM 11. JÄNNER 1900.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 20, Heft X (December 1899).

Herr Prof. Eduard Lippmann übersendet eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. Paul Cohn, betitelt: »Über die Condensation von Menthol mit Acetessigester«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. Gustav Jäger: »Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase« (II. Mittheilung).

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens legt eine Arbeit von Herrn Dr. R. Daublebsky v. Sterneck vor, welche den Titel führt: »Zur additiven Zahlentheorie«.

Der Präsident, Herr Prof. E. Suess, legt eine Abhandlung von Herrn Dr. Albrecht v. Krafft in Calcutta vor, betitelt: »Über die geologischen Ergebnisse einer Reise durch das Chanat Bokhara«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Weiss J., Dr., Das 2000jährige Problem der Einschreibung des Siebeneckes oder der Siebentheilung des Kreises auf elementarem Wege gelöst. Mit 2 Figuren. Budapest, 1899. 8°.

III. SITZUNG VOM 18. JÄNNER 1900

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft übersendet die Kundmachung über die im Jahre 1900 stattfindende Verleihung der Stipendien und Pensionen der bezeichneten Stiftung.

Der Secretär, Herr Hofrath v. Lang, überreicht eine Arbeit von Herrn Prof. Dr. W. Müller-Erzbach in Bremen, betitelt. »Versuche über die Wirkungsart und die Wirkungsweite einer Molecularkraft«.

Das w. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine von Herrn Dr. C. Pomeranz im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag begonnene, im II. chemischen Universitätslaboratorium in Wien abgeschlossene Arbeit, betitelt: »Über die Reactionsgeschwindigkeit bei der Einwirkung von Natriumhydroxyd auf Benzaldehyd«

Herr C. Tziolkovsky in Kaluga (Russland) übersendet eine gedruckte Beschreibung eines lenkbaren eisernen Luftballons.

Herr Ingenieur Otto v. Petényi in Budapest übersendet ein autographiertes Memorandum, betitelt: Projecte über I. die Jahreseintheilungsreform; II. die Decimaluhr; III. die einheitlichen Weltzeitzonen, welches derselbe dem im Jahre 1900 zu Paris abzuhaltenden internationalen Weltcongress vorzulegen beabsichtigt.

Herr Dr. Adolf Franke überreicht zwei im chemischen Laboratorium des Herrn Hofrathes Adolf Lieben ausgeführte Arbeiten:

I. »Über die Einwirkung von Brom auf Paraldehyde«.
II. »Über Propanal (2-Methyl-2-Brom)«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann legt eine im physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit vor, betitelt: »Über Radium- und Poloniumstrahlung«, von Dr. Stefan Meyer und Dr. Egon Ritter v. Schweidler.

Herr Dr. Fridolin Krasser überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Die von W. A. Obrutschew in China und Centralasien 1893—1894 gesammelten fossilen Pflanzen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Adamkiewicz A., Stehen alle Ganglienzellen mit den Blutgefäßen in directer Verbindung? (Separatabdruck aus »Neurologisches Centralblatt«, 1900, Nr. 1). 8°.

Ministerio della Pubblica Istruzione in Rom, Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Volume IX. Firenze, 1889. Groß 8°.

Fatio V., Dr., Faune des Vertébrés de la Suisse. Vol. II. Histoire naturelle des oiseaux. I[re] partie. Genève et Bâle, 1899. 8°.

Versuche über die Wirkungsart und die Wirkungsweite einer Molecularkraft

von

W. Müller-Erzbach.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1900.)

Die in Wied. Ann., 67, S. 899, 1899, mitgetheilten Beobachtungen veranlassten mich, ihrer Aufklärung und weiteren Beurtheilung wegen zu einer großen Zahl von neuen Versuchen, von denen eine Auswahl der wichtigsten nachstehend angegeben ist.

Um zunächst das Verhalten des Schwefelkohlenstoffs gegen die meist angewendete Mischung von 1 Gewichtstheil Gummi arabicum und 0·3 Gewichtstheil Glycerin zu prüfen, benützte ich eine beiderseits offene Glasröhre von 125 mm^2 Querschnitt. Dieselbe erhielt an dem einen Ende einen Boden von durchlöchertem Papier, der mit dicken Schichten der Gummimischung mehrfach bestrichen wurde, so dass er nach dem Trocknen sich auch bei etwas stärkerem Drucke für Luft völlig undurchlässig erwies. Wurde dann die Luft in der Röhre mit Schwefelkohlenstoff gemischt und das offene Ende der Röhre durch Wasser abgesperrt, so zeigte sich im Steigen des Wassers die lebhafte Diffusion des Schwefelkohlenstoffs durch die Gummischichte in die äußere Luft. Wenn der Gummiverschluss älter geworden war, so nahm diese Diffusionsgeschwindigkeit zwar ab, aber doch beobachtete ich noch am zehnten Tage in 19 Stunden ein Steigen des Wassers um 43 *mm*. In 4 Tagen war dabei der Schwefelkohlenstoff aus dem Inneren der Röhre fast ganz entwichen, und der Wasserstand änderte sich in den folgenden 25 Tagen nur mit der Temperatur und dem äußeren Luftdruck. Wenn man neben Gummi noch Papier zur Bedeckung verwendet, so muss man dessen Durchlässigkeit für Schwefelkohlenstoff ebenfalls kennen. Ganz dünnes Seidenpapier besitzt dieselbe für sich, wie mit Gummi bestrichen in

ziemlich hohem Maße, dickeres Seidenpapier weniger, und ein solches von 0·03 *mm* Stärke, welches, mit Gummi bestrichen, als »Leimpapier« verkauft wird, war so undurchlässig, dass es den Schwefelkohlenstoff in kleinen Glasflaschen vollständig zurückhielt, wenn ihre Öffnung mit dem Leimpapier beklebt war. An gewöhnlicher Luft verloren in drei verschiedenen Versuchen solche Flaschen in 6 Wochen nicht 1 *mg*, und nur bei sehr feuchter Luft entwichen durch die colloidale Decke geringe Mengen von Schwefelkohlenstoff. Zur späteren Bestimmung dieser Verluste wurden die kleinen Flaschen in größere gebracht, deren Feuchtigkeitsgehalt sich durch Schwefelsäure constant erhielt. Über Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1·214 oder bei 77 % Feuchtigkeit der Atmosphäre betrug nun der Diffusionsverlust durch 120 mm^2 Leimpapier 4 *mg* in 29 Tagen, ebenso an einem Tage bei 82 % Feuchtigkeit $\frac{1}{2}$ *mg*, 1 *mg* bei 89 % Feuchtigkeit, $2\frac{1}{4}$ *mg* bei 93 %. Die Diffusion wächst stark mit zunehmendem Feuchtigkeitsgehalt der Luft, und schon bei der Abnahme auf 75 % entwich wieder in 14 Tagen nicht 1 *mg* Schwefelkohlenstoff. Da es für die Beurtheilung der Versuche in einer Atmosphäre von 75 % und weniger Feuchtigkeit besonders wichtig wurde, den Widerstand des Leimpapiers genau zu kennen, so sind mit Fläschchen von breitem und glattem Rande, die sich gut zukleben ließen, noch weitere Beobachtungen angestellt, aber das Resultat blieb das frühere. In einer Atmosphäre von 75·2 % (über Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1·227) verlor das mit Leimpapier geschlossene Fläschchen erst in 64 Tagen 1 *mg*. Wiederholte und ausgedehnte Versuche werden aller Wahrscheinlichkeit nach noch geringere Werte ergeben, besonders in ganz feuchter Luft, welche den festen Verschluss durch Leimpapier sehr erschwert. In den verschiedenen Feuchtigkeitszuständen erwies sich demnach das Leimpapier als ein ungemein empfindliches Hilfsmittel, den Diffusionsdruck des Schwefelkohlenstoffs zu erkennen und zu messen. Die Dicke des Leimpapiers wurde nach seinem specifischen Gewichte 1·44, diejenige der Gummischicht nach dem specifischen Gewichte 1·46 berechnet.

2 *cm* breite und 6 *cm* lange Glasplatten wurden mit verschiedenen, den Kohlenstoff leicht aufnehmenden Stoffen: Harz,



Siegellack, Wachs, Knetgummi oder Tafeln von Gummi elasticum so bedeckt, dass meist nach allen Seiten ein ungefähr 4 *mm* breiter Glasrand frei blieb. Auf solche Glasplatten wurde das Leimpapier oder das Seidenpapier mit der Lösung aus Gummi arabicum und aus Glycerin so aufgeklebt, dass gewöhnlich ein Rand von 3 *mm* über den zu bedeckenden Körper hinausreichte und unmittelbar auf das Glas festgeklebt war. Durch Einstellen des Versuchsgefäßes in eine mit Wasser halbgefüllte Schale hielt sich der unten befindliche Schwefelkohlenstoff andauernd ungefähr $1^1/_2{}^\circ$ kälter als die höherstehenden Probiergläser mit den Glasplatten. Eine oft recht störende Verdichtung von Schwefelkohlenstoff auf den letzteren wird dadurch mit Sicherheit vermieden. Beim Wiegen waren die Cylinder mit den Glasplatten meist durch Korkstöpsel geschlossen, zuweilen wurde auch noch ein zweitesmal nach dem Entweichen des Schwefelkohlenstoffs gewogen. Der Unterschied betrug bei 17° und 265 *mm* Dampfdruck vom Schwefelkohlenstoff für Glascylinder von 24 cm^3 Inhalt der Rechnung entsprechend $14^1/_2$ *mg*, da sie 6·88 cm^3 Schwefelkohlenstoff von je 3·43 *mg* Gewicht aufnehmen.

Zunächst wurden die Glasplatten mit einer größeren Menge, 0·564 *g*, der Mischung aus Gummi und Glycerin allein bedeckt und bei 77 % Feuchtigkeit der Einwirkung des Schwefelkohlenstoffs ausgesetzt. Nach 24 Stunden wurde gewogen, der Schwefelkohlenstoff entfernt und nach dem Einstellen in eine gleich feuchte Atmosphäre 2 bis 3 Stunden später von neuem gewogen. Der höchste dabei beobachtete Unterschied betrug 1 *mg*, mehr hatte also die beträchtliche Menge des Gummigemisches (vier- bis fünfmal so viel als später zur Anwendung kam) an absorbiertem Schwefelkohlenstoff in der feuchten Luft nicht verloren. Als durchlässigeres Pergamentpapier die Gummischicht bedeckte, erhielt ich auch in einer Atmosphäre von 91 % Feuchtigkeit kein wesentlich anderes Resultat. Nach der Bedeckung mit Leimpapier beobachtete ich in einem Falle bei 91 % Feuchtigkeit einen nachträglichen Gewichtsverlust von $1^1/_2$ *mg*, nachher bei 77 % Feuchtigkeit einen Verlust von 1 *mg* und dann nach 48stündiger Einwirkung des Schwefelkohlenstoffs nur $^1/_2$ *mg*. Die durch das Öffnen der Versuchs-

gefäße entstehenden Feuchtigkeitsänderungen mussten bei dem vorhandenen hohen Dampfdrucke den nachträglichen Gewichtsverlust vergrößern, so dass also die Menge des verdunstenden Schwefelkohlenstoffs über 1 *mg* bestimmt nicht hinausgeht.

In einer Atmosphäre von 70% Feuchtigkeit zeigte eine mit einem Blatte Leimpapier und mit Gummimischung bedeckte Glasplatte nach 2 Tagen schon ein constantes Gewicht, eine Bedeckung mit 5 Blättern Leimpapier bei reichlichem Zusatze von Gummi verzögerte die Ausgleichung bis zum vierten Tage, und ganz geringe Änderungen wurden auch noch später beobachtet. Das Austrocknen der Gummimasse veranlasste zuerst fast ausnahmslos eine Verminderung des Gewichtes. Wenn also unter dem Einflusse des Schwefelkohlenstoffs gleich anfangs eine Gewichtszunahme der Glasplatten beobachtet wird, so ist an Stelle des verdunstenden Wassers eine ungleich größere Menge an Schwefelkohlenstoff aufgenommen.

Für die Versuche ohne Papierbedeckung ist zu beachten, dass der Einfluss der atmosphärischen Feuchtigkeit auf die Durchlässigkeit bis jetzt nicht näher festgestellt ist. Bei den ersten Versuchen wurde er nur wenig beachtet, es zeigte sich dann zwar die geringere Wirkung des Schwefelkohlenstoffs in trockener Luft, aber einer genaueren Bestimmung wurde der Umstand hinderlich, dass in einer Atmosphäre von nur 20 oder 30% Feuchtigkeit die Gummimasse leicht Risse bekommt, wodurch dann sofort große Mengen von Schwefelkohlenstoff eindringen und den Versuch stören. Das geschieht noch häufiger beim Collodium, welches beim Eintrocknen leicht da reißt, wo es dem Glase aufliegt. Die Versuchstemperatur schwankte meist zwischen 12 und 18° als äußersten Grenzen.

Die relative Feuchtigkeit der Luft in den Versuchsflächen über verdünnter Schwefelsäure ist bis 84% nach Regnault und darüber hinaus nach eigenen Messungen angegeben. Für die vorliegende Untersuchung genügen die folgenden Werte:

Spec. Gew. der Schwefelsäure:	1·291,	1·284,	1·276,	1·268,
Relativer Dampfdruck:	0·61,	0·63,	0·65,	0·67,

1·258,	1·249,	1·238,	1·207,	1·180,	1·12,	1·11,	1·09.
0·69,	0·71,	0·73,	0·79,	0·84,	0·89,	0·91,	0·935.

A. Versuche bei einer Bedeckung der Angriffskörper mit erstarrter Gummimischung oder mit Collodium.

Anziehungskörper	Art der Bedeckung	Höhe derselben	Zeit der Einwirkung	Feuchtigkeitsgehalt der Luft	Gewichtszunahme	Bemerkungen
Wachs	Gummi arabicum mit Glycerin	0·12 *mm*	$4^1/_2$ Stunden	72%	6 *mg*	
			16 Stunden nachher	72	24	Dicke Tropfen Lösung in der Gummimasse.
Wachs	Gummi arabicum mit Glycerin, sehr gut deckend	0·071	18 Stunden	57	11	Bei geringerer Feuchtigkeit weniger.
			24 Stunden nachher	57	5	
			23 Stunden nachher	57	8	Stark aufgetrieben.
			25 Stunden nachher	57	8	Decke nicht zerrissen.
Wachs	Gummi arabicum und Glycerin	0·32	5 Tage	56	0	
Wachs	Gummi arabicum Collodium	0·08 } 0·06 } 0·14 *mm*	7 Tage	72	2	Einfluss der Verschiedenheit der zweiten Decke.
Siegellack	Gummi arabicum mit Glycerin	0·37	9 Tage	45	0	
			1 Tag später	45	+2	
			2 Tage später	45	—2	
			2 Tage später	45	0	
	theilweise abgewaschen	0·21 *mm* Rest	1 Tag	45	+8	

Anziehungskörper	Art der Bedeckung	Höhe derselben	Zeit der Einwirkung	Feuchtigkeitsgehalt der Luft	Gewichtszunahme	Bemerkungen
Siegellack	Collodium Gummi arabicum, sehr gut deckend	0·016 0·034 } 0·05 *mm*	14 Stunden 23 Stunden später	73% 73	4 *mg* 9	
Siegellack	Collodium Gummi arabicum mit Glycerin	0·055 0·056 } 0·11	31 Stunden	72	0	
Harz	Gummi arabicum und Glycerin	0·04	14 Stunden 22 Stunden später	77 77	6 71	Viel Lösung abgeflossen.
Blattförmiges Gummi elasticum	Gummi arabicum und Glycerin, 7 mal gestrichen	0·35	22 Stunden 20 Stunden später	72 72	0 1	
	theilweise abgewaschen	0·20	23 Stunden später	72	26	
Knetgummi	Gummi arabicum und Glycerin	0·14	5 Stunden 14 Stunden später	77 77	6 41	

In gleich feuchter Atmosphäre nimmt derselbe Anziehungskörper den Schwefelkohlenstoff leichter unter der Decke der Gummimasse allein, als durch Gummi und Collodium hintereinander auf. Davon abweichende Versuchsresultate können darauf beruhen, dass sich das Collodium nicht dicht genug an das Glas angelegt hat, denn sie zeigten sich nicht, wenn auf dem Glase zuerst eine Gummischichte unter dem Collodium lag. Durch freie Diffusion kommt der Schwefelkohlenstoff zunächst in die oberste Schichte der für ihn durchlässigen Decken und dringt dann allmählich weiter vor. Hat er den Anziehungskörper erreicht und kann er mit demselben, wie mit Harz, Siegellack oder Wachs, eine flüssige Lösung bilden, so steigt diese oft in capillaren Querschnitten in der Bedeckungsschichte empor und breitet sich oben zu kleineren oder größeren Tropfen aus. Bis zu welcher Tiefe dabei der Schwefelkohlenstoff durch die freie Bewegung getrieben wird, ließ sich zunächst nicht feststellen. Dass aber zu nur mäßigen Tiefen vom Bruchtheile eines Millimeters jedenfalls eine Reihe von Tagen erforderlich ist, ergibt sich schon aus den mitgetheilten Beobachtungen. 14 andere Versuche, in welchen auf Glas aufgeklebtes und glatt geriebenes Eisenoxyd mit verdünntem Glycerin bedekt waren, ließen mit dem vorigen übereinstimmend eine bedeutende Widerstandsfähigkeit der Bedeckung gegen Schwefelkohlenstoff erkennen. Durch langsames Verdunsten konnte nämlich die Stärke der Decke immer weiter vermindert werden, und es wurde dann Tag für Tag nach der Entfernung des Schwefelkohlenstoffs in einem Raume von demselben Feuchtigkeitsdruck festgestellt, ob das Versuchsglas nur die seiner Größe entsprechende Gewichtsabnahme oder eine größere zeigte. Im letzteren Falle war auf Bindung von Schwefelkohlenstoff durch Eisenoxyd zu schließen, und das war niemals früher zu bemerken, als bis die Dicke der Glycerinschichte nur noch 0·09 *mm* oder weniger betrug. Die Versuche dauerten bis zu 7 Tagen, also erfolgt das Eindringen des Schwefelkohlenstoffs jedenfalls sehr langsam. Um nun seine Bewegung weiter zu beobachten, fügte ich zu der Gummimischung Decken aus Papier hinzu, zunächst solche, die bei jedem Feuchtigkeitszustand der Atmosphäre etwas Schwefelkohlenstoff durchlassen,

und dann das erwähnte Leimpapier. Auch von diesen Beobachtungen ist nachstehend nur eine Auswahl der wichtigsten zusammengestellt, als

_B_. Versuche bei einer Bedeckung der Angriffskörper mit Papier und mit Gummimischung.

Anziehungskörper	Art der Bedeckung	Höhe derselben	Zeit der Einwirkung	Feuchtigkeitsgehalt der Luft	Gewichtszunahme	Bemerkungen
Gummi elasticum	Gummi arab. und 2 Blätter Seidenpapier, 0·012	0·09 *mm*	$2\frac{1}{2}$ Tage	72%	0 *mg*	
			1 Tag später	72	7	
			1 » »	72	6	
Siegellack	Gummi arab. und 2 Blätter Seidenpapier, 0·012	0·05	2 Tage	72	0	
			1 Tag später	72	2	
			1 » »	72	3	
			1 » »	72	4	
Gummi elasticum	Gummi arab. und 1 Blatt 0·022 *mm* dickes Pergamentpapier	0·07	$1\frac{3}{4}$ Tage	72	0	
			1 Tag später	72	3	
			1 » »	72	3	
			1 » »	72	4	
			1 » »	72	6	

Gummi elasticum	Gummi arab. und 3 Blätter Pergamentpapier	0·08 *mm*	2 Tage	89%	2 *mg*	Pergamentpapier, überall sehr glatt aufliegend.
			1 Tag später	89	3	
			1 » »	89	4	
			1 » »	89	3	
			1 » »	89	4	
Gummi elasticum	Gummi arab. und 5 Blätter Pergamentpapier	0·19	9 Tage	87	0	
			3 Tage später	87	4	Das unterste Blatt Papier war bei einem früheren Versuche aufgelegt.
			1 Tag »	87	3	
			2 Tage »	87	4	
Knetgummi	Gummi arab. und 5 Blätter Pergamentpapier	0·16	11 Tage	91	0	Zuerst noch geringe Abnahme.
			4 Tage später	91	7	
Knetgummi	Gummi arab. und 1 Blatt 0·033 *mm* dickes Leimpapier	0·066	1 Tag	89	0	
			1 Tag später	89	2	
			1 Tag »	89	3	
			2 Tage »	89	6	In gleich feuchter Luft diffundierten durch Leimpapier von derselben Fläche an einem Tage 3 *mg* CS_2.
			1 Tag »	89	4	
			1 Tag »	89	6	
			2 Tage »	89	8	
			1 Tag »	89	1	
Knetgummi	Gummi arab. und 2 Blätter Leimpapier	0·085	5 Tage	77	0	
			9 Tage später	77	3	

Anziehungskörper	Art der Bedeckung	Höhe derselben	Zeit der Einwirkung	Feuchtigkeitsgehalt der Luft	Gewichtszunahme	Bemerkungen
Knetgummi	Gummi arab. und 3 Blätter Leimpapier	0·19 *mm*	6 Tage	92%	0, *mg* Abnahme	
			1 Tag später	92	4	
			1 Tag »	92	6	
Knetgummi	Gummi arab. und 4 Blätter Leimpapier	0·22	4 Tage	93	0	
			4 Tage später	93	3	
			11 » »	93	9	
			2 » »	93	5	
			3 » »	93	2	
			4 » »	93	4	
			5 » »	93	7	
Harz	Gummi arab. und 2 Blätter Leimpapier	0·12	3 Tage	91	0	Nach Entfernung des Papieres Harz an der Oberfläche überall flüssig.
			2 Tage später	91	5	
			4 Tage »	91	2	
			1 Tag »	91	3	
Siegellack	Gummi arab. und 3 Blätter Leimpapier	0·18	6 Tage	91	0	
			2 Tage später	91	2	
			3 » »	91	3	An der Oberfläche des Siegellacks überall flüssige Lösung.
			2 » »	91	3	
			3 » »	91	3	

Harz, welches in einer Höhe von 0·31 *mm* mit 6 Blättern Leimwasser, wie mit der Mischung aus Gummi arabicum und Glycerin bedeckt war, erwies sich in einer Atmosphäre von 91% Feuchtigkeit 14 Tage lang nach anfänglicher Abnahme unveränderlich in seinem Gewichte. Dann aber fieng wieder die Zunahme an und setzte sich ohne Unterbrechung fort. Sie betrug 12 Tage später 10 *mg*, und das Harz erschien nach der Entfernung der Decke überall an seiner Oberfläche flüssig von aufgenommenem Schwefelkohlenstoffe. Bei einem Feuchtigkeitsgehalte der Atmosphäre von 62% aber erwies sich das Leimpapier, meinen früheren Beobachtungen an bedeckten Flaschen entsprechend, ganz undurchdringlich für Schwefelkohlenstoff. Weder Wachs, noch Harz ließen bei dieser Feuchtigkeit unter einer Decke von Leimpapier nach 39 Tagen irgend eine Gewichtszunahme oder eine andere Änderung erkennen. Auch die Versuche unter dem Striche auf Seite 24 stimmen damit überein. Im allgemeinen habe ich eine mehrfache Bedeckung selbst beim Leimpapier bevorzugt, weil dadurch leicht eine schadhafte Stelle des einen Blattes mit einer besseren des anderen bedeckt wird, doch müssen nicht viel solcher Stellen in dem Leimpapiere vorkommen, denn es ist mir nur ein einziger Versuch aus diesem Grunde gestört worden.

Alle *B*-Versuche stimmen darin vollständig überein, dass es selbst bei einer für Schwefelkohlenstoff ziemlich durchlässigen Decke, wie sie z. B. bei 93% Feuchtigkeit auch im Leimpapiere gegeben ist, doch längere Zeit dauert, bis sich die Aufnahme des Schwefelkohlenstoffs durch die Gewichtszunahme bemerklich macht. Ist aber der Vorgang erst eingeleitet, dann beobachtet man eine je nach der Bedeckung mehr oder weniger lebhafte Einwirkung. Dieselbe kann sogar mehr Schwefelkohlenstoff durch die Decke hindurchtreiben, als es unter dem Einflusse des auf der Rückseite wirksamen Dampfdruckes an der freien Luft geschieht. M a n k a n n d i e w a h r g e n o m m e n e n V e r ä n d e r u n g e n n u r s o a u f f a s s e n, d a s s d e r d u r c h f r e i e D i f f u s i o n e i n d r i n g e n d e S c h w e f e l k o h l e n s t o f f i m A u g e n b l i c k e, w o e r m i t d e m A n z i e h u n g s k ö r p e r z u s a m m e n t r i f f t, v o n d e m s e l b e n l e b h a f t e r r e g t w i r d, u n d d a s s d i e s e m o l e c u l a r e E i n w i r k u n g,

die bis über die Decken hinausreicht, ein stärkeres Einströmen des Gases veranlasst. Die weiter reichende Anziehung erfolgt demnach nicht, wie ich früher annahm, durch fremde Körper hindurch, sondern der in Berührung getretene Schwefelkohlenstoff ist selbst der Träger und Leiter für dieselbe. Durch einen ähnlichen Einfluss auf die hinzutretenden Dämpfe, der von diesen selbst vermittelt wird, möchte ich auch die Adsorption des Wassers durch Thonerde, Eisenoxyd etc. erklären. Derselbe nimmt mit dem Quadrate der Abstände ab[1] und wird bald durch die Spannkraft des einwirkenden Dampfes übertroffen, so dass weitere Schichten dann nicht mehr anhaften.

Dass in den vorstehend beschriebenen Versuchen die Aufnahme des Schwefelkohlenstoffs nicht ausschließlich der freien Diffusion zugeschrieben werden darf, sondern dass dabei die Rückwirkung des Anziehungskörpers eine wesentliche Rolle spielt, folgt noch weiter mit aller Bestimmtheit aus der Thatsache, dass der Zufluss des Schwefelkohlenstoffs von den verschiedenen Anziehungskörpern in ganz ungleicher Stärke befördert wird. Das stellte sich im Laufe der Untersuchung mit voller Deutlichkeit heraus. Es zeigte sich in den Beobachtungen an noch ziemlich durchlässigem Leimpapiere, wie in anderen mit Leimpapier an der Grenze seiner Durchlässigkeit.

Um für bie Beurtheilung der Erscheinung einen näheren Anhalt zu gewinnen, suchte ich festzustellen, ob die angewendeten Stoffe auch ohne Bedeckung einen Unterschied in der Aufnahme des Schwefelkohlenstoffs erkennen lassen, wenn sie unter annähernd gleichen Umständen nur kurze Zeit in einer mit Schwefelkohlenstoff gesättigten Atmosphäre wirksam sind. Die durch Schmelzung auf Glasplatten ausgebreiteten Stoffe wurden in einem weiten Glascylinder übereinstimmend eine Stunde lang in verschlossene weite Glasflaschen gestellt, welche Luft von 75 % Feuchtigkeit und in einem unten angebrachten Behälter Schwefelkohlenstoff enthielten. Das Resultat war folgendes (*C*-Reihe):

---

[1] Diese Berichte, 98. Bd., Februar 1889.



Anziehungskörper	Angriffs-fläche	Gewicht	Gewichtszunahme in einer Stunde	Gewichtszunahme auf 6·4 cm^2	Bemerkungen
Wachs	6·4 cm^2	0·150 g	88 mg	88 mg	Das Mehrgewicht des der Luft des Glascylinders beigemengten Schwefelkohlenstoffs ist abgerechnet.
Wachs	6·8	0·212	87	82	
Siegellack	6·3	0·244	130	132	
Harz...........	5·8	0·242	146	161	
Harz...........	7·5	0·365	170	145	
Knetgummi	4·8	9·170	110	147	
Gummi elasticum	6·1	0·165	147	154	

Neue Beobachtungen ergaben zwar für denselben Anziehungskörper ähnliche Unterschiede wie vorher für Harz, aber in allen Fällen blieb das Wachs in seinem Verhalten von den übrigen Stoffen stark abweichend. Eine weitere Bedeutung ist diesen Versuchen nicht beizulegen, das Verhältnis der Gewichtsänderungen wäre bei einer anderen Versuchsdauer oder einer anderen Form der umschließenden Gefäße jedenfalls ein anderes geworden. Die Menge des aufgenommenen Schwefelkohlenstoffs ist im Vergleiche zu den vorher an den bedeckten Angriffskörpern von 4 bis 5 cm^2 Angriffsfläche sehr groß. Weshalb das Wachs nun weniger Schwefelkohlenstoff bindet als wie Harz oder Gummi etc., ob es durch die größere Spannung des gebundenen Dampfes oder die geringere Beweglichkeit der flüssigen Lösung veranlasst wird, blieb vorläufig gleichgiltig. Es war vor allem festzustellen, ob der gefundene Unterschied zwischen Wachs und den anderen Anziehungskörpern auch bei ganz langsamer Aufnahme von Schwefelkohlenstoff durch eine widerstandleistende Decke erkennbar wäre. Die dabei gemachten Beobachtungen sind 1. solche, bei welchen das zur Bedeckung benützte Leimpapier wegen der größeren Feuchtigkeit der Luft (über 75%) für Schwefelkohlenstoff noch durchlässig ist, und 2. solche mit Leimpapier an der Grenze der Durchlässigkeit.

D. Versuche über das verschiedene Verhalten der Anziehungskörper.

Anziehungskörper	Art der Bedeckung	Höhe derselben	Zeit der Einwirkung	Feuchtigkeitsgehalt der Luft	Gewichtszunahme	Bemerkungen
			1.			
Wachs	ein Blatt Leimpapier mit Gummi arabicum	0·063 *mm*	3. Tag	90·7%	5 *mg*	Die beiden ersten Tage sind wegen der Gewichtsänderungen durch das Trocknen vom Gummi arabicum weggelassen. Die Gewichtszunahme gilt für eine Angriffsfläche von 6 cm^2.
			4. »	—	4	
			5. »	—	4	
			6. »	—	1	
			7. »	—	2	
			8. »	—	1/2	
Wachs	—	0·05	3. »	—	6	
			4. »	—	6	
			5. »	—	3 1/2	
			6. »	—	2	
			7. »	—	1	
Siegellack	—	0·074	3. »	—	8 1/2	
			4. »	—	7	
			5. »	—	6	
			6. »	—	6	
			7. »	—	6	
			8. »	—	3 1/2	
			9. »	—	2	
Knetgummi	—	0·08	3. »		9 1/2	
			4. »		8 1/2	

			5. Tag	90·7%	7 *mg*	
			6. »	—	6	
Gummi elasticum	—	0·06	3. »	—	9	
			4. »	—	$4^1/_2$	
			5. »	—	4	
			6. »	—	5	
			7. »	—	4	
			8. »	—	3	
Knetgummi	—	0·07	32 Tage	75·2	10	Vorher 7 Tage lang bei 75% Feuchtigkeit getrocknet, ebenso das Wachs in dem folgenden Parallelversuche.
			am 35. Tag	91	4	
			vom 36.—40. Tage	—	21 (5·4)	
			9 folgenden Tage	—	23	
			8 » »	—	15	
			7 » »	—	14	
Wachs	—	0·07	32 Tage	75·2	2	
			am 35. Tage	91	2	Vom 33. Tage an wie beim vorhergehenden Versuche 91%. Zunahme bis zum 34. Tage wegen der Wasseraufnahme nicht genannt.
			vom 36.—40. Tage	—	11	
			9 folgenden Tage	—	11	
			8 » »	—	5	
			7 » »	—	4	
2.						
Harz	ein Blatt Leimpapier und Gummi arabicum	0·08 *mm*	6 Tage	74·5%	0 *mg*	Das unter dem Papier an der Oberfläche flüssige Harz verliert 8 *mg* in einer Luft von 75% Feuchtigkeit.
			1 Tag später	—	2	
			1 » »	—	2	
			4 Tage »	—	1	

Anziehungskörper	Art der Bedeckung	Höhe derselben	Zeit der Einwirkung	Feuchtigkeitsgehalt der Luft	Gewichtszunahme	Bemerkungen
Harz	—	0·09 *mm*	11 Tage	74·5%	3 *mg*	Verliert 4 *mg* aus der flüssigen Oberfläche.
Siegellack	—	0·055	3 Tage	75	1	
			2 Tage später	—	4	Unter dem Papier angegriffen und klebrig.
			1 Tag »	—	0	
Wachs	—	0·06	18 Tage	74·5	0	
			10 Tage später	—	2	
			5 » »	—	1	Nach Entfernung der Decke in 4 Stunden 3 *mg* Verlust.
Gummi elasticum	—	0·044	2 Tage	72·1	0	
			7 »	—	3	Nach Entfernung der Decke 3 *mg* Verlust.
Harz	zwei Blätter Leimpapier und Gummi arabicum	0·09	5 Tage	75·6	0	
			4 Tage später	—	$1^1/_2$	
			6 » »	—	6	
			4 » »	—	2	
			4 » »	—	0	
Harz	ein Blatt Leimpapier	0·045 *mm*	16 Tage	60%	0 *mg*	Unter der Decke ganz unverändert.
Knetgummi	—	0·06	11 Tage	64	0	
Wachs	—	0·05	12 »	64	0	

Der ungleichen Aufnahme des Schwefelkohlenstoffs durch die unbedeckten Angriffskörper entsprechend finden wir überall dasselbe Leimpapier über Wachs weniger durchlässig als über Harz oder Gummi. Weil in den beiden ersten Tagen die Gewichtsabnahme der Gummimasse die Beobachtung des Eintrittes von Schwefelkohlenstoff stört, so sind die Gewichtszunahmen erst vom dritten Tage an angegeben, oder es ist auch zuerst zum Trocknen eine Atmosphäre von etwas geringerem Feuchtigkeitsgehalte benützt worden.

Recht auffallend war die baldige Abnahme im Einströmen des Schwefelkohlenstoffs, die sich besonders beim Wachs stark bemerklich machte. Wenn man bedenkt, dass das unbedeckte Wachs in einer Stunde mehr als das Zehnfache des Schwefelkohlenstoffs aufnimmt, der unter stärker durchlässigem Leimpapier in 24 Stunden eindringt, so sollte man nicht erwarten, dass im letzteren Falle die Spannkraft des gebundenen Dampfes ein Hindernis für den weiteren Zufluss desselben abgeben könnte. Und doch muss von der Berührungsstelle ein derartiger Einfluss ausgehen, denn thatsächlich beobachten wir regelmäßig nach der ersten Aufnahme bald die Hemmung, die beim Wachs am ersten und am meisten auffällt. In Übereinstimmung damit fand sich denn auch, dass Wachs den Schwefelkohlenstoff weniger fest bindet als Siegellack oder Harz. Eine mit Wachs überzogene Glasplatte hatte den in einer Stunde aufgenommenen Schwefelkohlenstoff nach 24 Stunden an freier Luft vollständig verloren, während Siegellack und Harz einen beträchtlichen Rest lange Zeit zurückhielten. Gummi verhält sich ähnlich wie Wachs, beide zerflossen auch nicht mit Schwefelkohlenstoff.

Wenn man die durch Leimpapier an die freie Luft durchgelassenen Mengen von Schwefelkohlenstoff mit den durch dasselbe an die Anziehungskörper übergetretenen vergleichen will, so ist zu beachten, dass der Verschluss einer Flaschenöffnung durch bloße Randbedeckung schwieriger ist als die Belegung einer Glasplatte. Die durch Undichtigkeit entstehenden Gewichtsverluste sind deshalb bei den Flaschen allgemein größer. Nach der Ausdehnung der Flächen lässt sich daher mit voller Sicherheit behaupten, dass das Papier über den Angriffs-

körpern in 22 Tagen bei 75% oder weniger Feuchtigkeit nicht $1\frac{1}{2}$ *mg* Schwefelkohlenstoff an die Luft durchlassen konnte. Das Eindringen durch freie Diffusion erfolgt aber nach den *A*-Versuchen ungleich viel langsamer als der Durchgang durch colloidale Wände. Bei 75% Feuchtigkeit nimmt aber nur das Wachs eine ähnliche Menge an Schwefelkohlenstoff auf, als das vorliegende Leimpapier an die Luft durchlassen würde. In allen anderen Fällen geht viel mehr und bis über das Zehnfache durch das Leimpapier, wenn es vor einem Anziehungskörper liegt, als wenn es allein mit dem gasförmigen Schwefelkohlenstoff in Berührung kommt und seinen Durchgang an die freie Luft versperrt. Wir beobachten also in einer beträchtlichen Zahl von Einzelfällen unter ganz verschiedenen Umständen einen von den Anziehungskörpern ausgehenden Bewegungsantrieb, der den Widerstand der Papierdecke überwindet. Dass dabei eine minimale Menge von zuerst frei eingedrungenem Schwefelkohlenstoff ebenfalls den Träger des Antriebs abgibt, folgt schon daraus, dass in genügend trockener Luft nichts aufgenommen wird. Die Stärke des auf den Schwefelkohlenstoff ausgeübten Antriebes erwies sich von der Art der Angriffskörper abhängig und war beim Harz und Gummi größer als beim Wachs.

Eine Rückströmung der gebildeten Verbindung des Schwefelkohlenstoffs bleibt für die Erklärung ausgeschlossen, da jedenfalls beim Gummi keine flüssige Verbindung entstanden war, und es bleibt also nur die Annahme einer über die Decken hinaus von dem Anziehungskörper ausgeübten Anziehungsbewegung übrig. Reichte die Wirkungssphäre nicht so weit, so würde das Nachströmen des Schwefelkohlenstoffs nicht wesentlich lebhafter erfolgen als das ursprüngliche Einströmen, welches selbst nach mehreren Tagen durch die Wage nicht zu erkennen war.

Aus der Dicke des Leimpapiers ergab sich, dass die moleculare Anregung der bedeckten Körper auf den Schwefelkohlenstoff wiederholt bis auf eine Entfernung von mindestens 0·066 *mm* wirksam sein musste.

Als wichtigste Ergebnisse meiner Untersuchungen sind die folgenden zu nennen:

1. Durch freie Diffusion dringt der Schwefelkohlenstoff nur bis zu geringer Tiefe in colloide Körper ein.

2. Erst dann, wenn der durch freie Diffusion eingedrungene Schwefelkohlenstoff einen Anziehungskörper erreicht hat, erfolgt ein vorher nicht bemerkbares deutliches Einströmen des Gases.

3. Die Erregung des Schwefelkohlenstoffs durch verschiedene Anziehungskörper ist eine ungleiche und beim Wachs schwächer als beim Gummi oder Harz.

Zur additiven Zahlentheorie

von

Dr. **R. Daublebsky v. Sterneck** in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Jänner 1900.)

Die elementare Theorie der additiven Erzeugung der ganzen Zahlen hat durch die im Jahre 1893 veröffentlichte Abhandlung des Herrn K. Th. Vahlen: »Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie«[1] eine sehr wesentliche Bereicherung erfahren. In dieser Arbeit wird der Euler-Legendre'sche Satz, welcher besagt, dass jede ganze positive Zahl sich im allgemeinen ebenso oft in eine gerade, wie in eine ungerade Anzahl positiver, voneinander verschiedenen Summanden zerlegen lässt, auf einen anderen Satz zurückgeführt, der sich auf jene Darstellungen einer ganzen Zahl bezieht, bei welchen die Summe der absolut kleinsten Reste der Summanden (Modulo 3) einen bestimmten Wert hat; unter diesen Darstellungen finden sich nämlich im allgemeinen ebenfalls gleich viele gerade wie ungerade[2] vor.

Mit Hilfe dieses Satzes beweist Herr Vahlen in sehr einfacher Weise u. a. den von Jacobi herrührenden Satz, dass sich die dritte Potenz des unendlichen Productes $\Pi(1-x^n)$ in eine Potenzreihe nach x entwickeln lässt, wobei nur die Trigonalzahlen als Exponenten auftreten.

In den folgenden Zeilen möchte ich mir nun zunächst erlauben, einen anderen einfachen Beweis dieses Jacobi'schen Satzes mitzutheilen und denselben als Folge eines anderen

[1] Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 112.

[2] Kürzerer Ausdruck für »Darstellungen durch eine gerade, beziehungsweise ungerade Anzahl von Summanden«.

Satzes der additiven Zahlentheorie darzustellen, welcher in diesen Sitzungsberichten von mir abgeleitet wurde und mit den Vahlen'schen Untersuchungen im Zusammenhange steht.[1]

Im zweiten Abschnitte dieser Mittheilung sollen dann die Darstellungen einer ganzen Zahl durch lauter verschiedene Summanden daraufhin untersucht werden, welche Summe die modulo 5 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden ergeben. Es liegt ja die Frage nahe, ob sich die von Herrn Vahlen erhaltenen Resultate nicht, wenigstens zum Theile, auch auf einen von 3 verschiedenen ungeraden Modul übertragen lassen. Natürlich wird die Complication schon bei dem zunächst in Betracht kommenden Modul 5 eine sehr große, da jeder Summand einen der fünf verschiedenen absolut kleinsten Reste —2, —1, 0, +1, +2 zur Restsumme beitragen kann; immerhin lassen sich die Anzahldifferenzen der geraden und ungeraden Darstellungen mit der Restsumme h (analog wie im Falle des Moduls 3) auf die Anzahldifferenzen der Darstellungen mit einer der Restsummen —2, —1, 0, +1, +2 zurückführen, welche Eigenschaft uns in den Stand setzt, Recursionsformeln für die letzteren Anzahldifferenzen aus dem Legendre'schen Satze abzuleiten. Diese Recursionsformeln eignen sich recht gut zur praktischen Berechnung, falls die in Summanden zerlegten Zahlen nicht allzu groß sind.

I.

Das unendliche Product

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$$

hat Euler in eine unendliche Reihe nach fortschreitenden Potenzen von x zu entwickeln gelehrt, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, indem er die Gleichung bewies:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty}(-1)^t x^{\frac{3t^2+t}{2}}.$$

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CVI, Abth. II.a.

Jacobi hat in seinen »Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum« gezeigt, dass man auch die dritte Potenz desselben Productes in eine Reihe entwickeln könne, in welcher statt der Pentagonalzahlen die Trigonalzahlen als Exponenten auftreten. Es besteht nämlich die Beziehung:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3=\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t(2t+1)x^{\frac{t^2+t}{2}}.$$

Jacobi hat selbst später einen elementaren, von der Theorie der elliptischen Functionen unabhängigen Beweis für diesen Satz gefunden.[1] Ein gleichfalls elementarer Beweis wurde, wie erwähnt, von Herrn Vahlen gegeben. Wir wollen diesen Satz hier als einfache Consequenz aus folgendem Satze[2] der additiven Zahlentheorie ableiten:

»Stellt man die ganze positive Zahl k derart als Summe von ganzen Zahlen dar, dass eine und dieselbe Zahl bis zu dreimal, jedoch nicht öfter in einer und derselben Darstellung verwendet werden darf, bezeichnet man ferner mit $y_\rho(k)$ den Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden derjenigen dieser Darstellungen, welche genau ρ Elemente weniger oft als dreimal enthalten, so verschwindet $y_\rho(k)$ für alle einzelnen Werte des ρ, sobald k keine Trigonalzahl ist.

Ist hingegen k der Trigonalzahl $\frac{t^2+t}{2}$, $t \geqq 0$, gleich, so wird $y_\rho(k)$ durch die Determinante

$$y_\rho(k)=$$

$$=\begin{vmatrix} \xi_0^0-\xi_1^0, & \xi_0^1-\xi_1^1 & \ldots \xi_0^{\rho-1}-\xi_1^{\rho-1}, & 0, & \xi_0^{\rho+1}-\xi_1^{\rho+1} & \ldots \xi_0^t-\xi_1^t \\ \xi_1^0-\xi_2^0, & \xi_1^1-\xi_2^1 & \ldots \xi_1^{\rho-1}-\xi_2^{\rho-1}, & 0, & \xi_1^{\rho+1}-\xi_2^{\rho+1} & \ldots \xi_1^t-\xi_2^t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{t-2}^0-\xi_{t-1}^0, & \xi_{t-2}^1-\xi_{t-1}^1 & \ldots \xi_{t-2}^{\rho-1}-\xi_{t-1}^{\rho-1}, & 0, & \xi_{t-2}^{\rho+1}-\xi_{t-1}^{\rho+1} & \ldots \xi_{t-2}^t-\xi_{t-1}^t \\ \xi_{t-1}^0-\xi_t^0, & \xi_{t-1}^1-\xi_t^1 & \ldots \xi_{t-1}^{\rho-1}-\xi_t^{\rho-1}, & (-1)^t, & \xi_{t-1}^{\rho+1}-\xi_t^{\rho+1} & \ldots \xi_{t-1}^t-\xi_t^t \end{vmatrix}$$

---

[1] Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen. Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 21, S. 13.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. CVI, Abth. II. a, S. 121.

dargestellt, wobei die Größen ξ_h^σ für alle positiven Werte σ und h durch die Gleichung

$$\xi_h^\sigma = \sum_{\lambda=0,1,2,\ldots} \binom{\sigma}{h+2\lambda}\binom{h+2\lambda}{\lambda}$$

definiert sind, in welcher Summe λ die positive Zahlenreihe von 0 an so weit zu durchlaufen hat, bis die Summe von selbst abbricht.«

Um nun die Jacobi'sche Formel zu beweisen, berechnen wir in dem Producte

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^3$$

die Coefficienten von x^k; derselbe hängt offenbar von den additiven Erzeugungen der Zahl k ab, wobei jedes Element bis zu dreimal verwendet werden darf; kommt nun ein bestimmtes Element n in der betreffenden Darstellung von k thatsächlich dreimal vor, so sind alle drei zur Verfügung stehenden Potenzen x^n des Factors $(1-x^n)^3$ bei der Erzeugung des Exponenten k verwendet worden; kommt es zweimal vor, so sind in zweien derselben die Potenzen x^n, im dritten hingegen die Einheit multipliciert worden, was auf drei verschiedene Arten möglich ist; kommt endlich der Summand n einfach vor, so ist in zwei Factoren die Einheit, im dritten die Potenz x^n als Factor verwendet worden, was wieder auf drei Arten, je nach der Auswahl der Factoren, möglich ist. Gibt es also in der betreffenden Darstellung von k ρ Summanden, welche weniger oft als dreimal (d. h. einmal oder zweimal) vorkommen, so trägt diese Darstellung zum Coefficienten von x^k offenbar den Betrag $3^\rho y_\rho(k)$ bei, wenn $y_\rho(k)$ den Überschuss der geraden über die ungeraden derartigen Darstellungen bezeichnet; denn für jeden einzelnen dieser ρ Summanden liegen drei verschiedene Möglichkeiten bezüglich der Multiplication der Factoren des unendlichen Productes vor.

Der Coefficient von x^k beträgt daher

$$\sum_{\rho=0,1,2,\ldots} 3^\rho y_\rho(k).$$

Man sieht aus diesem Ausdrucke unmittelbar ein, dass dieser Coefficient in allen Fällen, wo k keine Trigonalzahl ist, verschwindet, da unter dieser Voraussetzung für alle Werte ρ auf Grund des oben angeführten Satzes $y_\rho(k) = 0$ ist.

Im Falle k der Trigonalzahl $\frac{t^2+t}{2}$, $t \geqq 0$, gleich ist, findet man mit Benützung des Werthes von $y_\rho(k)$

$$\sum_\rho 3^\rho y_\rho(k) = (-1)^t \begin{vmatrix} \xi_0^0 - \xi_1^0, & \xi_0^1 - \xi_1^1 & \ldots & \xi_0^t - \xi_1^t \\ \xi_1^0 - \xi_2^0, & \xi_1^1 - \xi_2^1 & \ldots & \xi_1^t - \xi_2^t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{t-1}^0 - \xi_t^0, & \xi_{t-1}^1 - \xi_t^1 & \ldots & \xi_{t-1}^t - \xi_t^t \\ 3^0, & 3^1 & \ldots & 3^t \end{vmatrix}.$$

Um den Wert dieser Determinante zu bestimmen, addieren wir zu jeder Zeile alle folgenden mit Ausnahme der letzten Zeile und bemerken, dass ξ_μ^λ seiner Definition nach für $\lambda > \mu$ verschwindet, für $\lambda = \mu$ aber den Wert 1 hat; es ergibt sich dann:

$$\sum_\rho 3^\rho y_\rho(k) = (-1)^t \begin{vmatrix} \xi_0^0, & \xi_0^1 & \ldots & \xi_0^{t-1}, & \xi_0^t - 1 \\ \xi_1^0, & \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^{t-1}, & \xi_1^t - 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{t-1}^0, & \xi_{t-1}^1 & \ldots & \xi_{t-1}^{t-1}, & \xi_{t-1}^t - 1 \\ 3^0, & 3^1 & \ldots & 3^{t-1}, & 3^t \end{vmatrix}.$$

Es besteht nun folgende Relation:

$$\xi_0^\rho + 2\xi_1^\rho + 2\xi_2^\rho + \ldots + 2\xi_\rho^\rho = 3^\rho.$$

Denn aus der Definitionsgleichung für die Grössen ξ_h^τ erkennt man, dass ξ_h^ρ die Bedeutung hat, auf wie viele Arten man ρ Summanden mit den Werten 0, +1, —1 belegen kann, um jedesmal die Summe h zu erhalten; durch Vertauschung der Vorzeichen erkennt man, dass man auf genau ebensoviele Arten die Summe $-h$ erhalten kann, so dass also die linke Seite dieses Ausdruckes die Anzahl bezeichnet, auf wie viele Arten man ρ Summanden überhaupt mit den Werten 0, +1, —1 belegen kann. welche Anzahl offenbar gleich 3^ρ ist.

Subtrahiert man daher in der erhaltenen Determinante von der letzten Zeile die erste Zeile einfach, die zweite bis vorletzte Zeile aber nach Multiplication mit 2, so verschwinden alle Elemente der letzten Zeile bis auf das letzte; dieses nimmt den Wert an:

$$3^t-\xi_0^t-2(\xi_1^t+\xi_2^t+\ldots+\xi_{t-1}^t)+2t-1=$$
$$=3^t-\xi_0^t-2(\xi_1^t+\xi_2^t+\ldots+\xi_t^t)+2t+1=2t+1.$$

Da ferner unterhalb der Diagonale in der Determinante sämmtliche Elemente gleich Null sind, die Diagonalelemente aber mit Ausnahme des letzten sämmtlich gleich 1, so folgt als Wert des gesuchten Coefficienten von $x^{-\frac{t^2+t}{2}}$:

$$(-1)^t(2t+1),$$

womit der Beweis des Jacobi'schen Satzes erbracht ist. Der Satz gewinnt dadurch an Bedeutung, dass sich aus ihm, wie Jacobi es gethan hat, in sehr einfacher Weise die Thatsache folgern lässt, dass jede ganze Zahl als Summe von vier Quadraten darstellbar ist.

II.

Es bezeichne $\{n\}^h$ den Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden Darstellungen der ganzen positiven Zahl n durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen die Summe der modulo 5 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden den Wert h hat.

Wir wollen eine solche Darstellung der Zahl $k+h$ ins Auge fassen und von jedem Element seinen absolut kleinsten Rest (mod. 5) subtrahiert denken. Hiebei gehen die etwa in der betreffenden Darstellung vorkommenden Elemente 1 und 2 vollständig unter, weil sie ihren eigenen absolut kleinsten Resten (mod. 5) gleich sind. Aus den übrigen Darstellungselementen hingegen werden lauter durch 5 theilbare ganze Zahlen, deren jede, z. B. $5m$, aus 5 verschiedenen Elementen, nämlich $5m-2$, $5m-1$, $5m$, $5m+1$, $5m+2$ hervorgehen kann. Wir erhalten also durch den angedeuteten Process aus

jeder Darstellung der Zahl $k+h$ eine additive Erzeugung der Zahl k aus lauter durch 5 theilbaren ganzen Zahlen, deren jede bis zu fünfmal auftreten kann. Der Kürze halber wollen wir dieselbe als reducierte Darstellung bezeichnen.

Wir gehen nun umgekehrt von einer solchen reducierten Darstellung der Zahl k aus, und zwar sollen in ihr α Elemente einfach, β doppelt, γ dreifach, δ vierfach und ε fünffach enthalten sein; es entsteht die Frage, aus wie vielen der Darstellungen von $k+h$ durch lauter verschiedene Elemente mit der Restsumme h diese reducierte Darstellung durch den oben angegebenen Process entstanden gedacht werden kann. Hiebei müssen wir beachten, ob die betreffenden Darstellungen keines der Elemente 1 und 2 oder nur das Element 1, aber nicht das Element 2, oder das Element 2, aber nicht das Element 1, oder endlich beide Elemente 1 und 2 enthalten.

Nehmen wir an, es bezeichne

$$\zeta_h^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon}$$

aus wie vielen Darstellungen der Zahl $k+h$ ohne Elemente 1 und 2 mit der Restsumme h die betreffende reducierte Darstellung von k durch obigen Process entstanden gedacht werden kann, so ist zunächst einleuchtend, dass diese Anzahl nur von den Werten α, β, γ, δ, ε und h abhängig ist, nicht aber von den Beträgen der in der betreffenden reducierten Darstellung sich vorfindenden, durch 5 theilbaren Elemente. Ferner sieht man, dass

$$\zeta_h^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon} = \zeta_{-h}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon}$$

ist, so dass es also nur auf den absoluten Betrag des h ankommt; denn man kann offenbar jeder Darstellung von $k+h$ mit der Restsumme h eine solche von $k-h$ mit der Restsumme $-h$ zuordnen, wenn man die absolut kleinsten Reste der einzelnen Elemente mit dem negativen Zeichen versieht, d. h. von jedem Elemente seinen doppelten absolut kleinsten Rest (mod. 5) subtrahiert. Die Elemente 1 und 2, welche dies nicht gestatten würden, sind bei den jetzt in Betracht gezogenen Darstellungen ja ausgeschlossen. Dieser neuen Darstellung ist dann dieselbe reducierte Darstellung von k zugeordnet.

Bezeichnet also ferner $g^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}(k)$ den Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden reducierten Darstellungen von k mit α einfachen, β doppelten, γ dreifachen, δ vierfachen und ε fünffachen Elementen, so bedeutet

$$g^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}(k)\,\zeta_{|h|}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon} \tag{1}$$

den Überschuss der geraden über die ungeraden Darstellungen der Zahl $k+h$ durch lauter verschiedene Summanden (ohne Verwendung von 1 und 2) mit der Restsumme h, aus welchen diese reducierten Darstellungen der Zahl k auf Grund des obigen, in der Subtraction der absolut kleinsten Reste der Elemente von diesen Elementen bestehenden Processes entstanden gedacht werden können.

Zweitens wollen wir untersuchen, aus wie vielen ursprünglichen Darstellungen von $k+h$ mit dem Elemente 1, aber ohne das Element 2 dieselbe reducierte Darstellung von k hervorgeht. Da das Element 1 bei obigem Processe verschwindet und die Restsumme der übrigen Elemente $h-1$ beträgt, so können wir die Frage sofort auf den eben behandelten Fall zurückführen. Weil aber durch Hinzufügung des Elementes 1 jede gerade Darstellung in eine ungerade, und umgekehrt, übergeführt wird, so erhalten wir als Gesammtüberschuss dieser zweiten Art von ursprünglichen Darstellungen den Ausdruck

$$-g^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}(k)\,\zeta_{|h-1|}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}. \tag{2}$$

Analog erhalten wir als Gesammtüberschuss der geraden über die ungeraden ursprünglichen Darstellungen von $k+h$ ohne Element 1, aber mit dem Elemente 2, welche gleichfalls dieselben reducierten Darstellungen liefern, den Ausdruck:

$$-g^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}(k)\,\zeta_{|h-2|}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}. \tag{3}$$

Fragen wir uns endlich nach denjenigen ursprünglichen Darstellungen von $k+h$, welche sowohl das Element 1, als auch das Element 2 enthalten und dieselben reducierten Darstellungen von k liefern, so sieht man leicht ein, da bei diesen Darstellungen die Restsumme der übrigen Elemente $h-3$ beträgt und das Hinzutreten der beiden Elemente 1 und 2 an

dem Umstande, ob eine Darstellung gerade oder ungerade ist, nichts ändert, dass der gesuchte Gesammtüberschuss der geraden über die ungeraden Darstellungen durch

$$g^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon}(k)\,\zeta_{|h-3|}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon} \tag{4}$$

ausgedrückt wird. Durch Addition der Beträge (1) bis (4) finden wir also den Überschuss der Anzahlen aller geraden über die aller ungeraden ursprünglichen Darstellungen von $k+h$ mit der Restsumme h, welche reducierte Darstellungen mit α einfachen, β doppelten, γ dreifachen, δ vierfachen und ε fünffachen Elementen liefern, gleich dem Ausdrucke:

$$g^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon}(k)\left\{\zeta_{|h|}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon} - \zeta_{|h-1|}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon} - \zeta_{|h-2|}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon} + \zeta_{|h-3|}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon}\right\}.$$

Da sich dieser Ausdruck nicht ändert, wenn man in demselben h mit $-(h-3)$ vertauscht, indem dann die unteren Indices rechts in

$$|-h+3|,\ |-h+2|,\ |-h+1|,\ |-h|$$

oder also in

$$|h-3|,\ |h-2|,\ |h-1|,\ |h|$$

übergehen, so erkennt man leicht, dass wir uns dieselben reducierten Darstellungen auch aus den ursprünglichen Darstellungen der Zahl $k-(h-3)$ mit der Restsumme $-(h-3)$ entstanden denken können, dass also die Gleichung besteht:

$$\{k+h\}^{h} = \{k-(h-3)\}^{-(h-3)}. \tag{a}$$

Unter den in der Anzahldifferenz $\{k\}^h$ gezählten Darstellungen betrachten wir nun diejenigen, in denen das Element 3 nicht vorkommt, und es bezeichne $\{k\}^h_{(3)}$ den Überschuss der geraden über die ungeraden derartigen Darstellungen ohne Element 3.

Dann besteht, wie unmittelbar einzusehen ist, die Relation

$$\{k\}^{h} = \{k\}^{h}_{(3)} - \{k-3\}^{h+2}_{(3)}, \tag{b}$$

da im Falle des Vorkommens des Elementes 3 die Restsumme der übrigen $h+2$ betragen muss. Wir können uns also auf die Betrachtung der Darstellungen ohne Element 3 beschränken.

Mit diesen letzteren verfahren wir nun in der Art, dass wir zu jedem Darstellungselemente seinen dreifachen absolut kleinsten Rest (modulo 5) addieren; dass wir also zu den Elementen:

1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

bezüglich

+3, +6, —3, 0, +3, +6, —6, —3, 0, +3, +6, —6, —3, 0

addieren, wodurch diese Elemente übergehen in

4, 8, 1, 5, 9, 13, 2, 6, 10, 14, 18, 7, 11, 15,

so dass sich also wieder alle ganzen Zahlen mit Ausnahme der Zahl 3 vorfinden. Überdies haben die neu entstandenen Elemente, wie man sofort sieht, die negativen absolut kleinsten Reste derjenigen, aus denen sie entstanden sind, selbst zu absolut kleinsten Resten (mod. 5). Es wird daher jeder Darstellung der Zahl k mit der Restsumme h eine solche von $k+3h$ mit der Restsumme $-h$ und der gleichen Elementenzahl zugeordnet, so dass die Beziehung besteht:

$$\{k\}^{h}_{(3)} = \{k+3h\}^{-h}_{(3)}. \qquad (c)$$

Mit Hilfe dieser drei Formeln *(a)*, *(b)*, *(c)* lassen sich nun Recursionsformeln für $\{k\}^h$ aufstellen.

Zunächst geht *(a)* auf Grund von *(b)* über in:

$$\{k+h\}^{h}_{(3)} - \{k+h-3\}^{h+2}_{(3)} = \{k-(h-3)\}^{-(h-3)}_{(3)} - \{k-h\}^{-(h-5)}_{(3)}.$$

Die Gleichung *(c)* liefert, wenn man darin h durch $-h$ ersetzt:

$$\{k\}^{-h}_{(3)} = \{k-3h\}^{h}_{(3)},$$

so dass die eben gefundene Gleichung sich auch schreiben lässt:

$$\begin{aligned}\{k+h\}^{h}_{(3)} - \{k+h-3\}^{h+2}_{(3)} &\\ = \{k-4(h-3)\}^{h-3}_{(3)} &- \{k-h-3(h-5)\}^{h-5}_{(3)}\\ = \{k-4h+12\}^{h-3}_{(3)} &- \{k-4h+15\}^{h-5}_{(3)}\end{aligned}$$

und mit Berücksichtigung von *(b)*

$$\{k+h\}^{h} = -\{k-4h+15\}^{h-5}$$

oder, wenn wir $k+h$ durch k ersetzen:

$$\{k\}^{h} = -\{k-5h+15\}^{h-5} = -\{k-5(h-3)\}^{h-5}. \qquad (\alpha)$$

Setzt man hierin $h+5$ statt h, so ergibt sich:

$$\{k\}^{h+5} = -\{k-5h-10\}^{h}$$

und, wenn man diese Gleichung umkehrt und statt $k-5h-10$ wieder k einführt:

$$\{k\}^{h} = -\{k+5h+10\}^{h+5} = -\{k+5(h+2)\}^{h+5}. \qquad (\beta)$$

Auf Grund der beiden Formeln (α) und (β) können wir nun Formeln zur Berechnung von $\{k\}^{h}$ ableiten.

Bei positivem h liefert nämlich (α) successive:

$$\begin{aligned}\{k\}^{h} &= -\{k-5h+15\}^{h-5}\\ &= \{k-5h-5(h-5)+2.15\}^{h-10}\\ &= \dots\\ &= (-1)^{\tau}\{k-5h-5(h-5)-\dots-5(h-\overline{\tau-1}.5)+\tau.15\}^{h-5\tau}\\ &= (-1)^{\tau}\left\{k-5\tau h+25\,\frac{\tau(\tau-1)}{2}+15\tau\right\}^{h-5\tau}\\ &= (-1)^{\tau}\left\{k-5\tau\left[h-\frac{5\tau+1}{2}\right]\right\}^{h-5\tau}. \qquad (A)\end{aligned}$$

Bei negativem h aber erhalten wir auf Grund von (β)

$$\begin{aligned}\{k\}^{h} &= -\{k+5h+10\}^{h+5}\\ &= \{k+5h+5(h+5)+20\}^{h+10}\\ &= \dots\\ &= (-1)^{\tau}\{k+5h+5(h+5)+\dots+5(h+\overline{\tau-1}.5)+10\tau\}^{h+5\tau}\\ &= (-1)^{\tau}\left\{k+5\tau h+25\,\frac{\tau(\tau-1)}{2}+10\tau\right\}^{h+5\tau}\\ &= (-1)^{\tau}\left\{k+5\tau\left[h+\frac{5\tau-1}{2}\right]\right\}^{h+5\tau}, \qquad (B)\end{aligned}$$

welche Formel auch aus *(A)* durch Verwandlung von τ in $-\tau$ hervorgegangen wäre. Diese beiden Formeln *(A)* und *(B)* gestatten nun, sämmtliche Anzahldifferenzen $\{k\}^h$ für beliebige h auf die Anzahldifferenzen $\{k\}^0$, $\{k\}^1$, $\{k\}^2$, $\{k\}^{-2}$ und $\{k\}^{-1}$ zu reducieren. Im folgenden kann τ sowohl eine positive, als auch eine negative ganze Zahl bezeichnen. Es ergibt sich:

Für $h = 5\tau$, $\tau = \frac{h}{5}$

$$\{k\}^h = (-1)^{\frac{h}{5}}\left\{k - h\left(h - \frac{h+1}{2}\right)\right\}^0 = (-1)^{\frac{h}{5}}\left\{k - \frac{h(h-1)}{2}\right\}^0;$$

für $h = 5\tau + 1$, $\tau = \frac{h-1}{5}$

$$\{k\}^h = (-1)^{\frac{h-1}{5}}\left\{k - (h-1)\left(h - \frac{h}{2}\right)\right\}^1 =$$

$$= (-1)^{\frac{h-1}{5}}\left\{k - \frac{h(h-1)}{2}\right\}^1;$$

für $h = 5\tau + 2$, $\tau = \frac{h-2}{5}$

$$\{k\}^h = (-1)^{\frac{h-2}{5}}\left\{k - (h-2)\left(h - \frac{h-1}{2}\right)\right\}^2 =$$

$$= (-1)^{\frac{h-2}{5}}\left\{k - \frac{(h-2)(h+1)}{2}\right\}^2;$$

für $h = 5\tau - 2$, $\tau = \frac{h+2}{5}$

$$\{k\}^h = (-1)^{\frac{h+2}{5}}\left\{k - (h+2)\left(h - \frac{h+3}{2}\right)\right\}^{-2} =$$

$$= (-1)^{\frac{h+2}{5}}\left\{k - \frac{(h+2)(h-3)}{2}\right\}^{-2};$$

für $h = 5\tau - 1$, $\tau = \frac{h+1}{5}$

$$\{k\}^h = (-1)^{\frac{h+1}{5}} \left\{ k - (h+1)\left(h - \frac{h+2}{2}\right) \right\}^{-1} =$$

$$= (-1)^{\frac{h+1}{5}} \left\{ k - \frac{(h+1)(h-2)}{2} \right\}^{-1}.$$

Der Legendre'sche Satz, welcher besagt, dass jede ganze Zahl, welche keine Pentagonalzahl ist, sich auf gleich viele Arten als Summe einer geraden, wie einer ungeraden Anzahl von verschiedenen Summanden darstellen lässt, während für die Pentagonalzahl $k = \frac{3t^2 \pm t}{2}$ der Überschuss der geraden über die ungeraden Darstellungen $(-1)^t$ beträgt, lässt sich in der Form schreiben:

$$\sum_h \{k\}^h = \begin{cases} 0 \text{ im allgemeinen} \\ (-1)^t \text{ für } k = \frac{3t^2 \pm t}{2}, \end{cases}$$

wo die Summe über alle zulässigen Werte h zu erstrecken ist, welche offenbar sämmtlich der Zahl k modulo 5 congruent sein müssen. Die zuletzt aufgestellten Formeln ergeben sonach folgende Recursionsformeln zur Berechnung der Werte $\{k\}^0$, $\{k\}^1$, $\{k\}^2$, $\{k\}^{-2}$, $\{k\}^{-1}$:

$k \equiv 0 \pmod{5}$
$$\sum_{h \equiv 0 \pmod{5}} (-1)^{\frac{h}{5}} \left\{ k - \frac{h(h-1)}{2} \right\}^0 =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ im allgemeinen.} \\ (-1)^t \text{ für } k = \frac{3t^2 \pm t}{2}. \end{cases}$$

$k \equiv 1 \pmod{5}$
$$\sum_{h \equiv 1 \pmod{5}} (-1)^{\frac{h-1}{5}} \left\{ k - \frac{h(h-1)}{2} \right\}^1 =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ im allgemeinen.} \\ (-1)^t \text{ für } k = \frac{3t^2 \pm t}{2}. \end{cases}$$

$k \equiv 2 \pmod{5}$ $\sum_{h \equiv 2 \pmod{5}} (-1)^{\frac{h-2}{5}} \left\{k - \frac{(h-2)(h+1)}{2}\right\}^2 =$

$$= \begin{cases} 0 \text{ im allgemeinen.} \\ (-1)^t \text{ für } k = \frac{3t^2 \pm t}{2}. \end{cases}$$

$k \equiv -2 \pmod{5}$ $\sum_{h \equiv -2 \pmod{5}} (-1)^{\frac{h+2}{5}} \left\{k - \frac{(h+2)(h-3)}{2}\right\}^{-2} =$

$$= \begin{cases} 0 \text{ im allgemeinen.} \\ (-1)^t \text{ für } k = \frac{3t^2 \pm t}{2}. \end{cases}$$

$k \equiv -1 \pmod{5}$ $\sum_{h \equiv -1 \pmod{5}} (-1)^{\frac{h+1}{5}} \left\{k - \frac{(h+1)(h-2)}{2}\right\}^{-1} =$

$$= \begin{cases} 0 \text{ im allgemeinen.} \\ (-1)^t \text{ für } k = \frac{3t^2 \pm t}{2}. \end{cases}$$

Die Summen sind über alle diejenigen, der Congruenzbedingung genügenden positiven und negativen Werte h zu erstrecken, für welche die in der Klammer stehende Zahl nicht negativ ausfällt.

Diese Formeln gestatten eine successive Berechnung der Werte $\{k\}^0$, $\{k\}^1$, $\{k\}^2$, $\{k\}^{-2}$, $\{k\}^{-1}$, durch welche dann auf Grund des früheren Formelsystemes zugleich alle anderen Werte $\{k\}^h$ gegeben sind.

Ein Beispiel möge die Anwendung dieser Recursionsformeln erläutern. Es soll die Anzahldifferenz

$$\{165\}^{15}$$

bestimmt werden, d. i. die Differenz der Anzahlen der geraden und ungeraden Darstellungen von 165 durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen die Summe der modulo 5 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden 15 beträgt.

Zunächst erhalten wir:

$$\{165\}^{15} = (-1)^{\frac{15}{5}} \left\{165 - \frac{15 \cdot 14}{2}\right\}^0 = -\{60\}^0.$$

Es kommt also auf die Berechnung von $\{60\}^0$ an. Hiezu müssen wir uns zunächst die Reihe der Zahlen $\frac{h(h-1)}{2}$ für positive und negative durch 5 theilbare h bilden:

$$h = 0, \quad 5, \quad -5, \quad 10, \quad -10, \quad 15, \quad -15 \ldots$$

$$\frac{h(h-1)}{2} = 0, \quad 10, \quad 15, \quad 45, \quad 55, \quad 105, \quad 120 \ldots$$

Die erste unserer Recursionsformeln liefert also folgende Beziehungen:

$$\{0\}^0 = 1 \qquad 0 = \frac{3.0^2-0}{2}$$

$$\{5\}^0 = 1 \qquad 5 = \frac{3.2^2-2}{2}$$

$$\{10\}^0 - \{0\}^0 = 0$$

$$\{15\}^0 - \{5\}^0 - \{0\}^0 = -1 \qquad 15 = \frac{3.3^2+3}{2}$$

$$\{20\}^0 - \{10\}^0 - \{5\}^0 = 0$$

$$\{25\}^0 - \{15\}^0 - \{10\}^0 = 0$$

$$\{30\}^0 - \{20\}^0 - \{15\}^0 = 0$$

$$\{35\}^0 - \{25\}^0 - \{20\}^0 = -1 \qquad 35 = \frac{3.5^2-5}{2}$$

$$\{40\}^0 - \{30\}^0 - \{25\}^0 = -1 \qquad 40 = \frac{3.5^2+5}{2}$$

$$\{45\}^0 - \{35\}^0 - \{30\}^0 + \{0\}^0 = 0$$

$$\{50\}^0 - \{40\}^0 - \{35\}^0 + \{5\}^0 = 0$$

$$\{55\}^0 - \{45\}^0 - \{40\}^0 + \{10\}^0 + \{0\}^0 = 0$$

$$\{60\}^0 - \{50\}^0 - \{45\}^0 + \{15\}^0 + \{5\}^0 = 0,$$

aus welchen sich successive: $\{0\}^0 = 1$, $\{5\}^0 = 1$, $\{10\}^0 = 1$, $\{15\}^0 = 1$, $\{20\}^0 = 2$, $\{25\}^0 = 2$, $\{30\}^0 = 3$, $\{35\}^0 = 3$, $\{40\}^0 = 4$, $\{45\}^0 = 5$, $\{50\}^0 = 6$, $\{55\}^0 = 7$, $\{60\}^0 = 9$ ergibt. Es ist also die gesuchte Anzahldifferenz

$$\{165\}^{15} = -\{60\}^0 = -9.$$

Es wäre wohl sehr umständlich, diese Anzahldifferenz durch wirkliche Herstellung aller additiven Erzeugungen von 165 zu ermitteln.

Zum Schlusse sei bemerkt, dass mit Hilfe der vorstehenden Formeln auch folgende scheinbar allgemeinere Aufgabe gelöst werden kann: Es ist die Anzahldifferenz derjenigen geraden und ungeraden Darstellungen der Zahl k durch die Elemente

$$ma, ma \pm n, ma \pm 2n$$

anzugeben (wobei a und n gegebene, der Bedingung $a > 4n$ genügende ganze positive Zahlen sind, m aber beliebig ist), in welchen die Summe der modulo a gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden nh beträgt. Diese Anzahldifferenz ist nämlich, wie eine ganz einfache Überlegung zeigt, durch

$$\left\{\frac{5}{a}(k-nh)+h\right\}^h$$

gegeben und kommt somit dieser allgemeinere Fall auf den oben behandelten Specialfall $a = 5$, $n = 1$ zurück.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

IV. SITZUNG VOM 1. FEBRUAR 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. I, Heft VI und VII (Juni und Juli 1899).

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt das im Auftrage Sr. k. und k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserlichen Akademie, durch die Buchdruckerei H. Mercy in Prag eingesendete Druckwerk: »Bougie, die Perle Nord-Afrikas« vor.

Ferner überreicht der Secretär folgende eingelangte Abhandlungen:

I. Von Herrn Prof. J. Zehenter eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsoberrealschule in Innsbruck, betitelt: »Über das Verhalten des Uranylacetats und einiger seiner Doppelsalze zu Wasser«.

II. Von Herrn Leo Brenner, Director der Manora-Sternwarte in Lussinpiccolo, eine Abhandlung unter dem Titel: »Jupiter-Beobachtungen an der Manora-Sternwarte 1896—1898«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Leo Wessely: »Über ein Aldol aus Isobutyr- und Formaldehyd«.

Das w. M. Herr Hofrath L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung: »Über Longitudinalschwingungen in Stäben«, von Herrn Prof. Dr. Gustav Jäger.

Derselbe überreicht ferner ein Abhandlung: »Über die elektrische Leitfähigkeit von gepressten Pulvern. I. Mittheilung: Die Leitfähigkeit von Platinmohr, amorpher Kohle und Graphit«, von Herrn Dr. Franz Streintz in Göttingen.

Das w. M. Herr Director E. Weiss spricht über die Reiseroute und den Verlauf der von der kaiserlichen Akademie entsendeten Expedition zur Beobachtung der Leoniden und Bieliden.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt die XVIII. Mittheilung der in Gemeinschaft mit Herrn Dr. E. Haschek ausgeführten Untersuchung: »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente« vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

S. A. le Prince Albert de Monaco, Carte bathymétrique des Isles Açores. 1899.

Löschner, Dr., Der Gießhübler Sauerbrunn in Böhmen, die König Otto-Quelle genannt. Karlsbad, 1860. 8°.

V. SITZUNG VOM 8. FEBRUAR 1900.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXI, Heft 1 (Jänner 1900).

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, bringt die folgende vom k. und k. Ministerium des k. und k. Hauses und des Äußern an das hohe Curatorium der kaiserlichen Akademie gerichtete Note zur Kenntnis:

Seine k. und k. Apostolische Majestät haben auf Grund eines vom k. und k. Ministerium des Äußern erstatteten allerunterthänigsten Vortrages mit Allerhöchster Entschließung vom 20. Jänner d. J. dem Großindustriellen und Dampfschiffahrtsbesitzer in Stockholm F. G. Althainz das Comthurkreuz, dem Schiffsmakler in Stockholm Emil R. Boman und dem schwedischen Schiffscapitän E. Rosengren das Ritterkreuz des Franz Josef-Ordens und dem schwedischen ersten Steuermann W. Olsson das goldene Verdienstkreuz, schließlich dem Native-Assistent des Gouverneurs von Aden, Mohammed Salih Gaafar, welcher der im vorigen Jahre zur Erforschung von Südarabien und Sokotra unter Leitung des k. k. Universitäts-Professors Dr. D. H. Müller unternommenen österreichischen wissenschaftlichen Expedition wesentliche Dienste geleistet hat, das Ritterkreuz des Franz Josef-Ordens allergnädigst zu verleihen geruht.

Herr Dr. E. Palla spricht für die Bewilligung der Subvention zu einer wissenschaftlichen Reise nach Buitenzorg im Jahre 1900 den Dank aus.

Das c. M. Herr Prof. K. Exner in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Zur Beziehung zwischen den atmosphärischen Strömungen und der Scintillation«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann übersendet eine im III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit: »Über Chlor-*m*-Phenylendiamin«, von Dr. Paul Cohn und Dr. Armin Fischer.

Das w. M. Herr Oberbergrath Edm. v. Mojsisovics überreicht zwei für die »Mittheilungen der Erdbeben-Commission« in den Sitzungsberichten bestimmte Arbeiten, und zwar:

XV. »Bericht über Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster«, von Prof. P. Franz Schwab, Referenten der Erdbeben-Commission.

XVI. »Bericht über das niederösterreichische Beben vom 11. Juni 1899«, von Prof. Dr. Franz Noë, Referenten der Erdbeben-Commission.

Das w. M. Herr Hofrath L. Boltzmann legt die folgenden im physikalischen Institute der Universität Innsbruck ausgeführten Experimentaluntersuchungen vor:

1. »Untersuchungen über permanente Magnete. III, Studien über die Constanz permanenter Magnete«, von Herrn Prof. Dr. Ignaz Klemenčič in Innsbruck.
2. »Über die Änderung des Momentes eines Magnetes durch Erschütterung, sowie durch Abreißen und Abziehen von weichem Eisen«, von Herrn Karl Krüse.
3. »Über die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten eines Magnetes vom Momente«, von Herrn Max Prodinger.
4. »Über eine neue Methode zur Bestimmung von Geschossgeschwindigkeiten«, von Herrn Dr. Michael Radaković.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Observatoires de Paris, 20 cartes photographiques du ciel.

VI. SITZUNG VOM 15. FEBRUAR 1900.

Herr G. Alexander in Wien dankt für die ihm zur Fortsetzung und Beendigung seiner wissenschaftlichen Arbeit: »Über Entwicklung und Bau der Pars inferior labyrinthi der Säugethiere« gewährte Subvention.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt eine Abhandlung von Herrn k. und k. Generalmajor Karl Kržiwanek in Innsbruck vor, betitelt: »Die Ursache der Präcession«.

Das w. M. Herr Hofrath J. Hann übersendet eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. Paul Czermak in Innsbruck, betitelt: »Zur Structur und Form der Hagelkörner«.

Dr. L. Réthi legt eine im physiologischen Institute zu Wien durchgeführte Untersuchung vor, betitelt: »Experimentelle Untersuchungen über die Luftströmung in der normalen Nase, sowie bei pathologischen Veränderungen derselben und des Nasenrachenraumes«.

Das w. M. Herr Oberbergrath Edm. v. Mojsisovics legt namens der Erdbeben-Commission für die »Mittheilungen« dieser Commission in den Sitzungsberichten eine Arbeit des Herrn Ed. Mazelle, Referenten der Erdbeben-Commission in Triest, vor. Dieselbe führt den Titel: »Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebeur-Ehlert'schen Horizontalpendel vom 1. März bis Ende December 1899«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Sigm. Exner legt eine im physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien von Dr. L. Mader (derzeit in München) ausgeführte Untersuchung vor, welche den Titel trägt: »Mikrophonische Studien am

schalleitenden Apparate des menschlichen Gehörorganes«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Prof. Dr. Konrad Natterer: »Über Bronzen aus Ephesus«.

Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht ferner eine Abhandlung von Dr. Ad. Jolles: »Zur quantitativen Bestimmung der Harnsäure, besonders im Harn«.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben überreicht die von Herrn Dr. A. Voeltzkow in Straßburg ihm zur geschenkweisen Übergabe an die kaiserliche Akademie übermittelten bisher erschienenen fünf Lieferungen seines Reisewerkes: »Wissenschaftliche Ergebnisse der Reisen in Madagaskar und Ostafrika in den Jahren 1889 bis 1895«, welches in den Abhandlungen der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt a. M. publiciert wird.

Derselbe theilt mit, dass sich Herr Dr. A. Voeltzkow bereit erklärt hat, auch die folgenden Lieferungen dieses Werkes der kaiserlichen Akademie zu übersenden.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Candargy P. C., Communication universelle à messieurs les savants de notre planète. Athènes, 1899. 8°.

Haberlandt G., Briefwechsel zwischen Franz Unger und Stephan Endlicher. Mit Porträts und Nachbildungen zweier Briefe. Berlin, 1899. 8°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

VII. SITZUNG VOM 1. MÄRZ 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. II. a, Heft VIII (October 1899).

Das c. M. Herr Prof. V. Uhlig in Prag spricht für die ihm gewährte Subvention zur Fortführung seiner geologischen Untersuchungen in den Central- und Westkarpathen den Dank aus.

Herr Prof. Rudolf Andreasch, an der k. k. Staatsoberrealschule in Währing (Wien), übersendet eine mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie ausgeführte Arbeit: »Über Methylviolursäure und Methyldilitursäure«, mit folgender Notiz:

Herr Dr. Leopold Freund in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität, betitelt: »Über die physikalische und physiologische Grundlage der Radiotherapie«.

Das w. M. Herr Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung des ausw. c. M., Herrn Geheimrath Prof. F. Eilh. Schulze in Berlin, betitelt: »Mittelmeer-Hexactinelliden«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann legt drei im physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeiten vor:

1. »Über Atommagnetismus und Molecularmagnetismus«, von Dr. Stefan Meyer.
2. »Bestimmung einiger Magnetisierungszahlen«, von Dr. Stefan Meyer.
3. »Weitere Beobachtungen an Becquerel-Strahlen«, von Dr. Stefan Meyer und Dr. Egon R. v. Schweidler.

Derselbe überreicht ferner eine Arbeit: »Über explosive Gasgemenge (III. Mittheilung über die Entzündlichkeit von dünnen Schichten explosiver Gasgemenge)«, von Herrn Prof. F. Emich in Graz.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Lieben überreicht eine im k. k. technologischen Gewerbemuseum ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. A. Jolles in Wien, betitelt: »Über eine schnelle und exacte Methode zum Nachweise von Quecksilber im Harne«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Cyon E., v., Ohrlabyrinth, Raumsinn und Orientierung. Bonn, 1900. 8^0.

Baker F. C., A Naturalist in Mexico being at visit on Cuba, Northern Yucatan and Mexico. With maps and illustrations. Chicago, 1895. 8^0.

Herm W., Dr., Repetitorium der Chemie für Techniker. Braunschweig, 1900. 8^0.

Le Chatelier H. et O. Boudouard, Mesure des températures élevées. Paris, 1900. 8.

Conwentz, Dr., Forstbotanisches Merkbuch. Nachweis der beachtenswerten und zu schützenden urwüchsigen Sträucher, Bäume und Bestände im Königreiche Preußen. I. Provinz Westpreußen. Mit 22 Abbildungen. (Herausgegeben auf Veranlassung des Ministers für Landwirtschaft, Domänen und Forsten. Berlin, 1900.

VIII. SITZUNG VOM 8. MÄRZ 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte: Bd. 108, Abth. II. b, Heft VIII bis X (October bis December 1899), womit der Druck dieser Abtheilung vollendet ist.

Das w. M. Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der deutschen Universität Prag ausgeführte Arbeit von Dr. Hans Meyer: »Über das Tetrabromphenolphtaleïn«.

Herr Dr. Hans Rabl, Privatdocent an der Universität und Assistent am histologischen Institute in Wien, überreicht eine mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie ausgeführte Arbeit, betitelt: »Über Bau und Entwicklung der Chromatophoren der Cephalopoden nebst allgemeinen Bemerkungen über die Haut dieser Thiere«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit der Herren A. Fischer und B. Winter: »Über die Einwirkung von Schwefelsäure auf Dimethylpropandiol«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Königl. Technische Hochschule in Berlin, Über die geschichtliche und zukünftige Bedeutung der Technik. Rede zum Geburtsfeste Seiner Majestät des Kaisers und Königs Wilhelm II. Berlin, 1900. Groß 8°.

— Rede zur Feier der Jahrhundertwende. Berlin 1900. Groß 8°.

Rogers H. R., M. Dr., The Universe, a new cosmology. — Elektricity, the universal force. — Metius, the hollander inventor and discoverer. Buffalo, 1898. 8°.

Salvatore Indraccolo, Quadratura del circolo. Problema risoluto dal sacerdote italiano S. Indraccolo. Buenos Aires, 1898.

Weinek L., Photographischer Mondatlas, vornehmlich auf Grund von focalen Negativen der Lick-Sternwarte im Maßstabe eines Monddurchmessers von 10 Fuß. Heft VIII (Tafel 141 bis 160 in Lichtdruck). Prag, 1900. Groß 4⁰.

IX. SITZUNG VOM 15. MÄRZ 1900.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXI, Heft 2 (Februar 1900).

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

I. »Beitrag zur Perspective des Kreises und anschließend zur Construction der Axen und Kreisschnitte für Flächen zweiten Grades«, von Herrn Prof. Johann Sobotka an der böhmisch-technischen Hochschule in Brünn.

II. »Zur Frage der Entstehung der Poljen«, von Herrn Dr. Friedrich Katzer in Sarajevo.

Das w. M. Herr Hofrath Zd. H. Skraup übersendet eine Abhandlung aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien: »Über die Umlagerung des Cinchonins (ein Beitrag zur Theorie der katalytischen Wirkung)«, von Rud. Wegscheider.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Einige Sätze über die reellen Wurzeln der Integrale von homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung«.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben überreicht eine Arbeit von Herrn Dr. Adolf Steuer an der k. k. zoologischen Station in Triest, betitelt: »Die Diaptomiden des Balkan, zugleich ein Beitrag zur Kenntnis des *Diaptomus vulgaris* Schmeil.«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Società meteorologica italiana, Atti del IV congresso meteorologico italiano promosso dalla Società meteorologica italiana tenuto a Torino dal 12 al 15 settembre 1898. Turin, 1899. 8°.

Einige Sätze über die reellen Wurzeln der Integrale von homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

von

Leopold Gegenbauer in Wien,
c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. März 1900.)

Sind die Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ im reellen Intervalle $x_1 \ldots x_2$ eindeutig, endlich und differentiierbar, und liegt innerhalb dieses Intervalles weder eine gemeinsame, noch eine mehrfache Wurzel derselben, so besteht bekanntlich die Relation

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \text{sign.}(f'(\xi_\lambda)f_1(\xi_\lambda)) + \sum_{\mu=1}^{\mu=s} \text{sign.}(f_1'(\eta_\mu)f(\eta_\mu)) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\text{sign.}(f(x_1)f_1(x_1)) + \frac{1}{2}\,\text{sign.}(f(x_2)f_1(x_2)), \qquad 1)$$

$$(f(x_1)f(x_2)f_1(x_1)f_1(x_2) \gtrless 0),$$

in welcher $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ alle im Intervalle $x_1 \ldots x_2$ liegenden Wurzeln von $f(x)$, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ alle demselben angehörigen Wurzeln von $f_1(x)$ vorstellen und mit sign. (α) das Vorzeichen der reellen Grösse α bezeichnet wird. Diese einfache Relation habe ich wiederholt benützt, um Sätze über die Anzahl der reellen Wurzeln von bestimmten Functionen zu beweisen. Ich verweise in dieser Beziehung beispielshalber auf die von mir gegebene Erweiterung[1] eines Satzes von Laguerre[2] über

---

[1] »Über Gleichungen, welche eine bestimmte Anzahl complexer Wurzeln besitzen.« Diese Sitzungsber., Bd. 87.

[2] »Sur la détermination d'équations numériques ayant un nombre donné de racines imaginaires.« Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris. Tome 90.

die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_x^\infty \frac{e^{x-z}\,dz}{z}$$

und auf meine zwei Beweise[1] des Klein'schen[2] Theorems über die Anzahl der zwischen 0 und 1 befindlichen Wurzeln der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Die eben erwähnten Functionen sind particuläre Integrale von speciellen homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung; es ist daher zu erwarten, dass durch Benützung der angeführten Formel auch für die Integrale der allgemeinen homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung analoge Sätze, in denen die angezogenen als specielle Fälle enthalten sind, ermittelt werden können. Dies zu zeigen ist der Zweck dieser Mittheilung, durch welche die Aufmerksamkeit auf diese noch viel zu wenig benützte Relation gelenkt werden soll.

1. Setzt man in der Gleichung 1) für $f(x)$ ein Integral $y_0(x)$ der Differentialgleichung

$$y''+p_0(x)y'+q_0(x)y = 0 \qquad 2)$$

und für $f_1(x)$ die erste Ableitung desselben, so hat man für jedes Intervall $x_1 \ldots x_2$, in welchem $p_0(x)$ und $q_0(x)$ eindeutig und endlich sind und $q_0(x)$ überdies überall dasselbe Zeichen hat, die Beziehung

$$\underset{x_1}{\overset{x_2}{\mathfrak{A}}}(y_0(x)) - \text{sign.}\,(q_0(x_1))\underset{x_1}{\overset{x_2}{\mathfrak{A}}}(y'_0(x)) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\text{sign.}(y_0(x_1)y'_0(x_1)) + \frac{1}{2}\,\text{sign.}(y_0(x_2)y'_0(x_2))$$

$$(y_0(x_1)y_0(x_2)y'_0(x_1)y'_0(x_2) \gtrless 0),$$

---

[1] »Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe.« Diese Sitzungsber., Bd. 100. — »Über die Wurzeln der hypergeometrischen Reihe.« Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 2.

[2] »Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.« Mathematische Annalen, Bd. 37.

in welcher mit $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathfrak{A}}}(\varphi(x))$ die Anzahl der im reellen Intervalle $\alpha\ldots\beta$ befindlichen Wurzeln von $\varphi(x)$ bezeichnet wird.

Ist zunächst

$$\text{sign.}\,(q_0(x_1)) = -1,$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathfrak{A}}}(y_0(x)) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathfrak{A}}}(y_0'(x)) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\text{sign.}\,(y_0(x_1)\,y_0'(x_1)) + \frac{1}{2}\,\text{sign.}\,(y_0(x_2)\,y_0'(x_2)),$$

welche folgende zwei Theoreme liefert:

In einem reellen Intervalle, in welchem die Function $q_0(x)$ negativ ist, kann weder ein Integral der Differentialgleichung

$$y'' + p_0(x)y' + q_0(x)y = 0,$$

welches an den Intervallsgrenzen nicht verschwindet, noch dessen erste ebenso beschaffene Ableitung mehr als eine Wurzel haben. Besitzt die eine von diesen zwei Functionen in einem solchen Bereiche eine Wurzel, so verschwindet die andere in demselben nicht.

Ist in einem reellen Intervalle die Function $q_0(x)$ negativ, so kann kein Integral der Differentialgleichung

$$y'' + p_0(x)y' + q_0(x)y = 0$$

an der unteren Grenze desselben mit seiner Ableitung gleich und gleichzeitig an der oberen mit derselben ungleich bezeichnet sein.

Um eine Anwendung des ersten Satzes zu geben, betrachte ich die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad (\nu \geqq 0),$$

der die Bessel'sche Function erster Art $J^{\nu}(x)$ genügt. Dieselbe kann nach diesem Satze im Intervalle $0\ldots\nu$ höchstens eine Wurzel haben. Ist z_{ν} die kleinste positive Wurzel dieser Function, so liegt, wie ich gezeigt habe,[1] in jedem positiven Intervalle von der Ausdehnung $2z_{\nu}$ mindestens eine Wurzel derselben. Wäre nun $z_{\nu} < \frac{\nu}{3}$, so befände sich zwischen z_{ν} und ν mindestens eine Wurzel von $J^{\nu}(z)$ und daher hat man den Satz:

Die kleinste positive Wurzel einer Bessel'schen Function erster Art mit positiven Index ist grösser als der dritte Theil ihres Index.

Ist

$$\text{sign.}\,(q_0(x_1)) = +1,$$

so geht die Gleichung 3) über in die folgende:

$$\underset{x_1}{\overset{x_2}{\mathfrak{A}}}(y_0(x)) = \underset{x_1}{\overset{x_2}{\mathfrak{A}}}(y_0'(x)) - \frac{1}{2}\,\text{sign.}\,(y_0(x_1)y_0'(x_1)) + \\ + \frac{1}{2}\,\text{sign.}\,(y_0(x_2)y_0'(x_2)).$$

Dieselbe gibt den Satz:

In einem reellen Intervalle, in welchem die Function $q_0(x)$ positiv ist, beträgt der absolute Wert des Unterschiedes aus der Anzahl der Wurzeln eines an den Intervallsgrenzen nicht verschwindenden Integrales der Differentialgleichung

$$y'' + p_0(x)y' + q_0(x)y = 0$$

und der Anzahl der Wurzeln seiner ebenso beschaffenen Ableitung höchstens 1. Das Integral hat in demselben um eine Wurzel mehr als seine Ableitung, wenn es mit dieser an der unteren Grenze ungleich, an der oberen aber gleich bezeichnet ist; es hat um eine Wurzel weniger als seine Ableitung, wenn es mit dieser an der unteren Grenze gleich und an der

[1] »Quelques propriétés nouvelles des racines des fonctions de Bessel de première espèce.« Mémoires de la Société des sciences de Liège. 3e série, t. II.

oberen ungleich bezeichnet ist, und es haben diese zwei Functionen in dem Intervalle gleich viele Wurzeln, wenn sie an den beiden Grenzen gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Auf Grund des Rolle'schen Theorems ergibt sich folgendes Corollar dieses Satzes:

In einem reellen Intervalle, in welchem $q_0(x)$ positiv ist, trennen sich die Wurzeln eines Integrals der Differentialgleichung

$$y'' + p_0(x) y' + q_0(x) y = 0$$

und die Wurzeln seiner ersten Ableitung gegenseitig.

Setzt man in 2) speciell

$$p_0(x) = \frac{2\nu+1}{x}, \quad q_0(x) = 1,$$

so wird

$$y_0(x) = x^{-\nu} J^{\nu}(x), \quad y_0'(x) = -x^{-\nu} J^{\nu+1}(x)$$

und man hat daher nach dem letzten Theorem den Satz:

Sowohl die positiven, als auch die negativen Wurzeln zweier Bessel'schen Functionen erster Art, deren Indices sich um eine Einheit unterscheiden, trennen sich gegenseitig.

Dieser Satz wurde erst in der jüngsten Zeit (von 1897 ab) von E. van Vleck,[1] Hobson,[2] Bôcher,[3] mir[4] und Porter[5] bewiesen.

Ein specieller Fall des eben abgeleiteten allgemeinen Theorems ist auch der folgende Satz:

---

[1] »On the Roots of Bessel- and P-Functions.« American Journal of Mathematics, 19. V.

[2] »Note on some properties of Bessels Functions.« Proceedings of the London Mathematical Society, 28. V.

[3] »On certain methods of Sturm and their application to the roots of Bessels functions«. Bulletin of the American Mathematical Society, III. V.

[4] »Bemerkung über die Bessel'schen Functionen.« Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 8.

[5] »Note on the roots of Bessels functions«. Bulletin of the American Mathematical Society, IV. V.

Die in dem positiven Intervalle $\nu \ldots \infty$ liegenden Wurzeln der zwei Gleichungen

$$J^{\nu}(x) = 0, \quad \frac{\nu J^{\nu}(x)}{J^{\nu+1}(x)} = x$$

trennen einander gegenseitig.

Da bekanntlich $J^{\nu}(x)$ $(\nu \gtreqq 0)$ unendlich viele positive Wurzeln besitzt, so hat man hiernach das Theorem:

Die transcendente Gleichung

$$\frac{\nu J^{\nu}(x)}{J^{\nu+1}(x)} = x$$

hat unendlich viele positive Wurzeln. In jedem positiven Intervalle von der Ausdehnung $4z_{\nu}$ liegt mindestens eine von diesen, wenn z_{ν} die kleinste positive Wurzel der Bessel'schen Function $J^{\nu}(x)$ vorstellt.

2. Differentiiert man die Gleichung 2) wiederholt nach x, so erhält man für die successiven Ableitungen von $y_0(x): y_{\lambda}(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ der Reihe nach die Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$y''_{\lambda} + p_{\lambda}(x) y'_{\lambda} + q_{\lambda}(x) y_{\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots),$$

wo die Functionen $p_{\lambda}(x)$ und $q_{\lambda}(x)$ durch die Recursionsformeln

$$p_{\lambda}(x) = p_{\lambda-1}(x) - \frac{q'_{\lambda-1}(x)}{q_{\lambda-1}(x)},$$

$$q_{\lambda}(x) = q_{\lambda-1}(x) \left\{ 1 + \left[\frac{p_{\lambda-1}(x)}{q_{\lambda-1}(x)} \right]' \right\}$$

definiert sind.

Ist nun in dem reellen Intervalle $x_1 \ldots x_2$ jede dieser Functionen bis $p_{\mu}(x)$, $q_{\mu}(x)$ hin endlich und überdies jedes $q_{\lambda}(x)$ stets mit demselben Zeichen behaftet, so hat man nach den obigen Entwicklungen die Gleichungen:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathfrak{A}}} (y_{\lambda}(x)) - \text{sign.}\,(q_{\lambda}(x_1)) \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathfrak{A}}} (y_{\lambda+1}(x)) =$$

$$= -\frac{1}{2} \text{sign.}\,(y_{\lambda}(x_1) y_{\lambda+1}(x_1)) + \frac{1}{2} \text{sign.}\,(y_{\lambda}(x_2) y_{\lambda+1}(x_2))$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \mu),$$

durch deren Vereinigung die Beziehung

$$\mathfrak{A}_{x_1}^{x_2}(y_0(x)) = \text{sign.}\,(q_0(x_1)\,q_1(x_1)\ldots q_\mu(x_1))\,\mathfrak{A}_{x_1}^{x_2}(y_{\mu+1}(x)) -$$
$$-\frac{1}{2}\Big\{\text{sign.}\,(y_0(x_1)y_1(x_1)) + \text{sign.}\,(q_0(x_1)\,y_1(x_1)\,y_2(x_1)) +$$
$$+\text{sign.}\,(q_0(x_1)\,q_1(x_1)y_2(x_1)y_3(x_1)) + \ldots +$$
$$+\text{sign.}\,(q_0(x_1)\,q_1(x_1)\ldots q_{\mu-1}(x_1)y_\mu(x_1)y_{\mu+1}(x_1))\Big\} +$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{\text{sign.}\,(y_0(x_2)y_1(x_2)) + \text{sign.}\,(q_0(x_2)\,y_1(x_2)\,y_2(x_2)) +$$
$$+\text{sign.}\,(q_0(x_2)\,q_1(x_2)y_2(x_2)y_3(x_2)) + \ldots +$$
$$+\text{sign.}\,(q_0(x_2)\,q_1(x_2)\ldots q_{\mu-1}(x_2)y_\mu(x_2)y_{\mu+1}(x_2))\Big\}$$

entsteht, welche sich, falls $y_{\mu+1}$ im Intervalle $x_1 \ldots x_2$ keine Wurzel besitzt, in die folgende verwandelt:

$$\mathfrak{A}_{x_1}^{x_2}(y_0(x)) = -\frac{1}{2}\Big\{\text{sign.}\,(y_0(x_1)y_1(x_1)) + \text{sign.}\,(q_0(x_1)y_1(x_1)y_2(x_1)) +$$
$$+\text{sign.}\,(q_0(x_1)\,q_1(x_1)y_2(x_1)y_3(x_1)) + \ldots +$$
$$+\text{sign.}\,(q_0(x_1)\,q_1(x_1)\ldots q_{\mu-1}(x_1)y_\mu(x_1)y_{\mu+1}(x_1))\Big\} +$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{\text{sign.}\,(y_0(x_2)y_1(x_2)) + \text{sign.}\,(q_0(x_2)y_1(x_2)y_2(x_2)) +$$
$$+\text{sign.}\,(q_0(x_2)\,q_1(x_2)y_2(x_2)y_3(x_2)) + \ldots +$$
$$+\text{sign.}\,(q_0(x_2)\,q_1(x_2)\ldots q_{\mu-1}(x_2)y_\mu(x_2)y_{\mu+1}(x_2))\Big\}.$$

Man hat daher den Satz:

Sind in einem reellen Intervalle $x_1 \ldots x_2$ die Functionen $p_0(x)$, $q_0(x)$ und die aus ihnen durch die Recursionsformeln

$$p_\lambda(x) = p_{\lambda-1}(x) - \frac{q'_{\lambda-1}(x)}{q_{\lambda-1}(x)},$$

$$q_\lambda(x) = q_{\lambda-1}(x)\left\{1 + \left[\frac{p_{\lambda-1}(x)}{q_{\lambda-1}(x)}\right]'\right\} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \mu)$$

abgeleiteten eindeutig und endlich und behält überdies jede der Functionen $q_\lambda(x)$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \mu)$ in demselben stets das gleiche Zeichen, so hat ein Integral der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + p_0(x)y' + q_0(x)y = 0,$$

dessen $(\mu+1)^{\text{te}}$ Ableitung in diesem Intervalle keine Wurzel besitzt, in demselben

$$\frac{1}{2}\Big\{\text{sign.}\,(y_0(x_2)y_0'(x_2)) + \text{sign.}\,(q_0(x_2)y_0'(x_2)y_0''(x_2)) +$$
$$+ \text{sign.}\,(q_0(x_2)q_1(x_2)y_0''(x_2)y_0'''(x_2)) + \ldots +$$
$$+ \text{sign.}\,(q_0(x_2)q_1(x_2)\ldots q_{\mu-1}(x_2)y_0^{(\mu)}(x_2)y_0^{(\mu+1)}(x_2))\Big\} -$$
$$- \frac{1}{2}\Big\{\text{sign.}\,(y_0(x_1)y_0'(x_1)) + \text{sign.}\,(q_0(x_1)y_0'(x_1)y_0''(x_1)) +$$
$$+ \text{sign.}\,(q_0(x_1)q_1(x_1)y_0''(x_1)y_0'''(x_1)) + \ldots +$$
$$+ \text{sign.}\,(q_0(x_1)q_1(x_1)\ldots q_{\mu-1}(x_1)y_0^{(\mu)}(x_1)y_0^{(\mu+1)}(x_1))\Big\}$$

Wurzeln.

Specielle Fälle desselben sind die Theoreme:

Sind in dem reellen Intervalle $x_1 \ldots x_2$ $p_0(x)$, $q_0(x)$ und die aus diesen durch die Recursionsformeln

$$p_\lambda(x) = p_{\lambda-1}(x) - \frac{q'_{\lambda-1}(x)}{q_{\lambda-1}(x)},$$

$$q_\lambda(x) = q_{\lambda-1}(x)\left\{1 + \left[\frac{p_{\lambda-1}(x)}{q_{\lambda-1}(x)}\right]'\right\} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \mu)$$

abgeleiteten Functionen eindeutig und endlich und überdies $q_0(x)$, $q_1(x), \ldots q_\mu(x)$ positiv, so hat jedes Integral der Differentialgleichung

$$y'' + p_0(x)y' + q_0(x)y = 0,$$

dessen $(\mu+1)^{\text{te}}$ Ableitung innerhalb dieses Intervalles nicht verschwindet, in demselben so viele Wurzeln, als in der durch das Integral und seine successiven

$\mu+1$ Ableitungen gegebenen Functionenreihe beim Übergange von x_1 zu x_2 Zeichenwechsel verloren gehen.

Sind in dem reellen Intervalle $x_1 \ldots x_2$ $p_0(x)$, $q_0(x)$ und die aus diesen durch die Recursionsformel

$$p_\lambda(x) = p_{\lambda-1}(x) - \frac{q'_{\lambda-1}(x)}{q_{\lambda-1}(x)},$$

$$q_\lambda(x) = q_{\lambda-1}(x)\left\{1+\left[\frac{p_{\lambda-1}(x)}{q_{\lambda-1}(x)}\right]'\right\} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \mu)$$

abgeleiteten Functionen eindeutig und endlich und behält jede der Functionen $q_\lambda(x)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, \mu)$ innerhalb derselben das gleiche Zeichen, bietet ferner die aus einem Integrale der Differentialgleichung

$$y'' + p_0(x)y' + q_0(x)y = 0$$

und seiner successiven $\mu+1$ Ableitungen gebildete Functionenreihe an der unteren Grenze des Intervalles nur Zeichenwechsel, an der oberen aber nur Zeichenfolgen dar, und hat endlich die $(\mu+1)^{\text{te}}$ dieser Ableitungen zwischen x_1 und x_2 keine Wurzel, so ist die Anzahl der dem genannten Intervalle angehörigen Wurzeln des Integrals gleich

$$1 + \text{sign.}\, q_0(x_1) + \text{sign.}\,(q_0(x_1)\, q_1(x_1)) +$$
$$+ \text{sign.}\, q_0(x_1)\, q_1(x_1)\, q_2(x_1)) + \ldots + \text{sign.}(q_0(x_1)\, q_1(x_1) \ldots q_{\mu-1}(x_1)).$$

Aus diesen Sätzen folgen unter anderen das im Anfange angeführte Klein'sche Theorem über die Wurzeln der hypergeometrischen Reihe, welches nicht nur von Klein und mir, sondern auch von Hurwitz[1] und Porter[2] bewiesen wurde, die Sätze über die Anzahl der reellen Wurzeln der eine Verallgemeinerung der Kugelfunctionen bildenden Functionen $C_n^\nu(x)$, welche bei der Entwicklung von $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$ nach steigenden

[1] »Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.« Göttinger Nachrichten aus dem Jahre 1891.

[2] »On the number of roots of the hypergeometric series between zero and one«. Bulletin of the American Mathematical Society, III. V.



Potenzen von α auftreten, der Hermite'schen U-Functionen, der Jacobi'schen Polynome, der Näherungsnenner $T_n^m(x)$ der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{z^m e^{-z} dz}{x-z}$$

u. s. f.

3. Aus den zwei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x) &= 0 \\ z''(x)+p(x)z'(x)+q_1(x)z(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

ergibt sich für die Function

$$u(x) = \begin{vmatrix} y(x), & y'(x) \\ z(x), & z'(x) \end{vmatrix}$$

die Relation

$$u'(x)+p(x)u(x) = (q(x)-q_1(x))y(x)z(x),$$

welche zeigt, dass für jedes reelle Intervall $x_1 \ldots x_2$, in welchem

$$\text{sign.}(q(x)-q_1(x))$$

constant ist, $u'(x)$ und $y(x)z(x)$ sign. $(q(x_1)-q_1(x_1))$ an den Nullstellen von $u(x)$ dasselbe Zeichen haben. Setzt man nun in der Formel 1)

$$f(x) = u(x),$$

$$f_1(x) = y(x)z(x)\,\text{sign.}(q(x_1)-q_1(x_1))$$

und nimmt an, dass $y(x)$ und $z(x)$ in dem Intervalle $x_1 \ldots x_2$ keine gemeinsame und keine mehrfache Wurzel haben, was zur Folge hat, dass auch $u(x)$ keine mehrfache Wurzel hat, so erhält man die Beziehung

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathfrak{A}}}(u(x)) = \text{sign.}(q(x_1)-q_1(x_1)) \Big\{ \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathfrak{A}}}(y(x)) - \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathfrak{A}}}(z(x)) -$$

$$- \frac{1}{2}\,\text{sign.} \frac{d}{dx_1} l \frac{z(x_1)}{y(x_1)} + \frac{1}{2}\,\text{sign.} \frac{d}{dx_2} l \frac{z(x_2)}{y(x_2)} \Big\}. \quad 4)$$

Dieselbe liefert folgende Theoreme:

In einem reellen Intervalle, in welchem die Function

$$q_1(x) \geqq q(x)$$

ist, wo das Gleichheitszeichen nicht für alle Werte des Argumentes gilt, kann ein Integral der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

welches in demselben keine mehrfache und mit einem Integrale der Differentialgleichung

$$z'' + p(x)z' + q_1(x)z = 0,$$

das gleichfalls daselbst nur einfache Wurzeln hat, keine gemeinsame Wurzel besitzt, höchstens um eine Wurzel mehr haben, als das letztere.

In einem reellen Intervalle, in welchem ein Integral $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ebensoviel (0 inbegriffen) Wurzeln hat, als ein Integral $z(x)$ der Differentialgleichung

$$z'' + p(x)z' + q_1(x)z = 0,$$

und in welchem diese beiden Functionen weder gemeinsame, noch mehrfache Wurzeln besitzen, kann die Function $y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$ höchstens eine Wurzel haben, falls in demselben $q_1(x) - q(x)$ das Zeichen nicht wechselt.

Haben in einem reellen Intervalle, in welchem

$$q_1(x) \geqq q(x)$$

ist, wo das Gleichheitszeichen nicht für alle Werte des Argumentes gilt, ein Integral $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

und ein Integral $z(x)$ der Differentialgleichung

$$z''+p(x)z'+q_1(x)z = 0,$$

welche in demselben weder gemeinsame, noch mehrfache Wurzeln besitzen, gleichviel (0 inbegriffen) Wurzeln, so kann die logarithmische Ableitung von $z(x)$ nicht an der unteren Grenze des Intervalles kleiner und zugleich an der oberen grösser sein, als die logarithmische Ableitung von $y(x)$.

Sind die particulären Integrale $y(x)$ und $z(x)$ ganze Functionen m^{ten}, beziehungsweise n^{ten} Grades mit 1 als Coefficienten der höchsten Potenz, deren sämmtliche reellen Wurzeln zwischen x_1 und x_2 liegen, so kann nach dem vorletzten Satze, falls $q_1(x)-q(x)$ zwischen $-\infty$ und x_1, und zwischen x_2 und $+\infty$ das Zeichen nicht wechselt, die Function $y(x)z'(x)-z(x)y'(x)$ in jedem dieser zwei Intervalle höchstens eine Wurzel haben. Da $u(x)y(x)z(x)$ eine ganze Function ungeraden Grades ist, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x $n-m$ ist, so ist:

$$\text{sign.}\,(u(-\infty)y(-\infty)z(-\infty)) =$$
$$= \text{sign.}\left(\frac{z'(-\infty)}{z(-\infty)} - \frac{y'(-\infty)}{y(-\infty)}\right) = \text{sign.}\,(m-n),$$

$$\text{sign.}\,(u(+\infty)y(+\infty)z(+\infty)) =$$
$$= \text{sign.}\left(\frac{z'(+\infty)}{z(+\infty)} - \frac{y'(+\infty)}{y(+\infty)}\right) = \text{sign.}\,(n-m)$$

und daher, falls im Intervalle $-\infty \ldots x_1$ eine Wurzel von $u(x)$ liegt,

$$\text{sign.}\left(\frac{z'(x_1)}{z(x_1)} - \frac{y'(x_1)}{y(x_1)}\right) = \text{sign.}\,(n-m)$$

und falls $u(x)$ zwischen x_2 und $+\infty$ verschwindet,

$$\text{sign.}\left(\frac{z'(x_2)}{z(x_2)} - \frac{y'(x_2)}{y(x_2)}\right) = \text{sign.}\,(m-n).$$

Ist nun in jedem der zwei eben genannten Intervalle

$$q(x) \geqq q_1(x)$$

und $n > m$, so widerspricht jedes zusammengehörige Paar von Gleichungen hinsichtlich der Zeichen dem letzten Theoreme und daher liegen in diesem Falle alle reellen Wurzeln von $u(x)$ zwischen x_1 und x_2. Man leitet daher aus 4) das folgende weitere Theorem ab:

Sind die Functionen $p(x)$, $q(x)$ und $q_1(x)$ so beschaffen, dass den zwei linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$
$$z'' + p(x)z' + q_1(x)z = 0$$

ganze Functionen m^{ten}, beziehungsweise n^{ten} Grades genügen, deren sämmtliche μ, beziehungsweise ν reellen Wurzeln in einem Intervalle liegen, innerhalb dessen

$$q_1(x) \geqq q(x)$$

ist, wo das Gleichheitszeichen nicht für alle in demselben befindlichen Werte des Argumentes gilt, ist ferner die Differenz $q_1(x) - q(x)$ außerhalb dieses Intervalles nirgends positiv, so hat die ganze Function $y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$, falls $n > m$ ist, $\mu - \nu - 1$ in demselben Intervalle liegende reelle und $m + n - \mu + \nu$ complexe Wurzeln.

Ein specieller Fall dieses Theorems ist der von mir a. o. a. O. aufgestellte Satz über die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{x - z}$$

(a, b reell, $f(z)$ im Integrationsbereiche eindeutig, differentiierbar und stets gleich bezeichnet), auf welchen ich im Anfange hinwies.



Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase

(II. Mittheilung)

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger.**

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Jänner 1900.)

In der ersten Mittheilung[1] wurde die gewöhnliche Formel für die innere Reibung eines idealen Gases

$$\eta = k\rho c\lambda$$

in zweifacher Hinsicht modificiert, indem der Einfluss der Ausdehnung der Molekeln berücksichtigt wurde. Es wurde nämlich erstens darauf hingewiesen, dass infolge der Ausdehnung der Molekeln die Zahl der Molekeln, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit passieren, größer ist, als wenn wir es mit punktförmigen Molekeln zu thun hätten, und dass gleicherweise die mittlere Weglänge dadurch eine Verkürzung erfährt. Die mittlere Weglänge kommt deshalb in der Formel vor, weil sie den Weg darstellt, auf welchem eine Molekel eine bestimmte Bewegungsgröße überträgt. Thatsächlich ist nun dieser Weg größer als die mittlere Weglänge, indem beim Zusammenstoße der Austausch der Bewegungsgrößen der als vollkommen elastische Kugeln gedachten Molekeln nicht zwischen den Mittelpunkten der Molekeln stattfindet, sondern an dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte der Oberflächen. Dass dies eine Änderung bezüglich des Weges hervorbringen muss, auf

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CVIII, Abth. II, S. 447—455. 1899.

welchem die Bewegungsgröße übertragen wird, leuchtet unmittelbar ein, wenn wir uns eine auf einer geraden Linie befindliche Anzahl von Molekeln vorstellen. So oft ein Zusammenstoß stattfindet, vertauschen die Molekeln ihre Bewegungsgrößen, gleichzeitig hat es aber die Wirkung, als würde eine jede Molekel die Wegstrecke s übersprungen haben, wenn wir unter s den Durchmesser einer Molekel verstehen; d. h. es würde von einem Zusammenstoße bis zum nächsten die Bewegungsgröße nicht auf dem Wege λ, sondern auf dem Wege $\lambda+s$ befördert. Allerdings erhalten wir bei dieser Anordnung den größten Sprung, den bei einem Zusammenstoße die Bewegungsgröße machen kann; im allgemeinen wird diese Größe kleiner als s sein, und es wird sich für eine große Zahl von Stößen ein bestimmter Bruchtheil α der Größe s als Mittelwert des bewussten Sprunges herstellen. Wenn wir daher in der ersten Mittheilung, S. 448 die Gleichung

$$\eta = k\rho c\lambda\left(1+\frac{4b}{v}+\frac{10b^2}{v^2}+\ldots\right)$$

gefunden haben, so haben wir hier unter λ nicht mehr die mittlere Weglänge, sondern die mittlere Weglänge vermehrt um αs zu verstehen. Als mittlere Weglänge fanden wir nun den Ausdruck $\dfrac{\lambda_0}{1+\dfrac{5b}{2v}}$,[1] wobei

$$\lambda_0 = \frac{c}{N\pi s^2 ,}$$

ist.

Somit ergibt dies für den Reibungscoefficienten

$$\eta = k\rho c\left(\frac{\lambda_0}{1+\dfrac{5b}{2v}}+\alpha s\right)\left(1+\frac{4b}{v}+\frac{10b^2}{v^2}+\ldots\right)$$

$$= k\rho c\lambda_0\left(1-\frac{5b}{2v}+\alpha\,\frac{s}{\lambda_0}\right)\left(1+\frac{4b}{v}\right),$$

---

[1] Loc. cit.

indem wir höhere Potenzen von $\frac{b}{v}$ vernachlässigen wollen; oder da $k\rho c\lambda_0 = \eta_0$ der Reibungscoefficient des verdünnten Gases ist, so wird

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \frac{5b}{2v} + \alpha \frac{N\pi s^3 r}{c}\right)\left(1 + \frac{4b}{v}\right), \tag{1}$$

und da $b = \frac{1}{6} n\pi s^3$ und $N = \frac{n}{v}$ ist, so ist

$$N\pi s^3 = \frac{6b}{v},$$

wonach Gleichung 1) wird

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \frac{5b}{2v} + \frac{6\alpha r}{c}\frac{b}{v}\right)\left(1 + \frac{4b}{v}\right),$$

was nach erfolgter Multiplication

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \frac{5b}{2v} + \frac{6\alpha r}{c}\frac{b}{v} + \frac{4b}{v}\right)$$

$$= \eta_0 \left[1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{6\alpha r}{c}\right)\frac{b}{v}\right]$$

ergibt.

Es kann sich natürlich nur darum handeln, einen angenäherten Wert der Größe α zu finden, da die noch nicht gelösten Schwierigkeiten, welche die exacte Berechnung der inneren Reibung verdünnter Gase bietet, hier in erhöhtem Maße auftreten. Wir wollen deshalb annehmen, alle Molekeln haben dieselbe Geschwindigkeit c; dann wird $r = \frac{4}{3}c$ und

$$\eta = \eta_0 \left[1 + \left(\frac{3}{2} + 8\alpha\right)\frac{b}{v}\right]. \tag{2}$$

Nehmen wir ferner an, auf eine ruhende Molekel bewege sich eine zweite, so wird der Sprung, der beim Zusammenstoß erfolgt, gleich s sein, wenn die Centrilinie mit der Bewegungsrichtung der Molekel zusammenfällt. Bildet sie mit ihr den

(spitzen) Winkel ϑ, so beträgt der Sprung $s \cos \vartheta$. Den Mittelwert aller möglichen Sprünge werden wir daher folgendermaßen erhalten: Es sei Fig. 1 eine Halbkugel vom Radius s; OA sei die Richtung der sich bewegenden Molekel, OB die Richtung der Centrilinie beim Stoß, $BC = s \cos \vartheta$ ist demnach der Sprung, und sämmtliche Sprünge können wir uns gleichmäßig auf der Kreisfläche DE, welche die Halbkugel begrenzt, vertheilt denken. Gehen auf die Flächeneinheit n Sprünge, so ist die Zahl jener von der Größe $s \cos \vartheta$ gleich $2\pi s^2 n \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta$,

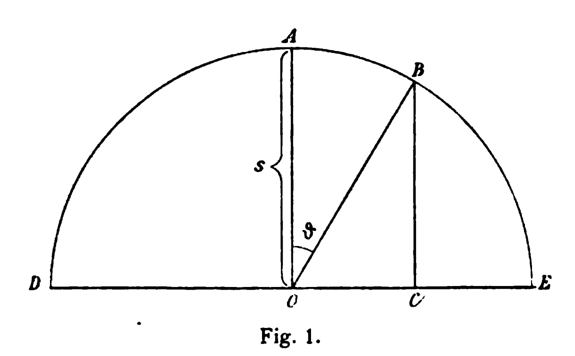


Fig. 1.

ihre Gesammtlänge somit $2\pi s^3 n \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta$ und die Summe aller Sprünge

$$2\pi s^3 n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = 2\pi s^3 n \left[-\frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \pi s^3 n .$$

Dividieren wir die Gesammtlänge durch die Gesammtzahl $\pi s^2 n$, so erhalten wir $\frac{2}{3} s$ als Mittelwert des Sprunges.

Sind beide Molekeln in Bewegung, so erfolgt dieser Sprung in der Richtung der relativen Geschwindigkeit. Schließt diese mit der Richtung der einen Molekel den (spitzen) Winkel φ ein, so ist bezüglich dieser Richtung der Sprung $\frac{2}{3} s \cos \varphi$, und bilden wir jetzt den Mittelwert über alle möglichen relativen Geschwindigkeiten, so ergibt sich der Wert von α. Diesen

letzteren Mittelwert erhalten wir folgendermaßen: Wie aus Fig. 2 leicht ersichtlich ist, ist die relative Geschwindigkeit zweier Molekeln, deren Bewegungsrichtungen den Winkel ϑ einschließen,

$$r = \sqrt{2c^2(1-\cos\vartheta)} = 2c\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}} = 2c\sin\frac{\vartheta}{2}, \qquad 3)$$

und sie bildet mit der Richtung OA den Winkel $\varphi = \frac{\pi-\vartheta}{2}$ oder $\cos\varphi = \sin\frac{\vartheta}{2}$. Da die Richtungen sämmtlicher Molekeln gleichmäßig im Raume vertheilt sind, so ist die Zahl jener, welche mit OA den Winkel ϑ einschließen, $\frac{n}{2}\sin\vartheta d\vartheta$, wenn n

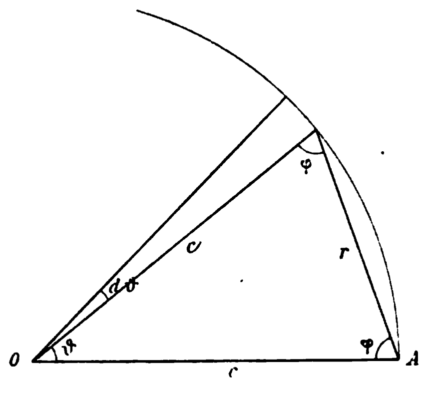


Fig. 2.

die Gesammtzahl der Richtungen ist. Ferner können wir die Zahl der Stöße proportional der relativen Geschwindigkeit r setzen; es ist daher die Summe aller Stöße dem Ausdrucke $\frac{nr}{2}\sin\vartheta d\vartheta$ und die Summe aller Sprünge dem Ausdrucke $\frac{nrs}{3}\sin\vartheta\cos\varphi d\vartheta = \frac{nrs}{3}\sin\vartheta\sin\frac{\vartheta}{2}d\vartheta$ proportional. Integrieren wir diesen Ausdruck und dividieren ihn durch $n\bar{r}$, welche Größe der Gesammtzahl der Stöße in gleicher Weise proportional ist, so erhalten wir den Mittelwert des Sprunges. Dieser ist somit, wenn wir den Wert von r aus Gleichung 3) einsetzen,

$$\frac{\frac{2}{3}\,nsc\int_0^\pi \sin\vartheta \sin^2\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{n\bar{r}} = \frac{8sc}{3\bar{r}}\int_0^\pi \sin^3\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\frac{\vartheta}{2} =$$

$$= \frac{8sc}{3\bar{r}}\left[\frac{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}{4}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\cdot\frac{sc}{\bar{r}} = \frac{1}{2}s,$$

da $\bar{r} = \frac{4}{3}c$ ist. Es ergibt sich somit

$$\alpha = \frac{1}{2};$$

danach wird Gleichung 2)

$$\eta = \eta_0\left[1 + \left(\frac{3}{2} + 4\right)\frac{b}{v}\right] = \eta_0\left(1 + \frac{11}{2}\,\frac{b}{v}\right),$$

wobei unsere Formel natürlich nur für mäßige Verdichtungen des Gases gilt, indem wir für stärkere Verdichtungen η_0 mit einer nach Potenzen von $\frac{b}{v}$ steigenden unendlichen Reihe zu multiplicieren hätten.

In der ersten Mittheilung S. 494 wurde gezeigt, dass man für jede beliebige Dichte des Gases den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung darstellen kann durch

$$\eta = kpc\lambda\left(1 + \frac{4b}{v}A\right),$$

was nach unserer Untersuchung verwandelt werden muss in

$$\eta = kpc(\lambda + \alpha s)\left(1 + \frac{4b}{v}A\right),$$

wobei

$$A = 1 + \frac{5}{2}\,\frac{b}{v} + \ldots$$

eine nach Potenzen von $\frac{b}{v}$ steigende unendliche Reihe ist, die mit abnehmendem v den Wert ∞ annehmen muss, bevor noch v den Grenzwert b erreicht hat. Beachten wir weiter, dass

$$\lambda = \frac{1}{N\pi s^2 A} \cdot \frac{c}{r}$$

und

$$N\pi s^3 = 6\,\frac{b}{v}$$

ist, so folgt nach leicht zu übersehenden Reductionen

$$\eta = \frac{k\rho c}{N\pi s^2} \cdot \frac{c}{r}\left[\frac{1}{A} + \frac{4b}{v} + \frac{\alpha r N\pi s^3}{c} + \frac{4 A b \alpha N\pi s^3 r}{vc}\right] =$$

$$= \eta_0 \left[\frac{1}{A} + \frac{4b}{v} + \frac{6 b r \alpha}{cv} + \frac{24 b^2 A \alpha r}{cv^2}\right];$$

oder wenn wir wieder gleiche Geschwindigkeiten der Molekeln annehmen, also $\alpha = \frac{1}{2}$ und $r = \frac{4}{3} c$ setzen,

$$\eta = \eta_0 \left[\frac{1}{A} + \frac{8b}{v} + 16 A \frac{b^2}{v^2}\right].$$

Es muss sich demnach mit abnehmendem Volumen ähnlich wie der Druck auch die innere Reibung dem Werte ∞ nähern, wobei wir allerdings den Einfluss der inneren Kräfte, welche die Molekeln aufeinander ausüben können, nicht in Betracht gezogen haben. Immerhin dürfte sich die letzte Formel auf die innere Reibung des Wasserstoffes bei gewöhnlicher Temperatur oder auch anderer Gase bei entsprechend hohen Temperaturen anwenden lassen.

Über Longitudinalschwingungen in Stäben

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1900.)

Der tiefste Longitudinalton eines an beiden Enden freien Stabes ist die höhere Octave des tiefsten Longitudinaltones, welchen derselbe Stab hervorzubringen vermag, wenn ein Ende absolut fest ist. Ein derartig festes Ende erreicht man, wenn man den Stab fest an einen Bleiklotz anpresst, oder noch besser, wenn man ihn in eine conische Vertiefung des Klotzes einpresst. Es zeigt sich dann, dass schon ein verhältnismäßig kleiner Klotz genügt, um den Grundton und eine Reihe von Obertönen mit Sicherheit zu erhalten. So reicht es z. B. hin, für einen etwa 1 *m* langen und 6 *mm* dicken Holzstab ein cylinderförmiges Bleigewicht von 3 *cm* Radius und 1 *cm* Dicke zu wählen. Man hat dann den Vortheil, den Stab in jeder beliebigen Lage benützen zu können, indem man in die eine Hand das Bleigewicht nimmt und mit der anderen durch Reibung die Töne hervorbringt. Beobachtet man diese feste Verbindung des Stabes mit einem schweren Körper nicht, sondern setzt man den Stab etwa auf einen Holzklotz, eine Tischplatte und dergleichen auf, so erhält man als tiefsten Longitudinalton nicht mehr die tiefere Octave des Grundtones bei zwei freien Stabenden, sondern einen tieferen Ton. Man könnte vorerst glauben, dass dieser tiefere Ton davon herrührt, weil jetzt ein ganzes System von Körpern gleichzeitig in Schwingung geräth; doch zeigt ein anderer Versuch, dass dies nicht die richtige Erklärung dafür ist, indem man z. B. das

Stabende nur mit einem ganz kleinen Kautschukplättchen zu versehen braucht, um diesen tieferen Ton zu erhalten, so fest man auch das Kautschukplättchen an einen Bleiklotz anpresst. Der Bleiklotz hat, wie aus dem Früheren hervorgeht, die Fähigkeit, ein festes Ende zu erzeugen oder, mit anderen Worten gesagt, er nimmt an der Schwingung nicht theil. Die Masse des Kautschukplättchens kann aber so klein gewählt werden, dass man nicht imstande ist, eine Änderung des Tones infolge der Massenänderung mit dem Gehör wahrzunehmen, was sich ohneweiters zeigen lässt, wenn man den Stab mit zwei freien Enden schwingen lässt. Es zeigt sich hier kein wahrnehmbarer Unterschied, ob man das eine Ende mit einem Kautschukplättchen versieht oder nicht. Die Vertiefung des Tones kann also nur von den Kräften herrühren, welche das elastische Kautschukplättchen auf das Stabende ausübt. Es schien mir deshalb untersuchenswert, welche Lösungen der allgemeinen Gleichung der Longitudinalschwingungen eines Stabes

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad 1)$$

eine derartige Grenzbedingung ergibt.

Haben wir ein freies Ende, so gilt dafür die Bedingung, dass die Spannung im Stabe beständig Null sein muss, wobei die Spannung selbst gegeben ist durch

$$P = Eq \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot$$

Dies ist jedoch die Zugspannung; für die Druckspannung hätten wir demnach den negativen Wert $-Eq\frac{\partial \xi}{\partial x}$; für ein freies Ende muss somit $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ sein. Nehmen wir an, ein Ende drücke auf eine elastische Unterlage, deren Masse zu vernachlässigen sei, so wird diese Unterlage umsomehr zusammengepresst, je größer der Wert des ξ für dieses Ende wird. Wir können daher den Druck, welchen das Stabende auf die Unterlage ausübt, darstellen durch $p = C + \varepsilon \xi$, wo C und ε Constante sind. Es ist dann C der Druck, den der Stab im Ruhe-

zustande auf die elastische Unterlage ausübt. Dehnt sich der Stab aus, d. h. ist ξ positiv, so wird die Druckspannung größer, ist ξ negativ, d. h. hat sich der Stab verkürzt, so ist die Druckspannung kleiner als im normalen Zustande. Für die Grenze des Stabes haben wir infolge der nothwendigen Continuität des Druckes anzunehmen, dass im Stabe und in der Unterlage derselbe Druck herrscht, dass also

$$-Eq\frac{\partial\xi}{\partial x} = C + \varepsilon\xi. \qquad 2)$$

Dies wäre sonach, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, die Bedingungsgleichung für ein elastisches Ende. Ein particuläres Integral der Gleichung 1) ist

$$\xi = \left(A\sin\frac{\alpha x}{c} + B\cos\frac{\alpha x}{c}\right)\sin\alpha t + G. \qquad 3)$$

Danach wird

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\alpha}{c}\left(A\cos\frac{\alpha x}{c} - B\sin\frac{\alpha x}{c}\right)\sin\alpha t.$$

Das freie Ende des Stabes falle mit dem Ursprunge des Coordinatensystems zusammen, folglich gilt für diesen Endquerschnitt $x = 0$; für das elastische Ende haben wir dann $x = l$, wenn l die Länge des Stabes ist. Für $x = 0$ muss somit $\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0$ sein, woraus $A = 0$ folgt und man demnach erhält:

$$\xi = B\cos\frac{\alpha x}{c}\sin\alpha t + G, \qquad 4)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{B\alpha}{c}\sin\frac{\alpha x}{c}\sin\alpha t. \qquad 5)$$

Für $x = l$ gilt die Gleichung 2), was mit Zuhilfenahme von 4) und 5) ergibt:

$$\frac{EqB\alpha}{c}\sin\frac{\alpha l}{c}\sin\alpha t = C + \varepsilon G + \varepsilon B\cos\frac{\alpha l}{c}\sin\alpha t.$$

Diese Gleichung muss für alle Zeiten gelten, was nur möglich ist, wenn die Glieder mit dem Factor $\sin \alpha t$ einander gleich sind. Daraus folgt weiter, dass

$$C + \varepsilon G = 0$$

und

$$\frac{Eq\alpha}{c} \sin \frac{\alpha l}{c} = \varepsilon \cos \frac{\alpha l}{c}$$

ist; diese Gleichung können wir auch schreiben:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{c} = \frac{\varepsilon c}{Eq\alpha}. \qquad 6)$$

Damit ist uns der Wert von α gegeben und, da $\alpha = 2\pi n$, die Schwingungszahl n bestimmbar. Setzen wir zu diesem Zwecke $\frac{\alpha l}{c} = y$, so wird Gleichung 6)

$$\operatorname{tg} y = \frac{a^2}{y}, \qquad 7)$$

wenn wir $\frac{\varepsilon l}{Eq} = a^2$ setzen. Die Constante a^2 ist aus den Eigenschaften des Stabes und des elastischen Endes bestimmbar. Die Gleichung 7) ist leicht auf graphischem Wege zu lösen, indem wir in ein rechtwinkeliges ebenes Coordinatensystem mit der Abscissenaxe OY und der Ordinatenaxe OZ die Curven $z = \operatorname{tg} y$ und $z = \frac{a^2}{y}$ einzeichnen. Die Abscissen der Schnittpunkte der Curven geben sodann die Lösungen der Gleichung 7) und damit die Lösungen für die Schwingungszahl n. Mit Benützung der Fig. 1, welche ein derartiges Bild gibt, können wir leicht alle möglichen Fälle discutieren.

Vorerst zeigt sich, dass, wenn $\varepsilon = 0$ wird, wir einen Stab mit freien Enden haben. Für diesen Fall fallen die Äste der gleichseitigen Hyperbel $yz = a^2$ mit den Coordinatenaxen zusammen, da a^2 ebenfalls Null wird. Als Lösungen der Gleichung 7) ergeben sich dann

$$y = 0,\ \pi,\ 2\pi \ldots.$$

oder

$$\alpha = 0,\ \frac{c\pi}{l},\ \frac{2c\pi}{l} \ldots,$$

was thatsächlich mit den möglichen Tönen eines an beiden Enden freien Stabes übereinstimmt. Wird ε unendlich groß, so haben wir es mit einem festen Ende zu thun. Dann schneidet

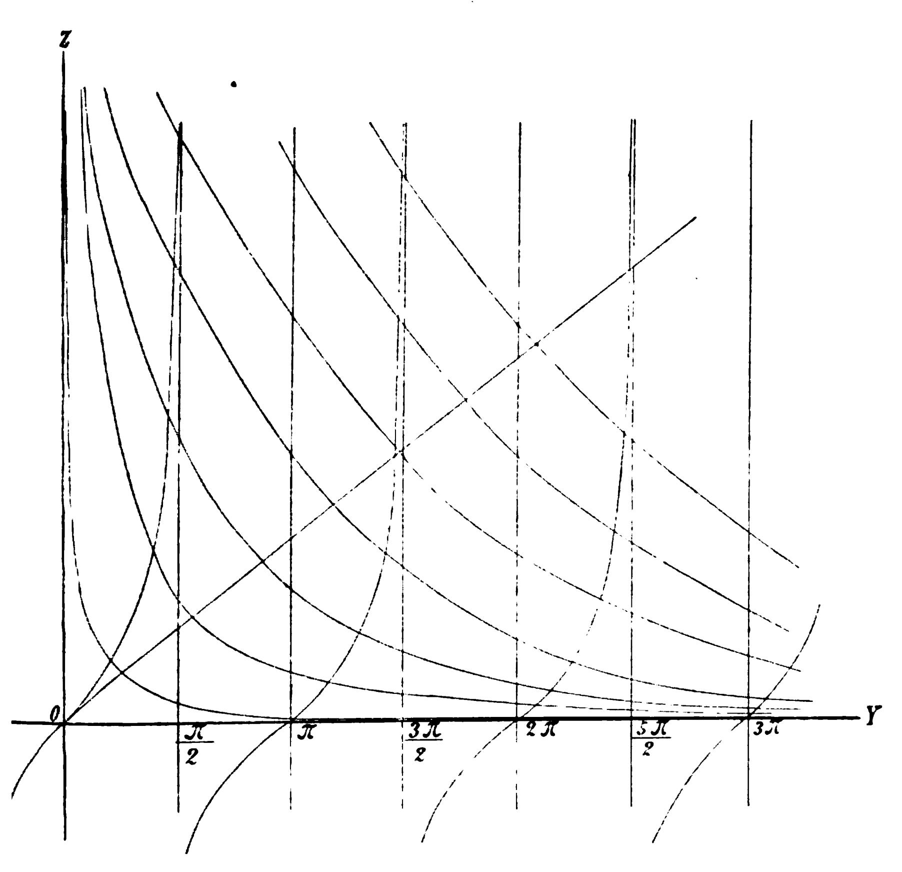


Fig. 1.

die gleichseitige Hyperbel die Tangentencurven erst im Unendlichen, und die Schnittpunkte gehören den Abscissen an

$$y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots,$$

was den Tönen eines an einem Ende festen Stabes entspricht.

Gehen wir von einem freien Ende zu einem elastischen über, jedoch von kleinem ε, so verläuft die gleichseitige Hyperbel

nahe den Coordinatenaxen. Alle Töne, welche der Stab jetzt gibt, bedeuten eine Erhöhung der früher möglichen Töne; außerdem stellt sich ein neuer Grundton ein, bei welchem der Stab ohne Knoten schwingt. Man kann sich das etwa versinnlichen, wenn man einen Stab an einem elastischen Faden von sehr kleiner Masse aufhängt; es entsprechen dann diesem tiefsten Tone auf- und abgehende Schwingungen des ganzen Stabes, die mit zunehmendem ε rascher werden und schließlich in Töne übergehen. Man erhält leicht einen derartigen Ton, wenn man einen Glasstab an einem Ende mit einem Stückchen Kautschukschlauch versieht und, wie oben erwähnt, in die conische Höhlung eines Bleiklotzes presst. Um den tiefsten Ton zu erhalten, reibt man den Stab so an, als wäre er an einem Ende fix. Den nächsthöheren Ton, welcher dem Grundtone des an beiden Enden freien Stabes entspricht, erhält man, wenn man den Stab nahe der Mitte erfasst, das Gewicht frei schweben lässt und ihn in gewohnter Weise anreibt. In ähnlicher Weise lassen sich auch die nächst höheren Obertöne hervorbringen. Es ist dabei auffallend, dass trotz des schwer belasteten Endes der Stab Töne erzeugt, welche mit dem Gehör kaum von jenen des an beiden Enden freien Stabes zu unterscheiden sind. Leicht wahrnehmbare Erhöhungen ließen sich durch einen Holzstab von 3 *m* Länge und 1 cm^2 Querschnitt erzielen, wenn man erst den Ton bei freien Enden erzeugt und dann das eine Ende leicht an ein auf einem Bleiklotze befindliches Stück Tuch anpresst. Man kann auf diese Weise nicht nur die Erhöhung des Grundtones, sondern auch die der nächst höheren Obertöne nachweisen.

Ist das eine Ende fix, so erhalten wir dafür die Bestimmungsgleichung

$$\xi = F,$$

wobei F eine Constante ist. Wir wollen dies für $x = 0$ annehmen. Das andere Ende für $x = l$ sei wieder elastisch, habe also die Bedingungsgleichung 2). Als partielles Integral benützen wir wieder Gleichung 3), welche für die erste Bedingung

$$F = B \sin \alpha t + G$$

ergibt. Daraus folgt, dass $G = F$ und $B = 0$ sein muss. Das particuläre Integral reduciert sich daher auf

$$\xi = A \sin \frac{\alpha x}{c} \sin \alpha t + F$$

und durch Differentiation nach x erhalten wir für $x = l$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\alpha A}{c} \cos \frac{\alpha l}{c} \sin \alpha t,$$

was mit Benützung der Bedingungsgleichung 2) liefert

$$-\frac{Eq\alpha A}{c} \cos \frac{\alpha l}{c} \sin \alpha t = C + \varepsilon F + \varepsilon A \sin \frac{\alpha l}{c} \sin \alpha t;$$

daraus geht weiter hervor, dass

$$C = -\varepsilon F \text{ und } -\frac{Eq\alpha}{c} = \varepsilon \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{c}$$

sein muss. Setzen wir $\frac{\alpha l}{c} = y$, so ergibt sich für die Bestimmung des α die Gleichung

$$\operatorname{tg} y = -by,$$

wenn wir $\frac{Eq}{\varepsilon l} = b$ setzen. Auch diese Gleichung lässt sich sehr leicht auf graphischem Wege lösen, wenn wir, wie oben, die zwei Gleichungen $z = \operatorname{tg} y$ und $z = -by$ in ein rechtwinkeliges Coordinatensystem (siehe Fig. 2) eintragen und die Abscissen der Schnittpunkte der Curven als Lösungen der Gleichung ansehen.

Mit abnehmendem ε nähert sich b dem Werte unendlich, d. h. die zugehörige Gerade schneidet die Tangentencurve erst im Unendlichen. Wir bekommen dann als Lösungen

$$y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$$

was, wie wir schon oben sahen, mit den Tönen eines an einem Ende festen Stabes übereinstimmt. Wird ε unendlich groß, so haben wir einen Stab mit zwei fixen Enden. b wird null, und

die zugehörige Gerade fällt mit der Abscissenachse zusammen; die Werte des y werden

$$y = 0,\ \pi,\ 2\pi \ldots$$

Wir haben also hier dieselben Lösungen wie für einen an beiden Enden freien Stab. Dieses Resultat hätten wir auch bei der

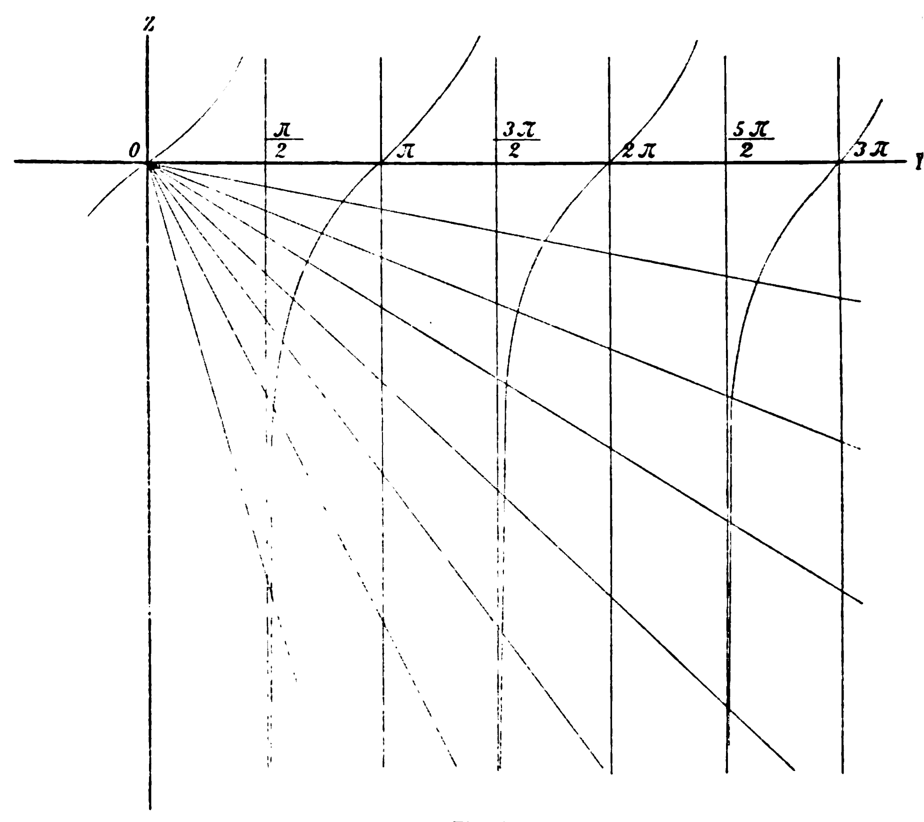


Fig. 2.

unmittelbaren Annahme zweier fixer Enden durch die Rechnung erhalten, muss es ja dasselbe sein, welches sich für die Schwingungen einer an beiden Enden fixen Saite ergibt.

Haben wir ein festes und ein freies Ende und gehen wir von diesem allmählich zu einem elastischen über, so rücken die Durchschnittspunkte der Geraden mit den Tangentencurven

weiter nach rechts, was eine Erhöhung der ursprünglich möglichen Töne bedeutet. Thatsächlich kann man leicht, wenn man einen Stab mit einem Ende in ein Bleigewicht gesteckt hat und erst den Ton, wenn das zweite Ende frei ist, hervorruft, sodann ein Kautschukplättchen an das zweite Ende anpresst, sehr deutlich die Erhöhung des ursprünglichen Grundtones, wie auch die der benachbarten Obertöne nachweisen.

Die Hervorrufung von Tönen eines an beiden Enden fixen Stabes scheint wenig bekannt zu sein, da es mir nicht gelang, in der Literatur darüber etwas vorzufinden; auch in der neuesten Abhandlung von R. Koenig,[1] wo zum Schlusse die verschiedensten Methoden, Töne hervorzubringen, angegeben sind, werden die Longitudinaltöne eines an beiden Enden fixen Stabes nicht erwähnt. Es gelang mir jedoch leicht, derartige Töne hervorzurufen, indem ich die Enden eines Holzstabes in der oben angeführten Weise mit Bleigewichten versah. Es lassen sich dann die Töne des Stabes in ganz ähnlicher Weise erregen, als wären beide Enden frei. Will man den Grundton haben, so nimmt man das eine Ende des Stabes in die Hand oder stellt es auf eine Unterlage und reibt den Stab in der Mitte. Man erhält so denselben Ton, den der Stab mit zwei freien Enden liefert, wenn er in der Mitte gefasst wird. Es ist dabei zu bemerken, dass weder bei zwei freien, noch bei einem freien Ende der Stab so leicht und rein anspricht, wie bei zwei fixen Enden. Fasst man den Stab in der Mitte, so erhält man den ersten Oberton. Derselbe wird also geradeso hervorgerufen, wie der Grundton bei zwei freien Enden. In analoger Weise verfährt man bei der Hervorrufung der nächsten Obertöne, woraus unmittelbar hervorgeht, dass man bei derselben Vorsicht einen Oberton mehr erreicht bei fixen als bei freien Enden. Als günstiger Umstand tritt noch die bei weitem leichtere Erregbarkeit des Tones hinzu.

Verwandelt man das eine fixe Ende in ein elastisches, d. h. wird b von Null verschieden, so rücken die Durchschnittspunkte, welche die Lösungen angeben, nach links. Man muss also eine Vertiefung des Tones erhalten. Auch dies lässt sich

[1] Wied. Ann., Bd. 69.



sowohl für den Grundton, als auch für die nächsten Obertöne sehr leicht nachweisen, wenn man nach Hervorrufung des Tones bei zwei fixen Enden das eine Bleigewicht abnimmt, ein Kautschukplättchen unterlegt und wieder fest aufsetzt.

Die oben gegebene Methode, Longitudinaltöne eines an beiden Enden fixen Stabes zu erhalten, büßt nichts an ihrer Sicherheit ein, wenn der Stab beliebig verkürzt wird. Es gelingt deshalb leicht, die Höhe des Grundtones bis über die Grenze der Hörbarkeit hinaus zu bringen. Ich benützte, um dies zu erreichen, kurze Stäbe aus hartem Holze von 3 *mm* Dicke, deren Enden, wie oben erwähnt, mit Bleigewichten von etwa 70 *g* versehen wurden. Aus dem Vergleiche des so erhaltenen Tones mit dem Tone bei zwei freien Enden konnte man keinen Unterschied beider Töne erkennen; man kann also im ersten Falle die Enden thatsächlich als fix betrachten. Es ist sogar wahrscheinlich, dass noch bei weitem kleinere Bleigewichte feste Enden herstellen würden, was nur deshalb unterlassen wurde, weil die Festigkeit des benützten Holzes leicht die angewandten Bleigewichte trug. Aus einem Stabe von 40·9 *cm* Länge, der bei einem fixen Ende die Schwingungszahl 2190 hatte, ergibt sich als Schallgeschwindigkeit im Stabe 3580 *m*. Bei allmählicher Verkürzung zeigte sich nun, dass für eine Reihe von Beobachtern die Wahrnehmbarkeit des Tones bei Stäben aufhörte, welche zwischen 10·9 *cm* und 9·7 *cm* Länge hatten; es entspricht dies Schwingungszahlen zwischen 16.500 und 18.500. Aus dem Umstande, dass für verschiedene Beobachter die Grenze der hörbaren Töne verschieden hoch liegt, ließ sich ein Kriterium dafür finden, dass der Ton immer mit Sicherheit ansprach. Denn obwohl die einen Beobachter nichts mehr hörten als das Reibungsgeräusch, konnte von den anderen stets mit Sicherheit der Ton wahrgenommen werden. Und nachdem sich demnach bis zu dieser Grenze die sichere Tonerzeugung vollkommen bewährte und weitere Verkürzungen des Stabes die Methode der Tonerzeugung nicht ändern, so kann daraus geschlossen werden, dass die Erregung des Tones sicher noch bei einer Stablänge von 4 *cm* und darunter möglich ist, so dass wir auf diese Weise zu Tönen von 50.000 Schwingungen, ja, bei Benützung von Tannenholz, in welchem die

Schallgeschwindigkeit noch eine beträchtlich größere ist, leicht noch weiter gelangen können. Trotz der guten Wahrnehmbarkeit der einzelnen Töne ist ihre Intensität doch zu gering, als dass dadurch erzeugte Combinationstöne noch hörbar wären, so dass es auch nicht gelang, aus nicht mehr hörbaren Tönen die Combinationstöne, welche noch innerhalb der Grenze der Hörbarkeit hätten liegen sollen, wahrzunehmen.

Über Radium- und Poloniumstrahlung

von

Dr. **Stefan Meyer** und Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Wien.

(Mit 2 Tafeln und 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1900.)

I. Verhalten im magnetischen Felde.

Im Herbste 1899 haben wir über die Beobachtungen berichtet, die wir an Radium- und Poloniumpräparaten im Magnetfelde gemacht hatten.[1]

Die entladende Wirkung des Radiums auf elektrisierte Körper hatte sich im magnetischen Felde als sehr geschwächt erwiesen. Die damals getroffene Versuchsanordnung war die folgende:

Zwischen den Polschuhen unseres Elektromagneten befand sich eine beiderseits offene, zur Erde abgeleitete Messingröhre. In dieselbe ragte von oben axial ein mit dem Elektroskope verbundener, runder Metallstab. Etwa 12 *cm* unterhalb lag in kleinem Papiercouverte das uns von Herrn Giesel-Braunschweig freundlich zur Verfügung gestellte Präparat (Radiumbaryumchlorid), so dass die durch das offene untere Rohrende eintretenden Strahlen eine dem Stabe mitgetheilte Ladung rasch zerstreuten. Wurde nun das Feld von circa 17000 [C.G.S.] erregt, so verlangsamte sich dieser Vorgang bedeutend.

So fanden wir beispielsweise die Zeit, in welcher die Divergenz der Elektroskopblättchen von einem bestimmten

---

[1] Akadem. Anzeiger, Wien, Nr. 22 vom 3. November, Nr. 23 vom 9. November und Physikal. Zeitschrift, I, Nr. 9, S. 90 und Nr. 10, S. 113.

Werte auf die Hälfte sank, ohne Feld zu 12 sec., nach Erregung desselben zu 95 sec., sie stieg also auf ungefähr das Sechsfache.

Wir deuteten damals diese Erscheinung nach der Analogie mit den Versuchen der Herren Elster und Geitel[1] als Ablenkung der Strombahnen in der leitend gemachten Luft, glauben aber jetzt, dass auch dieses Phänomen, wenigstens zum Theile, durch die seither festgestellte Ablenkung der Strahlen der radioactiven Substanz bedingt war.

Auch bei Verwendung der zuerst der hiesigen Akademie der Wissenschaften von Herrn Curie eingesandten geringen Mengen von Radiumbaryumcarbonat zeigte sich bei einer ähnlichen Anordnung dieselbe Erscheinung, wenn auch in schwächerem Maße.

Wurde das Giesel'sche Präparat selbst zwischen die Polschuhe des Magneten gebracht und ein dem ersten Apparate analoger (mit dem Elektroskope verbundener Stab in zur Erde abgeleiteter Röhre) in einer Entfernung von circa 20 *cm* aufgestellt, so zeigte sich wieder eine starke Vergrößerung der Entladungsdauer. Die Substanz von Curie zeigte hingegen unter genau gleichen Versuchsbedingungen, unter denen das Giesel'sche Präparat einen Unterschied der Entladungszeit von 22 sec., ohne Feld auf 250 sec. bei 17000 [C. G. S.] ergeben hatte, bloß die kaum nachweisbare Verzögerung von 20 sec. auf 23 sec. Wir müssen heute allerdings den damals nicht als wesentlich betrachteten Unterschied anführen, dass Curies Präparat in einem offenen Schälchen, Giesels Substanz in Kanzleipapier gewickelt verwendet wurde. Da in unserem Falle das Gebiet, in welchem die Entladung vor sich gieng, sicherlich nur mehr sehr wenige magnetische Kraftlinien enthielt, konnte die Ursache dieser Erscheinung in einer directen Beeinflussung der Emission oder in einer Ablenkung der Strahlen zu suchen sein.

Bei Curies Poloniumwismuthnitrat konnten wir überhaupt keine Beeinflussung durch das Feld feststellen. Es war dies ein Präparat, das im Gegensatze zu den Erfahrungen Herrn Giesels seine Wirksamkeit im Verlaufe von damals

---

[1] J. Elster und H. Geitel, Wied. Ann., 69, S. 89, 1899.

fünf Monaten nicht eingebüßt hatte (auch heute noch, nach etwa acht Monaten dieselbe besitzt) und sich auch in Form einer Lösung activ zeigte.

Die Verschiedenheit der Wirkung eines Magnetfeldes auf ein Poloniumpräparat Curies gegenüber derjenigen auf Radiumpräparate und auch einem Poloniumpräparate Giesels wurde in jüngster Zeit von Herrn Becquerel[1] bestätigt gefunden.

Wir haben damals auch schon betont, dass, während eine Verschiedenheit der Radium- und Poloniumstrahlung aus den Absorptionserscheinungen bereits sichergestellt war, die angeführten Ergebnisse darauf hindeuten, dass auch die als radiumhaltig bezeichneten Substanzen Strahlen wesentlich verschiedener Natur auszusenden vermögen.

Inzwischen theilte uns zu jener Zeit Herr Giesel brieflich mit, dass er gefunden habe, dass der Fluorescenzfleck auf einem Leuchtschirme durch das Feld beeinflusst werde und deutete dies als Ablenkungserscheinung. Seine Untersuchungen sind in Wiedemanns Annalen[2] (eingereicht am 31. October 1899) niedergelegt.

Dies stand in gutem Einklange mit den von uns beobachteten Erscheinungen, und es handelte sich uns nun in erster Linie darum, über die Richtung der Ablenkbarkeit Klarheit zu schaffen. Hiezu stellten wir die folgenden Untersuchungen an.[3]

Ein in Papier gewickeltes Radiumbaryumchloridpräparat (Giesel'scher Provenienz) erscheint im Dunkeln infolge der Fluorescenz des Papiers leuchtend. Im magnetischen Felde wird die Intensität des Leuchtens nicht merklich verändert, die Emissionsfähigkeit bleibt also dieselbe; hingegen verschwindet beim Erregen unseres Feldes die Fluorescenz auf einem einige Centimeter davon befindlichen Baryumplatincyanürschirm vollständig.

Befestigt man das Präparat unmittelbar auf der Rückseite des Schirmes, so sieht man im Dunkeln einen scharf begrenzten Fleck von den Dimensionen des Präparates, und zwar in

---

[1] H. Becquerel, Compt. rend., 129, S. 1205, 1899.

[2] F. Giesel, Wied. Ann., 69. S. 834, 1899.

[3] Akadem. Anzeiger, Wien, Nr. 23. vom 9. November; Physikal. Zeitschrift, Nr. 10, S. 113.

unserem Falle ein Rechteck. Wir brachten den Leuchtschirm nun so zwischen die Magnetpole, dass die Längsseiten des Rechteckes, in deren Verbindungslinie zu liegen kamen. Um ein ausgedehntes homogenes Feld erhalten zu können, hatten wir die Polschuhe abgeschraubt und erzielten so bei einer Poldistanz von 16 *cm* ein solches von 3500 [C.G.S.]. Bei Erregung des Elektromagneten tritt nun in der Umgebung des Rechteckes eine Aufhellung ein in Form von zwei breiten verwaschenen Streifen, die von dem hell leuchtenden Rechtecke durch einen dunklen Zwischenraum getrennt sind (Fig. 1).

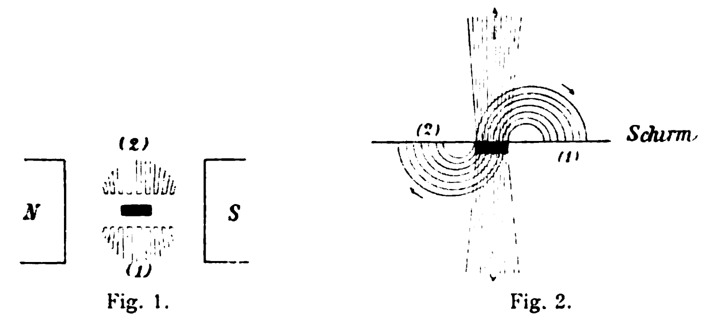


Fig. 1. Fig. 2.

Je stärker das Feld, desto schmäler wird der dunkle Raum. Infolge der großen Selbstinduction unseres Magneten erreicht das Feld erst einige Secunden nach Stromschluss sein Maximum, und man sieht dann die Aufhellung, am äußeren Rande des Schirmes beginnend, sich gegen die Mitte desselben hinbewegen, und ebenso zeigt sich beim Ausschalten die entgegengesetzte Bewegung.

Je nachdem die obere oder untere Seite des Präparates durch einen undurchsichtigen Körper verdeckt wird, verschwindet der vordere helle Streifen (1) oder der hintere (2). Ein Bleiklotz, der an die Unterseite des Schirmes unter (1) gelegt wird, ändert die Lichterscheinung nicht, unter (2) gebracht, wirft er einen deutlichen Schatten. Es werden also die durch die beiden Seiten des das Präparat umschließenden Papiercouvertchens ursprünglich annähernd senkrecht nach oben austretenden Strahlen im Felde umgebogen (Fig. 2), und zwar ist der Sinn der Krümmung derselbe wie der eines biegsamen Stromleiters, in dem ein negativer Strom im Sinne

der Strahlen fließt. Die Strahlen verhalten sich also in dieser Beziehung ganz analog wie Kathodenstrahlen.

Bringt man das Präparat so an den Pol, dass die von der breiten Fläche desselben ausgehenden Strahlen ungefähr die Richtung der Kraftlinien haben und bringt gegenüber am anderen Pole (bei uns in einer Distanz von 16 *cm*) den Schirm an, so erscheint, solange das Feld nicht erregt ist, eine schwache gleichmäßige Fluorescenz des ganzen Schirmes. Wird das Feld eingeschaltet, so bildet sich das Präparat ziemlich scharf auf dem Schirme ab, und die Verbindungslinie von Object und Bild ist die Richtung der Kraftlinien. Umkehr der Feldrichtung alteriert die Erscheinung nicht. Ein undurchsichtiger Stab, in diese Verbindungslinie gebracht, wirft einen, wenn auch nicht scharfen, so doch deutlich sichtbaren Schatten.

Es lässt sich dies aus den Ablenkungserscheinungen erklären, indem die Strahlen, welche parallel den Kraftlinien gehen, unbeeinflusst bleiben, diejenigen, welche dieselben schneiden, zu Schraubenlinien um sie herumgewickelt werden.

Die seither von Herrn Becquerel beobachtete Erscheinung,[1] dass bei ähnlicher Anordnung die Strahlen von einem Pole zum anderen nicht geradlinig, sondern in einem Bogen verliefen, glauben wir auf die von ihm angeführte Inhomogenität seines Feldes zurückführen zu dürfen.

Poloniumreste auf einem Filter (Präparat des Herrn Giesel) zeigten qualitativ dasselbe Verhalten.

Das von Herrn Curie erstgeschickte Radiumbaryumcarbonat stand uns damals nicht mehr zur Verfügung, und die Spuren Poloniumwismuthnitrat, die von ihm stammten, zeigten zwar noch beträchtliche entladende Wirkungen, erregten aber den Baryumplatincyanürschirm nicht zur Fluorescenz. Eine uns jüngst zugekommene Radiumbaryumcarbonatsendung Curies zeigt hingegen deutlich qualitativ die oben geschilderten Erscheinungen in Übereinstimmung mit den Ergebnissen Becquerels.

Die S-förmigen Gebilde, die Herr Giesel auf photographischen Platten gesehen hat, haben wir bisher auf solchen nicht erhalten.

[1] Compt. rend., 129, Dec. 1899.

II. Absorptionserscheinungen.

Da bei Kathodenstrahlen eine Beziehung zwischen magnetischer Ablenkbarkeit und Durchdringungsfähigkeit besteht, haben wir die Radiumstrahlen zunächst bezüglich ihrer Absorbierbarkeit in verschiedenen Medien untersucht. Als Maß der Intensität diente dabei der von den Strahlen hervorgerufene Elektricitätsverlust einer isolierten, mit dem Elektroskope verbundenen Kugel.[1]

Der Apparat bestand bei der Untersuchung der Gieselschen Präparate aus einem Messingcylinder *(C)* von 19 *cm*

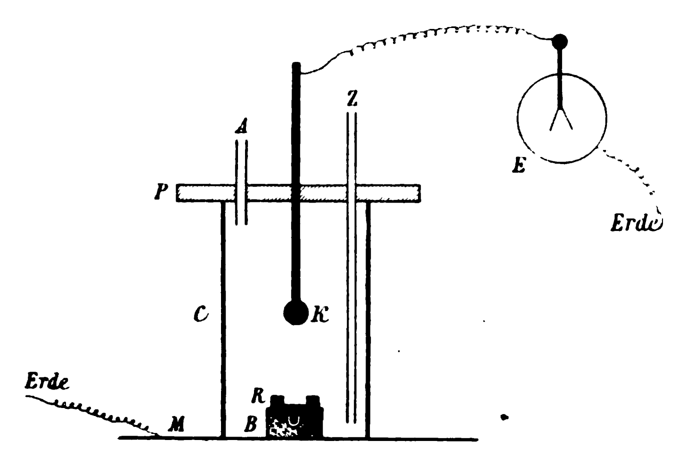


Fig. 3.

Höhe und 10 *cm* Durchmesser, der auf einer Messingplatte *(M)* aufstand und zur Erde abgeleitet war. Durch eine Paraffinplatte *(P)*, welche den Cylinder bedeckte, führte ein Metallstab, an dessen Ende ungefähr in der Mitte des Hohlraumes eine Messingkugel von 28 *mm* Durchmesser *(K)* angebracht war. Letztere ist mit dem Elektroskope *E* leitend verbunden.

Das Präparat erfüllte ein ungefähr 4 *mm* weites und 1·5 *cm* langes, unten zugeschmolzenes Glasröhrchen und war bis zum

[1] Vergl. Akadem. Anz., Wien, Nr. 26, vom 7. December 1899.

Rande in die Bohrung eines cylindrischen Bleiklotzes *(B)* von 4·5 *cm* Durchmesser und 2 *cm* Höhe eingesenkt. Die absorbierende Platte wurde anschließend darauf gelegt und darüber zur Abblendung eventuell seitlich austretender Strahlen ein Messingring *(R)* mit einer Öffnung von 1·4 *cm* Durchmesser gelegt.

Gemessen wurde die Zeit, in der das eine Elektroskopblättchen vom Theilstriche 15 auf 10 absank, entsprechend den Potentialen von 305 bis 230 Volt.

Bei Verwendung des Curie'schen Präparates zeigte es sich, dass die Luft nach Entfernung der radioactiven Substanz noch einige Zeit eine merkliche Leitfähigkeit beibehielt, was eine Fehlerquelle für die Vergleichung der Entladungsdauer bei verschiedenen absorbierenden Medien sein konnte. Bei Giesels Präparaten war dies nicht merklich der Fall gewesen. Wir haben daher durch die Paraffinplatte zwei Glasröhren eingeführt, durch welche mittels eines in einiger Entfernung befindlichen Blasebalges vor jeder Messung frische Luft (bei Z) zugeführt wurde.

Bezeichnet T die Entladungsdauer für das gewählte Intervall bei Abwesenheit der radioactiven Substanz, t die direct beobachtete Zeit bei Wirkung der Strahlung, so ist der corrigierte Wert $t' = \frac{tT}{T-t}$. T betrug bei unseren Messungen ungefähr 30 Minuten.

Versteht man unter t_0 denjenigen Wert, den man durch die directe Strahlung der Substanz ohne jedes absorbierende Medium erhält, so gibt die Formel $J = \frac{1000\, t_0}{t'}$ die Intensität der nicht absorbierten Strahlung in Promille der Gesammtstrahlung an.

Außer der bereits erwähnten wären noch zwei Fehlerquellen ins Auge zu fassen. Die erste ist die von P. und S. Curie[1] entdeckte »inducierte« Strahlungsfähigkeit der umgebenden Körper. Dass dieselbe hier nicht in Betracht kommt, ist einerseits zu schließen aus den quantitativen Angaben dieser Forscher, wonach sie bloß einige Promille der erregenden

---

[1] Compt. rend., 129, p. 714, 1899.

Strahlung beträgt, anderseits daraus, dass bei einer Reihe unmittelbar aufeinander folgender Versuche keine merkliche Verringerung der Entladungsdauer auftrat. Die zweite Fehlerquelle wäre darin zu suchen, dass an der Oberfläche der absorbierenden Medien diffuse Reflexion stattfinden konnte. Einige Versuche (vergl. Zink) zeigten aber, dass die Absorption bei gleicher Dicke mindestens in erster Annäherung dieselbe ist, unabhängig davon, ob man eine dickere Platte wählt oder mehrere dünne aufeinander legt.

Absorbierende Substanz	Dicke in 10^{-3} *mm*	Intensität der Strahlung für Radiumbaryum-		
		Chlorid (Giesel)	Bromid (Giesel)	Carbonat (Curie)
—	0	1000	1000	1000
Aluminium	160	91	79	278
	200	75	—	—
	2×160 = 320	—	—	220
	2×200 = 400	57	—	—
	3×200 = 600	47	—	—
	4×160 = 640	—	—	180
	6×160 = 960	—	—	156
Cadmium	250	44	39	—
	230	—	—	167
	2×230 = 460	—	—	152
Zinn (Stanniol)	11	266	281	444
	2×11 = 22	104	103	313
	3×11 = 33	88	86	282
	4×11 = 44	75	75	256
	5×11 = 55	71	71	250
	6×11 = 66	67	67	233
	7×11 = 77	64	64	—
	8×11 = 88	59	60	222
	15×11 = 165	—	—	179
Zink	160	68	53	179
	2×160 = 320	53	—	145
	3×160 = 480	42	—	131
	220	59	—	164
	2×220 = 440	47	—	131
	460	48	—	128
	2×460 = 920	—	—	120
	750	35	—	123

Absorbierende Substanz	Dicke in 10^{-3} *mm*	Intensität der Strahlung für Radiumbaryum-		
		Chlorid (Giesel)	Bromid (Giesel)	Carbonat (Curie)
Kupfer	90	68	60	210
	2×90 = 180	—	—	158
	4×90 = 360	—	—	137
	8×90 = 720	—	—	112
Eisen	130	61	52	200
	2×130 = 260	—	—	166
Blei	260	36	34	125
Palladium	20	82	76	256
	2×20 = 40	67	—	204
	3×20 = 60	—	—	182
	330	—	—	125
Platin	2·5	488	526	488
	2×2·5 = 5	244	247	364
	3×2·5 = 7·5	123	—	282
	17	—	—	213
	2×17 = 34	—	—	189
	60	—	—	176
	2×60 = 120	—	—	149
Glas (mikroskopische Deckgläschen)	160	99	80	263
	2×160 = 320	83	—	215
	3×160 = 480	67	—	180
	4×160 = 640	59	—	175
	5×160 = 800	56	—	171
	6×160 = 960	53	—	—
	7×160 = 1120	49	—	—
	10×160 = 1600	—	—	160
Papier	60	122	121	378
	2×60 = 120	107	—	333
	3×60 = 180	100	—	308
	4×60 = 240	—	—	294
	6×60 = 360	—	—	278
	8×60 = 480	—	—	256
	12×60 = 720	—	—	230
	16×60 = 960	—	—	211
	22×60 = 1320	—	—	198
Ebonit	480	—	67	213
	2×480 = 960	—	—	166

Einige charakteristische Beispiele für den Gang der Absorption sind in den beigegebenen Tafeln graphisch dargestellt. Man erkennt, dass durchwegs die ersten Schichten eine viel größere Absorption hervorrufen als die folgenden. Eine einzige Ausnahme zeigt die ganz dünne Platinfolie gegenüber der Strahlung des Radiumbaryumchlorides des Herrn Giesel.

Es ergibt sich daraus, dass, ähnlich wie dies für Röntgen-, Uran- und Thorstrahlen bereits nachgewiesen ist, auch hier die Gesammtstrahlung sich aus einer Reihe verschieden absorbierbarer Strahlen zusammensetzt.

Eine Anordnung der Substanzen nach ihrer Durchdringbarkeit lässt sich also nach unseren Ergebnissen nicht eindeutig herstellen, da je nach der Schichtendicke die Reihenfolge derselben wenigstens theilweise eine andere wird.

So findet sich die Folge für die Dicke von:

$50 . 10^{-3}$ *mm*		$200 . 10^{-3}$ *mm*		$300 . 10^{-3}$ *mm.*	
Präparat von:					
Curie	Giesel	Curie	Giesel	Curie	Giesel
Papier	Papier	Papier	Papier, Glas	Papier	
Zinn	Kupfer	Aluminium	Aluminium	Aluminium	Glas
Kupfer	Zinn	Glas	Zink	Glas	Aluminium
Palladium	Palladium	Cadmium	Cadmium	Cadmium	Zink
Platin		Zink, Eisen	Zinn	Eisen, Zink	Cadmium
		Zinn	Blei	Palladium, Blei	Blei
		Palladium, Blei		Kupfer	
		Kupfer			

Ein Vergleich der verschiedenen strahlenden Substanzen zeigt, dass die Durchdringungsfähigkeit von Radiumbaryumchlorid und -Bromid des Herrn Giesel nahezu dieselbe ist, hingegen das Carbonat Curies wesentlich schwerer absorbierbare Strahlen aussendet. Ein Radiumbaryumcarbonat des Herrn Giesel konnte seinerzeit wegen zu geringer Intensität seiner Wirkung zum Vergleiche nicht herangezogen werden.

Es bestätigt sich sonach unsere schon früher geäußerte Vermuthung,[1] dass verschiedene radiumhaltige Verbindungen verschiedenartige Strahlen aussenden. Ob aber diese Unter-

[1] Akadem. Anz., Wien, Nr. 22, vom 9. November 1899.



schiede auf den Gegensatz der Carbonat- und Halogenverbindung oder auf die verschiedene Darstellungsweise der Substanzen einerseits von P. und S. Curie, anderseits Giesels zurückzuführen sei, konnten wir bisher nicht entscheiden.

Das von uns hier angewendete Maß der Intensität ist nicht von vorneherein auch für andere Wirkungen (Fluorescenz, photographische Wirkung) anwendbar. Aus dem Verhalten des uns zur Verfügung stehenden Curie'schen Poloniums einerseits, das, ohne Fluorescenz zu erregen, noch stark entladend wirkt, und anderseits demjenigen de Haen'scher Präparate,[1] die bei relativ starker Fluorescenzwirkung nur geringe Entladungsfähigkeit besitzen, ist im Gegentheile zu schließen, dass diese beiden Wirkungen nicht vollkommen parallel gehen. Bei dickeren Schichten ergab aber eine ungefähre subjective Schätzung, dass die Schwächung der Fluorescenzwirkung bei verschiedenen absorbierenden Medien, welche die Entladungsdauer in gleicher Weise beeinflussten, die gleiche war.

---

[1] Wied. Ann., 68, S. 902, 1899.

1000

900

800

700

600

IV

500

400

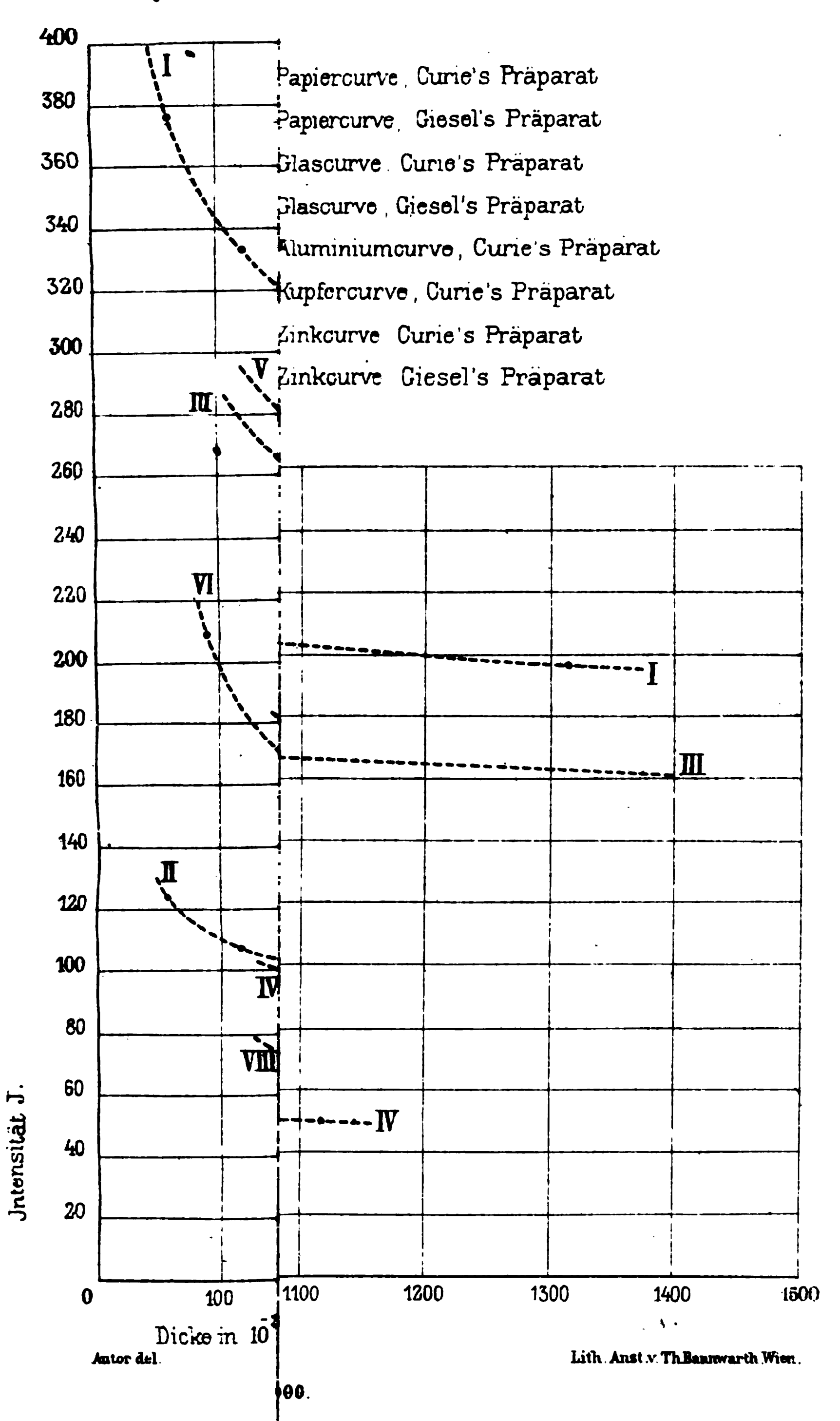
300

200

100

Intensität J.

0


St. Meyer u. E. v. Sd
Tafel 2.
Papiercurve, Curie's Präparat
Papiercurve, Giesel's Präparat
Glascurve, Curie's Präparat
Glascurve, Giesel's Präparat
Aluminiumcurve, Curie's Präparat
Kupfercurve, Curie's Präparat
Zinkcurve Curie's Präparat
Zinkcurve Giesel's Präparat
Intensität J.
Dicke in 10
Autor del.
Lith. Anst. v. Th. Bannwarth Wien.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XVIII. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Sc, Sa, Gd)

von

Prof. **Franz Exner,** w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1900.)

LVII. Scandium.

Das ultraviolette Spectrum des Scandiums ist bisher unbekannt; nur im Rowland'schen Sonnenspectrum finden sich einzelne Linien als Scandium bezeichnet. Wir verwendeten zur Aufnahme in Nitrat überführte Scandinerde, die wir von Professor L. F. Nilson erhielten. Das Spectrum ist linienarm, aber ausgezeichnet durch starke und charakteristische Linien. Die Zahl der letzteren beträgt 131. An Verunreinigungen waren vielleicht Spuren von Cr, Nb und Yb anwesend.

λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*
2232·98	1+	2552·49	8	2684·3	1+ br.
51·94	1+	55·91	4	99·14	10
73·21	3	60·39	6	2734·12	7
88·20	1+	62·65	3	82·6	1+ br.
99·25	1+	63·30	4	89·4	2+ br.
2363·95	1+ br.	2611·4	2+ br.	90·94	1+
2400·44	1	67·7	1+ br.	2801·6	1+ br.
2545·31	4	76·15	1+	19 75	2+

λ	i	λ	i	λ	i
2822·4	3+ br.	3352·19	2	3944·9	1+
26·85	3+	53·88	20	88·13	1 Yb?
58·40	1	59·83	8	89·21	1
59·5	1+ br.	61·45	8	96·76	2
66·2	1+ br.	62·09	8	4014·68	8
71·1	1+ br.	69·10	10	20·56	8
2913·1	1+	72·30	10	23·86	8
74·17	1 Nb?	78·5	1+ r.	47·96	2
80·0	1+ br.	79·5	3+ r.	54·70	3
80·91	1	83·81	1	61·4	2+ br.
89·20	3+	85·6	1+ br.	68·8	2+ br.
3015·46	1	94·55	1+	82·60	3
19·42	1	3429·59	1	4229·98	1
20·70	1	35·67	1	32·12	1 Nb?
21·14	1	57·62	1	38·22	1
40·15	2+	3535·88	15	47·02	100
45·88	3+	58·72	20	80·05	1
53·12	4+	67·86	20	94·98	5 r.
60·7	1+	72·71	50	4305·94	6
65·32	5+	76·52	30	14·32	30
82·80	1	81·15	20	21·01	20
3108·70	1+	89·82	10	25·24	20
26·2	1+ br.	90·67	10	54·80	3
28·48	1+	3603·1	1+ br.	59·22	1
30·49	1 Nb?	13·96	100	74·70	20
33·32	2+	19·97	1 Yb?	85·01	4
39·98	2+	24·77	1+	4400·64	20
91·2	1+ br.	28·35	1+	15·85	15
99·6	1+ br.	30·86	100	20·87	2
3251·44	1	42·93	50	31·57	3
55·79	1	45·46	15	4574·17	1+
70·05	2	51·96	20	4670·64	7
73·76	2	64·37	1	98·50	1
89·50	1 Yb?	66·69	3	4729·40	1
3312·0	2+ br.	75·42	1	34·30	1
13·0	3+ br.	76·82	1	37·86	1
17·25	1+	78·65	3+ r.	41·25	2
17·9	1+ br.	3907·69	6	44·02	2
31·4	2+ br.	12·05	6		
43·5	3+ br.	23·60	1		

LVIII. Samarium.

Das ultraviolette Spectrum des Samariums ist unbekannt. Das Samariumoxyd, das wir, in Nitrat überführt, zu den Aufnahmen verwendeten, stammte von Professor P. T. Cleve in Upsala. Es war als nicht ganz rein bezeichnet und sollte namentlich Di und Gd enthalten. Die spectrale Untersuchung ergab eine Verunreinigung durch Y und Gd und möglicherweise durch Pt, Ir, Rh, Ru, Pd, Ni, Co, Zr, Ti Th, Ta, La, Nb, Ce, Nd, Pr und Sc in Spuren.

Die Zahl der gemessenen Linien betrug 1965. Wir müssen aber gleich bemerken, dass aller Wahrscheinlichkeit nach diese Linien zum großen Theile nicht dem Samarium angehören. Die Untersuchung des Samariums und Gadoliniums hat gezeigt, dass man es nicht nur mit einer wechselseitigen Verunreinigung dieser beiden Körper zu thun hat, was sich dadurch manifestiert, dass starke Linien des einen Spectrums schwach im anderen erscheinen, sondern dass dem Sa und Gd, wenigstens in der Form, in der sie uns vorliegen, noch ein dritter Körper beigemischt sein muss, dessen Anwesenheit sich dadurch verräth, dass eine große Zahl von Linien, ungefähr 800, und darunter auch recht starke, in beiden Spectren mit gleicher Intensität auftreten. Es wäre möglich, dass dieser dritte Körper eines der von uns noch nicht untersuchten Elemente dieser Gruppe, etwa Holmium oder Thulium wäre, doch ist es nicht wahrscheinlich, dass diese chemisch schon isoliert dargestellten Elemente in so bedeutendem Maße als Verunreinigung auftreten würden. Es scheint uns wahrscheinlicher, dass man es hier mit einem bisher unbekannten Vertreter der Gruppe der seltenen Erden zu thun hat. Gestützt wird diese Ansicht durch die Untersuchung verschiedener Präparate. Professor P. T. Cleve hatte die Güte, uns ausser dem vorstehend angeführten Samarium-Präparate, dessen Spectrum unten folgt, noch ein reineres in Form von schön krystallisiertem Samariumsulfat zu schicken. Die nachträgliche Untersuchung dieses Präparates ergab ein entschiedenes Zurücktreten der dem dritten Körper zugeschriebenen Linien gegenüber den dem Samarium zugeschriebenen.

Um diese Verhältnisse klarer hervortreten zu lassen, geben wir zunächst die vollständigen Messungen der Samarium- und Gadolinium-Präparate, hierauf die mit größter Wahrscheinlichkeit wirklich dem Samarium und Gadolinium zukommenden Spectren, und endlich das durch Zusammenfassung aller in beiden Spectren mit gleicher Intensität auftretenden Linien erhaltene voraussichtliche Spectrum des dritten Körpers.

λ	i	λ	i	λ	i
2170·75	1+	2319·12	1	2381·51	1
76·99	1	21·2	1+	86·11	1
77·84	1	23·30	1+	87·95	1
78·60	1	23·94	3	89·51	1+
91·07	1	27·2	1+	91·27	1+
91·93	1	29·45	3	91·85	1+
2224·07	3	29·7	1+	92·30	1+
26·4	1+	30·4	1+	93·35	1
35·04	1	35·10	1	93·97	1
36·88	1	37·5	1+	94·27	1
39·94	1	39·10	3	97·50	1
43·88	1	40·00	1	97·60	1
48·91	1	41·39	1	2408·53	1
50·28	1+	41·63	1	09·45	1
57·13	1	42·92	1	14·8	1+ Y?
61·22	1	46·65	1	17·62	1+
92·7	1+	49·98	1+	17·97	1+
93·00	1	53·3	1+	21·00	1+
93·64	1	54·51	1	37·74	1+
2300·50	1	56·1	1+	38·90	1+
00·67	1	60·91	1	41·67	1+
03·8	1+ d.	61·01	1	45·60	2+
05·99	1	62·54	1	46·09	1
06·42	1	63·39	4	46·86	1
07·15	2	65·31	1	48·25	1
11·2	1+	67·35	1 Y?	48·8	1+
12·2	1+	73·50	1	50·80	1+
13·75	1+	74·40	1+	54·31	1
14·18	1+	74·70	1+	54·75	1+
15·3	1+	75·56	1	57·58	1+
18·68	1	80·43	1	57·73	1+

λ	i	λ	i	λ	i
2460·0	1+ br.	2578·22	1	2655·69	5
61·4	1+ br.	78·86	1	56·65	1
64·05	1	81·0	1+ br.	60·94	1
65·7	1+	82·70	1	61·63	1+
66 93	2	83·75	2	64·56	1
67·50	1+	86·38	1+	65·4	1+ br.
68·30	2	88·35	1	65·92	1+
69·23	1	88 60	2	66·80	1+
69·59	1	89·45	1	68·38	1+
71·68	2	95·95	1	69·77	1+
74·25	1+	2602·0	1+	71·75	1+ d.
75·80	1	05·76	1	72·18	1
83 05	1	07·58	1	74·27	1
84·29	1	08·05	1+	75·88	1
85·81	1	09·88	1	78·16	1+
87·55	1	13·47	1	79·53	5 Gd
88·86	1	16·83	1+	80·7	1+ br.
90·8	1+	19·50	1	82·13	1+
96·50	1	21·3	1+	82·64	1+
99·63	1	28·20	7	83·1	1+
2507·00	1	29·03	1	86·35	1+
13·90	1	29·91	1	87·22	1+
14·00	1	32·40	1	92·44	1
20·49	2	33·42	1	92·91	1+ d.
29·31	1	34·63	1	93·95	1+
34·23	1	37·35	1+ d.	94·52	1
36·27	1	38·13	1	97·5	1+ br.
39·92	1	38·84	1	98·7	1+ br.
40·05	1	39·72	1+	2701·97	1
50·17	1	40·35	1+	03·00	1
51·70	2	40·65	1	03·38	1
53·97	3	43·1	1+ br.	04·75	1
54·10	2+	43·80	1	05·66	1+
57·8	1+ br.	44·7	1+ br.	09·20	1
59·2	1+ br.	46·19	1	17·41	4 Gd
64·60	4	46·94	1	18·32	1
66·09	2	47·38	1	27·85	2
71·7	1+ br.	48·45	1	29·15	1
73·71	3	49·55	1	32·72	1
77·35	1+	51·62	1+	36·35	1+

λ	i	λ	i	λ	i
2737·70	1+	2804·89	1	2893·82	1
41·33	1+	05·17	1	2903·29	1+
47 95	1+	06·22	1	04·83	5 Gd
48·48	1+	06·95	1	05·44	2
50·25	1	07·48	1	06·79	1
50·9	1+	08·48	1+	07·52	1+
53·05	1+	09·35	1	10·61	1 Nb?
54·55	1	09·83	3 Gd	11·9	1+ br.
56·6	1+	11·04	1	14·9	1+ br.
57·58	1	11 42	1	18·57	2+
58·01	1	11·92	1	23·46	1
59·49	1	12·25	1	28·05	1+
60·00	1+	12·65	1	28·5	1+
60·15	1+	13·49	1	28·7	1+
63·55	1	14·05	2	29·21	1+
64·20	2	15·48	1+	30·45	1+
65·75	1+	16·7	1+ br.	31·1	1+
67·95	1	17·1	1+ br. Y?	34·30	1
68·24	1	19·35	1	37·55	1+
68·75	1	19·7	1+	40·70	1+
69·90	2	20·90	1	41·05	1+
70·29	2	21·12	1	42·45	1+
71·34	1	29·47	1	43·70	1+
72·90	2	31·00	1	44·23	1
74·5	1+	33·85	1	44·8	1+ d.
74·9	1+	33·92	1 Gd	46·15	1+ Y?
76·2	1+	40·34	2 Gd	48·10	1+
77·6	1+	41·44	1	49·65	1
79·20	1	47·13	1	51·50	1
79·40	1	54·73	1	55·62	6
81·55	2	62·63	1 Cr?	61·07	1
87·8	1+	63·8	1+ br.	62·90	1
89·40	1+	65·20	1+	63·28	1
90·05	1+	66·00	1+	63·72	1
91·0	1+ br.	66·50	1+	65·60	1
92·09	2	78·57	2	66·10	1
94·57	1+	81·47	2	67·07	1
94·80	1+	85·72	1	71·04	1
97·07	3 Gd	88·90	2	73·5	1+ br.
98·36	1+	91·45	1+	75·50	1+

λ	i	λ	i	λ	i
2976·97	1	3090·10	2	3143·26	1
78·72	1 Ru?	92·20	1	45·13	3
79·40	1	96·3	1+	45·63	2
80·32	2	98·28	1	46·99	2
83·8	1+ br.	98·76	2	52·21	1
84·22	1	99·0	1+	52·62	1
89·90	1+	3100·66	5 Gd	56·63	3
91·70	1+ Ru?	01·31	1	60·82	1+
92·6	1+ br.	02·03	2	61·48	3
93·17	1	02·68	3	62·3	1+
99·20	3	04·57	1	67·0	1+
3003·01	2	05·7	1+	68·3	1+ Ir?
05·22	1	06 62	1+	69·57	1
10·29	4 Gd	08·50	1	69·99	1
12·35	1	10·05	1+	70·31	1
20·78	1	13·30	2	71·17	1
21·23	1+	15·8	1+ br.	76·72	2
22·3	1+ br.	17·1	1+ br.	77·58	1
22·85	1+	18·11	3	78·20	1
24·5	1+ br.	18·73	1	84·00	2
27·75	4 Gd	20·05	2	86·13	1
29·10	1	21·42	1	87·09	1
30·8	1+	21·90	1	87·29	2
33·00	4 Gd	23·80	1 Rh?	87·85	1
34·19	4 Gd	24·13	2	91·20	1+
40·46	1	25·05	1+	93·10	1
47·00	1	27·40	1+	93·2	1+
50·92	1+	27·85	1+	96·28	1
53·69	1	28·77	1+	3201·88	1
60·03	1	29·80	1+	05·00	1
64·45	1+	30·06	1+	06·57	1
68·75	3	30·52	1+ Nb?	07·30	1
72·70	3	30·93	1	07·9	1+
77·04	3	33·20	1	08·27	1
77·12	1	33·99	3	11·87	2
82·14	4 Gd	35·16	1+	12·95	1+
84·14	1 Rh?	36·36	1	14·18	1+
85·20	1	40·11	1	15·35	2
86·4	1+	40·92	1	16·94	2
86·5	1+	43·02	1+	18·70	2

λ	i	λ	i	λ	i
3219·52	1+	3257·2	1+ br.	3306·7	1+
20·0	1+ br.	59·40	1	07·16	2
21·45	1+	61·34	1	09·65	1+
22·90	1+	62·38	1	10·77	2
23·88	1	62·70	1	12·55	2
24·37	1	63·52	1 Nb?	13·89	1 Th?
25·56	2	65·06	1	15·0	1+
26 45	2	68·45	1	15·74	1
26·94	2	69·52	2	16·71	2
28·55	1+	70·64	1	19·68	1
28·87	1	70·80	1	20·29	1
30·65	2	72·7	1+	20·57	1
31·62	1	72·95	2	20·65	1
32·06	1	73·63	2	21·34	2
32·80	1+	74·33	1	23·93	1
33·65	1+	76·86	1	24·5	1+ br.
33·77	2	79·65	1	25·43	1
34·57	1	80·99	1	25·60	1+
36·73	2	81·74	2	28·04	1 Y?
37·3	1+	82·45	2	29·50	1
37·75	1+	84·80	1	30·51	2
37·98	1	85·77	1	31·54	3
38·74	1	86·34	2	32·29	3
39·74	2	86·65	1+	32·85	1+
41·25	2	90·50	1	33·43	1+
41·69	1	90·79	1	33·76	1
42·14	1	92·36	2	34·19	1
42·44	1 Y?	93·22	1	36·30	3
44·82	1	93·50	1	37·13	1+
47·30	2 Co?	95·56	1	40·73	2
47·68	1	95·95	1	41·54	1+ Pr?
49·86	1+	97·26	2	42·82	1+
50·34	1	98·20	2	43 61	1
50·49	1	98·65	1+	43·75	1
53·53	2	3301·06	1	44·50	1
54·07	2	01·80	2	45·2	1+
54·54	2	02·25	1+	46·14	2
55·76	1+	04·66	1	46·46	1
56·00	1+	05·30	1	47·0	1+ Ti?
56·6	1+ br.	06·51	3	47·44	1

λ	i	λ	i	λ	i
3348·83	1	3384·81	2	3418·26	1
49·5	1+ Ti?	85·17	1+	18·63	1
50·27	1 Ru?	85·53	1	18·87	3
50·67	7 Gd	87·17	1	19·90	1
51·02	1	87·81	1	.22·61	10
51·43	1	89·05	1	22·86	3
54·05	1+	89·46	2	24·07	2
54·34	1	91·02	1	24·73	3
54·85	1	91·30	1	25·78	1
55·49	1	91·45	1	26·06	2
58·60	2	91·99	1	26·36	1
58·79	6	92·70	3 (Ru?)	26·46	1
60·85	2	93·76	2	27·48	1
61·58	1	95·28	3	28·12	1
62·39	6 Gd	.96·33	2	28·59	2 Ru?
63·09	1	97·90	1+	29·86	1
64·10	1	98·57	1+	30·35	1
64·38	1	99·56	1	31·10	2
64·90	1	3400·12	2	31·60	1
65·74	1	01·21	1	32·75	1
66·03	2	02·20	3	33·15	3 (Co?)
67·39	1	02·61	2	33·77	2
67·80	1	03·23	1	34·5	1+
68·70	1	04·91	1	35·35	1
69·18	1	05·19	1	36·2	1+ br.
69·57	1	07·72	4	36·8	1+
69·75	1	08·80	2	38·16	1
70·72	1	09·45	1 Ru?	39·32	4
71·35	1	10·36	1	39·87	2
72·5	1+	10·59	1	40·11	4
73·56	1	11·4	1+	40·65	1
74·82	1	11·75	1+	41·91	1
75·2	1+	12·17	1	43·2	1+ br.
76·64	1	12·72	1	44·71	2
78·4	1+ br.	12·90	1	45·80	1
78·69	1	13·41	2	47·08	1
79·88	1	14·36	1	49·73	2
80·17	1	14·65	1	50·52	4
80·67	1	17·09	4	51·37	3
82·55	2	17·45	1 Ru?	52·83	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3453·36	1	3486·34	1	3517·18	1
53·67	1	87·0	1+ br.	17·99	!
54·26	2	87·55	1+	[illegible]	
55·05	2	89·47	1+	[illegible]	
57·18	2 Rh?	90·72	1		
58·02	1	91·91	2	[illegible]	3
59·30	1	92·12	3	24 74	1
59·51	1	92·80	1+	25·62	1
61·26	1	92·93	1+	25·9	1+ br.
61·54	1	93·57	1	27·01	1
62·10	1	93·75	1	28·02	1
62·80	1	94·18	1	28·68	2
63·14	1	94·58	5	30·74	1
64·17	6	95·2	1+ br.	31·82	1
65·24	1+	96 1	1+	32·70	1
66·00	1	97·54	1	34·35	1+
66·66	1	98·7	1+ br.	34·66	1+
67·10	2	99·97	1	35·07	1
67·44	4	3500·64	1	35·76	1
68·00	1	01·70	1+	36·37	1+
68·24	1	03·40	2+	36·91	1+
69·14	4	04·34	1	37·28	1
71·3	1+ br.	05·06	1	39·04	1+
72·26	1	05·70	4	40·5	1+ br.
73·40	4	07 01	1	42·50	1
74·10	1	07·20	1	42·93	3
75·21	1+ d.	08·70	1	43·50	1
76·45	2	09·25	2	45·13	1
77·95	1 Rh?	09·92	1	45·93	6 Gd
78·17	1	10·25	1	48·43	1
79·22	1	10·76	1	49·51	6 Gd
79·63	1	11·36	1	50·30	1
80·10	1	11·74	1	52·40	1
80·39	1	12·38	3	53·87	1
80·71	1	12·66	4	54·32	1
81·45	7	13·03	1	55·50	1
81·97	4	13·17	1	56·89	1
82·74	3	13·80	1	57·21	4
83·36	1	16·37	1	58·33	3
83·44	1	16·88	1	59·25	2

λ	i		λ	i		λ	i	
3560·42	1		3592·85	8		3625·43	2	
60·75	1		93·64	2		25·78	1+	
61·75	1		93·90	1		26·54	2+	
61·82	1		96·85	1		27·15	3	
64·20	2		98·10	1		27·57	2	
64·77	2		99·00	1		28·13	1	
66·30	1+		3600·93	1+	Y?	29·23	1+	
66·57	1+		01·14	3		29·66	2	
66·99	1		01·86	2		30·42	1	
67·32	1		02·16	1		30·83	1	Sc?
67·80	1		03·69	2		31·01	1	
68·41	4	r.	04·45	4		31·30	3	
69·75	1		05·05	1		33·27	1+	Y?
69·88	1+		05·44	2		33·47	1+	
72·09	3		05·83	2		34·41	4	
73·55	1+		07·27	2		34·90	2	
73·90	1+		08·07	1		35·05	2	
74·90	3		08·92	4		36·25	1+	
76·95	1+		09·67	4		38·90	3	
77·92	2		10·95	3		39·21	2	
78·51	2		11·10	2		39·53	2	
78·75	1+		12·60	1		40·35	2	
79·7	1+		13·06	1		41·54	3	
79·81	1		13·62	4		42·88	2	Ti?
80·77	2		14·40	1		43·86	1	
81·10	2	Sc?	14·93	1		44·88	1	
82·10	4		15·39	1		45·49	3	
82·82	1		16·60	1		45·77	3	
83·56	1		16·82	1		46·36	7	Gd.
84·07	1+		17·31	4		47·40	1	
84·43	1		18·23	1		49·17	1	
85·15	6	Gd.	20·28	1		49·63	3	
85·70	1		20·63	2	Rh?	50·33	1	
85·98	1		20·73	2		51·10	3	
86·71	1		21·15	1		51·37	3	
87·35	1	Ru?	21·40	3		51·68	1	
87·64	1		22·66	1		52·72	3	
90·64	3	Sc?	22·98	2		54·80	5	r.
91·60	1		23·47	2		55·70	1	
92·11	1		25·05	3		56·33	5	

λ	i	λ	i	λ	i
3657·97	1	3689·03	1	3717·63	2
59·76	1 Nb?	91·2	1+ br.	18·5	1+
61·51	4	91·75	1	19·05	3
61·83	1	92·40	1	19·64	7 Gd
62·43	4	92·95	1+	20·74	1
62·83	1	93·10	1+	22·00	3
63·06	1	93·75	1+	22·20	1
63·80	1	94·17	4	22·80	1
64·79	8 Y? Gd	94·49	1	23·45	1+
66·00	1	94·92	1	23·87	1+
66·45	1	96·53	1	25·08	4
66·82	1	96·94	2	25·63	2
68·06	2	97·90	5	26·45	1
68 32	1	99·35	1+	26·95	1
68·48	1	99·90	4	27·50	1
70·99	5	3700·35	2	28·61	4
71·39	5 Gd	00·74	1	29 08	1
72·17	1+ Pt?	01·07	1 Rh?	29·90	2
72·38	1+	01·35	1	31·00	4
74·22	1	01·74	1	31·42	4
74·60	1	03·51	1	32·60	1
75·6	1+	03·65	1	33·22	3
76·52	1	04·06	1	35·53	1
76·99	1	05·2	1+	36·10	3
77·93	2	05·73	1	37·63	1
78·26	1	06·93	2	38·42	1
79·38	1+	07·15	2	39·32	5
80·15	1	08·56	2	39·90	1
81·14	1	08·82	3	40·19	2
81·89	1	09·32	1	41·44	3
82·4	1+	09 8	1+ d.	42·05	1
82·72	1	10·45	1 Y?	43·62	6
82·90	1	11·03	1	44·02	2
83·65	1+ Ta?	11·70	2	44·98	1
84·30	2	12·27	1	45·75	3 Ru?
84·69	1	12·90	6 Gd	46·20	1 Zr?
86·50	3	13·74	1 La?	46·6	1+ br.
87·25	1	15·38	1	47·77	2
87·91	4	15·85	1	48·26	1
88·55	2	16·51	4	48·40	1

λ	i	λ	i	λ	i
3748·77	1	3768·60	10 Gd	3796·57	6
49·03	1	69·59	2 Ni?	97·40	1
49·97	1+	70·18	1	97·85	2
50·4	1+ d.	70·40	1	99·3	1+ Pd?
50·86	1	70·85	5	3800·48	1 Pr?
51·28	1	71·35	1	00·86	1+
51·73	1	71·48	1+	01·03	2
51·90	1	74·45	3	01·43	3
52·42	1	74·82	1	02·94	1+
52·80	1	78·27	3 Rh?	04·08	1
53·22	1	78·90	1	04·23	1
53·35	1	79·70	1	05·24	2
53·75	1	80·60	1	05·68	4
54·42	1	80·91	2	06·25	1
54·87	1	81·06	2	06·92	1
55·05	1	82·50	6 Gd	07·75	2
55·43	3	83·20	2	09·55	1
55·7	1+ br.	83·50	1	10·00	1
56·22	1	83·92	1	10·30	1
56·53	2	84·53	1	10·57	1
56·66	2+	84·90	1	10·65	1
57·68	2	85·45	1	11·18	1
57·90	1	86·33	1	12·22	3
58·45	3	87·70	4	13 77	1
58·57	1+	88·25	3	14·13	4 Gd
59·15	3	88·62	1	14·92	3
60·20	2	89·1	1+	15·64	1
60 84	3	90·05	1+	16·79	3
61·1	2+	90·60	1 Ru?	18·43	1+ Y? Pr?
62·75	2	90·76	1	18·89	2
63·16	1	90·95	1	19 83	5
63·47	1	91·32	4	20·97	1
64·33	2	91·88	1	21·95	1 Pr?
64·50	2	92·54	3	22·46	2
64·75	1	94·14	3	23·39	1+
65·60	1	94·51	1	23·68	1+
66·85	1+	94·90	1	24·35	1
67·20	3	95·45	1	24·52	1
67·52	2	95·65	1+	24·70	1
67·91	2	96·06	1	25·20	1

λ	i	λ	i	λ	i
3826·22	1	3873·40	1	3913·15	1
26·39	3	75·34	1	13·55	1
27·75	1	75·72	2	13·8	1+
28·6	1+	77·36	1	14·26	1
29·28	1	84·02	1	15·8	1+ br.
31·66	2	84·17	1	16·70	8
33·06	1+ Y?	84·53	1	17·57	2
33·21	1	84·85	1	18·23	1
33·77	1	85·50	5	18·43	1
34·36	1	86·09	1	18·74	1
35·14	2	86·47	1 La?	22·24	1
36·26	1	87·30	2	22·58	4
37·05	3	87·9	1+	24·53	1+
39·09	1	89·01	1	25·5	2+
39·79	2	89·38	3	28·46	4
42·40	4	90·27	3	29·06	1
44·74	3	91·05	1	30·67	8
46·14	1	91·38	1	32·78	1+
46·45	1	92·86	1+	33·15	1
47·15	1	93·53	1	34·98	2
47·69	1	94·25	2	35·32	1
48·93	2+	94·90	4	35·90	2
49·95	1	95·45	1	37·21	2
50·83	3	95·99	3	38·25	1
51·16	3	97·15	3	39·13	1
52·07	1	97·72	1	39·77	1+
52·62	4 r.	98·65	1+	41·42	1
53·44	1	99·4	1+	42·01	3
54·34	2	99·7	1+	42·79	1 Rh?
56·01	2	3901·07	1	43·38	2
60·12	1	02·57	4	43·77	1
60·41	1	03·60	4	44·84	1
62·21	1	05·82	1	45·67	1
62·42	1	07·00	1	46·65	2
63·22	2	07·31	5	47·55	1
68·25	1	08·35	1	47·98	1
70·50	1	09·45	1	48·25	3
70·74	1	10·33	1	49·39	1
71·95	2	10·40	1	50·76	1+
72·37	1	11·13	1	52·18	2

λ	i	λ	i	λ	i
3953·55	1	3981·02	1	4013·99	3
54·4	1+	81·23	1	15·92	1
55·15	1+	82·05	1+	17·05	1+
57·87	5	83·28	4	17·85	1
58·87	1	86·13	1	19·65	1
59·68	6	86·80	3	20·0	1+
60·28	1	87·05	1	20·15	2
60·69	1	87·34	2	22·51	2
61·70	2	87·57	2	23·41	4
61·99	1	87·98	1	28·05	1+
62·31	1	89·39	2	28·32	1+
62·41	1	90·15	3	30·55	1+
63·19	3	91·19	1	30·65	1+
63·81	2	93·41	4	33·1	1+
64·52	1	94·31	3	33·66	1
66·20	2	96·48	4	35·27	3
66·50	1	97·08	1	37·52	5
67·01	1	97·93	3	38·11	4
67·42	1	98·49	1	39·3	1+
67·85	2	99·80	1+	39·68	1+
67·94	1	4000·59	1	39·87	2
69·17	1	01·42	3	41·85	2
69·46	2	02·13	1	42·87	1
70·70	3	02·8	1+	43·09	2
71·26	1 Pr?	03·05	1+	43·44	1
71·55	3	03·61	2	43·90	1
71·94	1 Gd	03·85	1	44·24	1
72·16	4	04·03	1	45·20	4
72·3	2+	04·43	1	46·24	1
74·15	2	05·10	4	47·00	2
74·61	2	06·74	1	47·31	2
74·80	1	06 99	1	47·5	1+
75·27	1	07·64	2	47·98	1
75·34	1	08·27	1+	48·78	2
76·10	1	08·46	2	49·6	4+
76·43	3	09·09	3	50·10	7
76·60	3	09·39	1	50·80	1
77·00	1	11·9	1+	51·95	1+
77·86	1	12·4	1+ Nd?	53·45	5
79·37	4	13·0	1+	53·80	2

λ	i	λ	i	λ	i
4054·86	1	4085·78	7	4122·20	1
55·44	1	86·31	1	22·66	2
56·17	1	87·85	3	23·16	1
57·02	1+	88·9	1+ br.	24·11	3
57·82	1+	89·6	1+ br.	26·01	1
58·00	1+	90·58	1	27·90	1
58·39	3	91·92	1	28·25	1+
59·03	2	92·41	4	29·37	2
59·54	2	92·90	1	29·87	10
60·03	1	93·20	1	30·56	10
61·23	1	94·21	2	31·65	3
61·46	2	94·67	3	32·45	6
62·20	1	98·20	1	33·33	1
62·76	5	98·79	8	34·35	1
63·59	4	99·05	4+ r.	35·31	2
63·72	4	4100·04	1+ Pr?	35·61	1+
64·47	1	00·44	1	36·05	1+
64·73	4	01·03	1	37·28	5 Ta? Gd
66·32	1+	01·48	1+	39·1	1+ br.
66·89	3	02·9	1+ br.	39·80	1 Nb?
67·55	1 La?	03·85	1+	40·64	1
68·48	3	04·28	2	41·20	1
70·50	3 Gd	05·95	1	42·9	1+ br.
71·12	1	06·78	2	44·1	1+
73·36	2 Gd	07·52	4 Ce?	44·47	1+
73·98	5 Gd	07·97	1	44·95	1+
76·00	3	08·52	2	46·90	2
76·75	1	09·17	1+	47·89	2
77·01	1	09·56	2	49·35	1+
78·11	1	10·36	2	50·00	3
78·60	4	10·77	2	50·80	1+
78·86	2	11·60	3	51·80	1
80·71	2	11·94	2	52·39	5
82·13	1	12·41	1	53·50	3 r.
82·78	3	14·06	3	55·03	1
83·40	1	15·55	2 Ce?	55·38	2
83·77	2	16·59	2	58·57	1
84·16	1	18·70	4	59·60	2+
84·55	2	19·73	2+	60·05	1
84·87	2	21·53	2	60·50	1

λ	i	λ	i	λ	i
4161·0	1+	4192·32	1	4245·35	1
62·17	1+	97·27	4	46·76	2
62·90	3	97·87	5	47·58	1 Nd?
63·29	3	99·65	2	48·4	1+
63·90	1	4202·74	2	49·72	2
64·42	1+	03·20	6	51·45	1
65·62	1+	05·07	4	51·92	6 Gd
66·20	1	05·22	6	53·53	3
66·51	1	06·31	3	53·81	5
66·96	1+	06·80	3	55·7	1+
67·40	1	07·36	1	56·60	5
67·81	1	07·65	1	58·76	2
69·63	5	10·52	4	59·6	1+
70·30	2	12·21	6 Ru?	60·33	1
70·75	1+	15·20	6	62·30	6 Gd
71·75	2	17·39	6	62·89	4
72·6	1+	18·27	1+	65·25	3
73·1	1+	20·35	2	68·95	2
73·77	2	20·87	6	69·96	1
74·28	1	22·05	1	71·01	2
74·60	2	22·78	1	74·34	1
75·70	2	23·23	1 Pr?	75·20	1+ Nd?
76·14	1	23·89	2	76·40	1
76·55	1+	24·44	1	78·39	1
77·45	1+ Nd?	25·35	2	78·73	1+
78·19	2	25·53	4 Pr?	79·88	5
79·10	1	26·05	3	80·17	3
79·55	1+ Pr?	27·34	1	80·67	4
80·21	1	28·25	1	81·00	4
80·57	1+	29·91	6	81·15	3+
81·04	2	31·2	1+	82·40	2
81·31	2	32·65	1	83·02	2
83·50	1+	34·75	4	83·70	1
83·95	3	36·07	2	84·71	1 Nd?
84·45	10	36·91	5	85·70	4
85·15	1+	37·84	3	85·99	1
88·30	5	38·95	4	86·30	1
90·97	2	41·47	1	86·84	3
91·29	4	44·04	2	88·5	1+ br.
92·10	2	44·90	3	89·52	1

λ	i	λ	i	λ	i
4290 10	2 Ce?	4329·19	7	4370·10	2
90·79	1	29·76	1	70·43	1
91·82	1	30·20	2	70·70	1
92·39	3	30·51	1	73·64	3
95·65	1	30·79	3	74·03	2
95·95	1	31·10	1	74·45	1
96·26	3	31·60	1	75·15	3 Y?
96·55	3	34·31	6	78·40	4
96·95	3	35·49	1	80·63	1
97·36	3	36·30	2	80·86	2
98·60	1	36·95	1+	82·25	2
4302·23	1	37·73	1	83·31	3
03·66	1+	39·14	1	84·49	3
04·26	1	39 50	1	86·42	1
05·11	4	40·13	1	87·87	3
06·55	2	41·47	5	89·18	1
09·20	5	42·38	8 r.	89·87	1+
11·18	2	44·47	2	90·15	1+
13 05	1	46·03	3	91·10	6 r.
13·51	1	46·60	3	91·66	1 Gd
14·00	3	46·79	2+	92·26	1
14·56	1	47·51	3	92·82	1
14·90	1	47·98	6	93·45	1
15·54	1	50·68	5	94·90	1
16·21	3	52·29	5	97·05	1+
16·4	2+	53·97	1	97·67	4
16·90	1	54·24	1	4400·05	1
19·12	8	58 03	1+	00·35	1+
19·70	2	59·33	1	01·33	2
20·71	1	59·86	1	02·05	3
21·30	3	60·88	3	03·28	3
22·04	1	61·23	3+	03·57	3
22·39	1	62·21	4	05·82	1
23·48	5	63·10	2	06·86	4
24·25	2	63·64	2	07·67	1
24·69	1	64·31	1	08·42	4
25·80	3 Gd	65·56	1	09·50	4
26·52	1	68·22	4	11·32	1
27·31	6	69·38	1	11·74	1
27·70	1	69·95	2 Gd	12·00	1

λ	i	λ	i	λ	i
4413·65	1+	4459·48	1	4514·73	2+ Gd
14·32	2	63·0	1+	15·30	4
14·90	1	63·46	1	17·4	1+
16·17	1	64·07	1	19·82	5
17·75	3	64·94	1	20·30	1
19·20	4	66·73	3	21·50	1
19·50	1	67·49	12	22·18	2 Gd
20·70	6	69·85	1	22·77	2
21·33	8	71·09	2	23·23	4+
22·56	2	71·51	2	24·10	5
24·52	10	72·60	3	32·66	1+
25·20	1	73·20	4	33·40	1
26·30	1+	74·35	1	34·01	1
27·20	1	75·36	1	36·70	2
27·73	2	76·31	2	38·10	6
27·9	1+	78 81	4	38·71	1
29·20	1+	78·98	2 Gd	40·28	4 d.?
29·81	2	80·54	1	42·22	3
30·80	2	83·55	3	44·10	5
31·9	1+ br.	84·68	1+	44·99	1
33·25	1+	84·95	1+	45·95	1+
34·03	6	85·72	1	48·18	1
34·50	8	86·55	2	51·15	1
35.71	8	87·10	1	52 80	4
36·38	5	88·61	1	54·61	2
38·41	3	95·3	1+ br.	55·16	1+
41·96	2	97·34	1	56·67	1+
42·43	1	98·49	2	58·26	1
42·6	1+	99·33	1	59·2	1+
44·40	5	99·69	4	60·60	3
45·30	3	4501·0	1+	61·33	1+
46·0	1+	01·58	1	63·57	1+
46·75	1	03·46	1	64 25	1
50·14	1 Pr?	05·25	2	66·39	5
51·16	1+	06·51	2	71·1	1+
52·90	6	07·13	1+	73·97	1+
54·12	1	0 9·2	1	76·06	1+
54·81	6	11·52	1	77 85	5
56·27	1	12·03	5	78·86	1+
58·71	6	12·52	1+	79·24	1

λ	i	λ	i	λ	i
4579·75	1	4613·68	1+	4669·56	4
80·49	1+	14·67	1	69·83	5
81·3	1+ br.	15·60	3	71·00	1
81·90	2+	15·90	4	74·80	5
82·67	3+ Gd	16·7	1+	77·10	4
83·25	1	27·41	4	81·8	1+
85·00	4	30·40	1+	82·82	1
89·62	1	36·46	1	83·53	1
92·00	3	36·87	1+	87·38	2
93·73	5	39·2	1+	88·90	1
94·21	5	40·35	1+	93·81	1
94·77	1	42·46	5	94·54	1
95·48	5	45·61	1	97·62	1+
96·93	1+	46·88	2	4704·59	3
97·16	1 Gd	47·76	1	13·25	2
98·10	2	48·36	1	15·46	1
98·51	1	49·7	1+	16·29	1
99·05	1	52·88	1	17·91	1
4601·25	2	53·77	1	18·51	1
03·2	1+	55·27	2	20·02	1
04·35	2	62·09	3	23·9	1+
06·69	2	63·75	1	26·2	1+
07·15	1+	64·49	1	28·59	2
08·20	1+	65·32	1	32·77	1

LIX. Gadolinium.

Das Gadoliniumspectrum ist bisher vollständig unbekannt. Das verwendete Präparat erhielten wir von Professor L. F. Nilson, der es selbst seinerzeit direct von Marignac erhielt. Das Spectrum ist sehr linienreich, wie das des Samariums. Wir beobachteten 1476 Linien, doch gehören diese sicher nicht alle dem Gadolinium an, aus Gründen, die schon beim Samariumspectrum erörtert wurden. An Verunreinigungen waren Y und Sa zu constatieren, möglicherweise enthält dasselbe aber auch Spuren von Pb, Pt, Rh, Ru, Pd, Ir, Os, Cr, Co, Ni, Mn, Mo, Va, Ti, Zr, Ta, Nb, Th, Y, Sc, La, Nd, Pr und Ce. Diese letzteren Verunreinigungen sind im folgenden als fraglich bezeichnet.

Ein zweites Gadolinium-Präparat, das wir als sehr rein durch die Güte des Professors P. T. Cleve erhielten, zeigte ein Spectrum, das Linie für Linie identisch war mit dem des Präparates von Marignac, nur zeigte es die dem Yttrium zuzuschreibenden Linien etwas stärker.

λ	i	λ	i	λ	i
2177·00	1	2339·10	3	2434·81	1
77·85	1	39·99	1	35·0	1+ br.
91·2	1+	42·15	1+	37·75	1+
92·01	1	42·90	1+	38·86	1+ Rh ?
2224·05	3	46·65	1	45·64	2
28·5	1+	61·0	1+ br.	46·54	1
35·12	1	62·03	3	46·88	1
36·90	1	62·45	1+	47·85	1
39·9	1+	63·40	4	48·30	1 Rh?
43·85	1	67·34	1 Y?	48·9	1+ Zr?
47·02	1	73·49	1 Mo?	50·1	1+ br.
50·28	1	74·42	1+	50·85	1+
57·16	1	80·38	1+	54·34	1
61·18	1	81·52	1	54·62	1
77·90	1	87·94	1	57·80	1
79·9	1+	89·53	1+	59·0	1+ Rh?
86·80	1+	91·65	1	60·0	1+
87·42	1+	92·37	1+	60·7	1+
92·65	1+	93·34	1+	61·40	2+
92·97	1	94·03	1+	61·95	2
93 65	1	94·30	1+	65·72	1
2300·50	1+	97·5	1+ br.	66·90	2
03·05	1+	2402·53	1+	68·32	2
03·95	1+	03·45	1+	69·22	1
07·17	2	04·05	1	69·60	1
13·7	1+	08·53	1	71·70	2
·21·22	1	09·46	1	73·45	1
23·26	1+	14·79	1 Y?	74·26	1+
23·91	3	17·70	1+	74·85	1
27·09	1	17·95	1+	75·81	1
29·47	3	22·76	1	77·33	1
35·12	1+	23·30	1+	83·8	1+
36·1	1+	28·45	1	85·80	1+ Rh?

λ	i	λ	i	λ	i
2486·44	1	2619·48	1	2684·10	1
87·55	1	28·22	8	86·38	1+
88·84	2	29·07	1+	87·21	1 Cr?
89·56	1	29·66	1+	90·18	1
96·47	1	29·90	1	92·76	1+
97·00	1+	33·39	1+	92·95	2+
99·63	1	34·60	1+	93·40	1+
2520·48	2	36·56	1+	94·54	2+
34·23	1	37·35	1+	97·48	1
36·22	1	38·15	1	2703·01	2
51·70	2	40·64	1	03·40	2
54·00	4	41·75	1	07·56	1
54·17	3+	43·85	1+	17·40	10
56·98	1+	44·7	1+ d.	20·61	1
57·82	1+	46·20	1	53·40	2
64·60	5	46·60	1	64·22	2
65·12	1+	46·96	1	68·63	1 Cr?
65·52	1+	48·50	1	69·93	2
66·09	2.	49·61	1	70·29	2
71·67	1+	51·60	1	79·21	1+
73·70	4	54·17	1+	79·45	1+
77·00	1	55·71	7	81·54	3
77·4	1+ br.	56·66	1	90·95	2+
78·25	1	60·96	1	92·06	2
78·86	1	61·65	1 Ru?	94·76	1
83·74	3	63·33	1+	97·03	5
86·3	1+	64·6	1+	2808·45	1+
88·34	1	65·41	1+	09·81	5
88·59	2	65·95	1+	11·03	1
94·2	1+	69·75	1	14·1	1+
95·91	1	71·79	1+	17·13	1 Y?
2601·95	1+	72·20	1+	33·91	3
03·65	1+	74·25	1	40·36	3
07·51	1	75·87	1	41·45	1
08·0	1+	78·16	1	56·65	1+
08·64	1+	79·53	10	57·97	1+
09·87	2	80·7	1+ br.	58·45	1 +
13·27	1+	82·17	1	62·61	1 Cr?
13·48	1+	82·63	1+	65·17	1+
16·83	1+ Pt?	83·10	1	66·50	1+

λ	i	λ	i	λ	i
2881·46	3	2993·18	1+	3120·04	2
85·71	1	99·19	4	20·2	1+
2904·84	8	3003·00	3	21·4	1+
05·43	3	05·22	1	21·90	1+
07·6	1+	10·26	6	23·83	1 Rh?
10·63	1 Nb?	12·30	1	24·12	2
14·9	1+	22·2	1+	27·35	1+
18·57	3	27·71	6	27·75	1+
23·46	1	29·03	1	28·62	2+
24·38	1	30·75	1+	29·84	1
30·4	1+ br.	32·98	7	30·10	1
33·1	1+ br. Mn?	34·19	6	30·50	1 Nb?
42·45	1+	40·47	1	30·95	1
44·23	1+	53·68	2	33·36	1 Ir?
44·9	1+ br.	66·6	1+ br.	33·97	3
46·0	1+ br.	68·75	4	35·13	1
48·0	1+ br.	72·69	4	37·5	1+
49·63	1+	77·05	4	38·1	1+
55·62	8	82·11	6	40·91	1
61·05	1+	83·45	1+	43·03	1
61·7	1+ br.	84·11	1 Rh?	43·25	2
63·25	1+	85·2	1+	45·10	4
63·68	1+ Rh?	86·83	1+	45·62	4
65·52	1+	90·08	2	47·00	3
66·8	1+	92·17	1 Mo?	56·64	4
67·02	1+	98·75	2	60·82	1
72·3	1+	99·0	1+	61·49	4
73·5	1+ br.	3100·63	7	68·3	1+ Ir?
75·55	1+ Mo?	01·28	1	69·60	1
76·95	1+	02·03	1	71·24	1
78·73	1+ Ru?	02·69	4	72·4	1+
79·5	1+	05·66	1	73·0	1+
80·29	3	08·47	2	76·76	2
82·3	1+ br.	13·27	2	77·15	1+ Ru?
83·8	1+ br.	15·95	1+	82·6	1+
84·25	1+	16·7	1+ br.	87·23	1
87·4	1+	17·2	1+ br.	91·2	1+ br.
89·0	1+ Ru?	18·11	4	93·3	1+ br.
90·05	1+	18·69	1	3200·5	1+ br.
91·65	1+ Ru?	19·20	1	03·3	1+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
3206·60	1	3292·37	3	3367·83	1
07·87	1	98·66	1	68·0	1+ Mo?
09·8	1+	3302·3	1+ Pd?	69·80	2
11·7	1+ br.	07·2	1+ Cr? Sa	73·00	1
13·0	1+	13·31	1+	73·54	1
15·40	1	13·55	1	74·85	1
16·84	1 Y?	13·89	2 Th?	79·90	2
17·3	1+ br.	14·33	1+	80·17	1
23·90	1	15·74	1	80·67	2
24·45	1	16·70	2	82·0	1+
25 60	1 Nb? Ta?	20·61	2	82·55	1+ Sa
26·45	2	24·56	1	85·56	1
32·38	1+	27·1	1+ br.	86·50	1+
34·12	1+	28·05	1+ Y?	89·05	1
36·26	1 Ti?	29·50	2	91·05	1
36·75	1+ Ti?	30·51	3	91·46	1
37·77	1	31·56	4	92·69	4 (Ru?)
38·75	1	32·31	4	93·76	2
39·74	1 Sa	32·86	1+	95·28	4
41·3	1+ br. Sa	33·4	1+	99·54	1
42·45	2 Y?	34·22	1	3400·13	3
47·33	1+ Co?	36·31	4	01·22	1
50·35	2	37·12	1	02·21	4
52·95	1+	46·14	3	03·23	1
55·95	1	46·9	1+ Ti?	05·17	1
56·6	1+ br.	49·55	1+ Ti?	07 73	5
57·3	1+ br.	50·30	2+ Ru?	08·78	1
59·40	1	50·70	10	09·43	2 (Ru?)
62·7	1+ br.	53·50	1	10·32	1
63·53	1 Nb?	56·7	1+ br.	10·57	1
68·49	1	58·62	3	11·73	1
70 67	1	58·79	8	12·15	1
73·5	1+ d.	60·38	1	12·7	1+
74·13	1 (Co, Ni, Pt)?	60·89	3	12·9	1+
74·35	2	62·41	10	13·40	2
79·67	2	63·11	1	14·37	1+
81·76	2	64·41	1	15·47	1+
82·47	2 Ti?	65·03	1+	17·08	4
87·35	1+ (Mo, Pd)?	65·77	1	17·45	1 Ru?
89·28	1+ Rh?	66·0	1+	18·88	4

λ	i	λ	i	λ	i
3422·62	12	3477·97	1 Rh?	3535·12	1
22·85	3	78·23	1	37·30	2
24·06	3	79·67	1	40·5	1+ br.
24·74	3	80·70	1	42·51	1
25·74	1	81·48	8	42·94	4
26·17	2	81·99	5	43·5	1+
26·48	2	82·75	3	44·25	1
27·52	1	83·93	1 Ni?	45·14	2
28·62	2	84·12	1	45·96	9
30·33	2	86·32	2	47·8	1+
31·13	2	87·67	1+	48·43	1
31·61	1	89·45	1	48·65	1
33·16	4 (Co?)	91·90	2	49·53	10
34·55	1+	92·11	3	53·7	1+
36·20	1+	94·60	5	57·21	5
39·36	5	95·20	1+	58·31	4
39·90	3	96·1	1+	58·66	2
40·11	6	97·52	1	59·22	1
41·93	1	99·4	1+	60·75	1
47·07	1	99·6	1+	61·4	1+
49·75	2	3500·95	1+	61·87	1
50·57	6	01·7	1+ br.	62·08	1+
51·40	3 (Pd?)	03·39	1 Sa	63·31	1
54·29	3	05·71	5	63·55	1
55·04	3	06·8	1+	64·22	2
56·9	1+	07·2	1+	64·78	2
57·22	2 Rh?	09·27	1 Ru? Sa	66·30	1 Va?
62·14	2 Rh?	10·34	1	67·30	2
63·16	2	10·76	1	67·82	1 Sc?
64·19	8	12·41	3	68·42	2 Sa
65·20	1	12·69	4	69·16	1
65·70	1	16·95	1	69·75	1
66·69	1	18·01	1	70·5	1+ br.
67·09	2	18·8	1+	72·09	3
67·44	5	22·60	1	74·90	3
68·24	1	24·37	3	76·1	1+
69·16	5	28·70	3	76·58	1+ Sc
72·30	1 Rh?	31·81	1	76·93	1+
73·41	4	34·38	1	78·50	3
76·48	2	34·72	1	79·70	2

λ	i	λ	i	λ	i
3582·10	5	3625·05	3	3665·98	1
85·14	10	25·43	2	66·38	1+ Rh?
85·98	1	26·51	2	68·45	2
86·72	1	27·1	1+ Sa	70·97	1 Sa
87·34	1 Ru?	29·30	1+	71·39	8
90·61	4 (Sc?)	29·66	3	72·14	1 Pt?
91·63	1	30·41	1	73·91	1
92·10	1	31·05	1	74·21	1 Pt?
92·87	8	31·33	1 Sa	74·59	1
93·62	2 Cr?	33·27	1 Y?	76·52	1
96·52	1+	34·43	2 Sa	77·2	1+
96·82	1+	34·90	3	78·0	1+
97·88	1 Ni?	36·96	1	79·35	1
98·97	1	37·3	1+	81·89	1+
3600·90	1 Y?	38·6	1+	82·46	1+
01·13	3	39·22	3	82·91	2
02·11	2 Y?	40·35	2	84·26	2
03·0	1+	41·53	3	84·95	1+
04·43	1 Sa	42·7	1+	85·25	1+
05·05	1	42·95	1+ Sc?	85·96	1
05·41	3	44·73	1+	86·47	4
05·82	2	45·51	1+ Sc? Sa	87·24	1
07·26	3	45·76	4	87·90	5
08·05	1	46·36	12	89·23	1
08·47	1+	49·15	1	89·50	1
08·92	5	49·59	3	90·06	1+
09·32	1	50·60	1	91·20	1+
09·63	1 Pd? Sa	51·10	3	93·11	1
10·93	3	51·38	3	93·76	1
11·10	3+	52·71	4	94·17	2 Sa
13·03	1	53·22	1+	94·47	1
13·58	4	54·79	6	94·88	1
14·36	1	56·32	6	95·78	1+
16·60	1	57·30	1	96·20	1+
17·29	4	57·96	1+	96·54	1+
18·20	1	59·73	1 Nb?	96·90	3
20·59	3 (Rh?)	61·50	1 Sa	97·90	5
21·36	1 Co?	61·81	2	98·42	1 Zr?
22·35	1+	62·41	4	99·89	5
22·96	3	64·76	15 Y?	3700·70	1

λ	i	λ	i	λ	i
3701·07	1 Rh?	3728·34	1	3755·68	2
02·5	1+	28·59	1 Sa	56·23	1
02·65	1+	28·80	1	56·45	1
03·01	1	29·19	1	56·75	1+
03·64	1	29·93	1+	57·46	1
04·05	1	31·01	5	57·88	2
05·1	1+ br.	31·38	1 Sa	58·10	1
07·12	1	32·60	2+	59·17	3
07·36	1	33·21	3	60·14	1+ Ru?
08·80	1 Sa	34·63	1+	60·50	1
09·30	1	35·55	1	60·85	3
10·42	2 Y?	36·10	1 Sa	61·12	3
10·82	1+	36·65	1+	61·47	1
11·02	1+	37·75	1+	61·75	1+ Ru?
11·8	1+	38·48	1+	62·39	1
12·89	10	39·27	2	62·48	1
13·68	2	39·86	2	62·96	1
13·93	1	40·16	3	63·15	1
15·01	1	41·40	1 Th?	63·48	2
15·34	1	42·02	2	64·38	3
16·49	4	42·36	1	64·75	2
17·00	1	43·62	8	65·40	1
17·59	2	44·8	1+	66·45	1+
18·40	1+	44·98	1	66·6	1+
18·80	1	45·69	2 Ru?	67·18	3
19·02	1 Sa	46·15	1 Zr?	68·52	20
19·62	12	46·59	2+	69·59	2 Ni?
20·04	2	48·22	2+ Ti?	70·13	1 Rh?
20·55	1	48·99	2	70·37	1
20·97	1	49·96	1+	70·86	4
22·00	1 Sa	50·31	1+	71·37	1
22·21	2	51·21	1+	72·27	2 (Cy)
23·36	1+	51·65	1+	73·10	1
23·85	2+	51·85	1+ Zr?	73·36	1
24·92	1	52·35	1	73·70	1
25·02	1	52·75	1+ Th?	74·23	1
25·61	3	53·30	1+	74·47	2 Y?
26·46	2	53·73	1 Ru?	76·13	2
27·10	1	54·42	1	77·00	1
27·49	1	55·40	2	78·26	1 Rh? Sa

λ	i		λ	i		λ	i	
3778·90	2		3798·55	1		3818·88	2	
79·4	1+		99·33	1	Pd?	19·20	1	
79·92	2	(Cy)	3800·09	1		19·81	1	Sa
80·64	2		00·45	1	Pr?	20·95	2	(Cy)
80·95	1+		00·82	1		21·66	1	
81·80	2	(Cy)	01·45	4		21·91	1	(Cy)
82·49	12		02 94	1		22·40	3	Rh?
83·20	3		03·22	2	(Cy)	23 00	1	
83·65	2	Ni? (Cy)	04·09	1		23·38	1	
83·96	2	d.	04·25	1		23 62	1	
84·56	1		04·85	2	(Cy)	25·17	1	
85·18	1		05·23	2		26·20	2	
85·47	2		05·65	3		27 46	2	
86·34	1		06·26	1		28·57	1+	
87·71	4		06·55	2		33·15	2	
88·27	1	Sa	06·96	1		33·85	1	
88·60	1	Rh?	07·76	2		34·70	1	
88·82	1	Y?	08·07	1		35·10	2	
89·00	1		08·27	1		36·63	3	(Cy)
89·13	1		08·83	1		37·04	3	
89·48	1		09·23	2		39·75	2	
90·06	1+		09·57	1		41·03	1	
90·63	1	Ru?	09·85	2	(Cy)	46·08	1	
90·79	1		10·40	1		46·86	1	
90·99	1	La?	10·71	1		55·72	3	(Cy)
91·30	4		10·90	1		57·06	1	
91·89	1		11·16	1		57·27	1	
92·54	2		11·47	2	(Cy)	58·02	1	
92·72	2+	(Cy)	12·21	2+		59 30	1	
93·04	1+		13·12	1		60·36	1	
93·89	2	(Cy)	13·46	1		63·18	2	
94·13	1	Sa	13·59	1		64·18	2	(Cy)
94·50	2		14·12	6		64·67	2	(Cy)
95·45	1		14·95	3		84·12	1	
95·65	1		15·63	1		84·52	1	
95·93	1		15·93	1		84·82	1	
96·08	1		16·76	3		85·43	1	
96·58	6		17·50	1		87 27	1	Sa
97·34	1		17·81	2	(Cy)	87·76	1	
98·05	2	(Cy)	18·36	1	Rh?	89·06	1	

λ	i		λ	i		λ	i	
3889·3	1+	Sa	3943·37	1	Sa	3983·23	2	
90·25	1	Sa	43·75	1		86·86	1	
91·00	1		44·82	1		87·39	3	
94·89	4		45·66	2		88·02	1	
95·40	2		46 65	1		89·43	2	
95·93	3		47·06	1		90·21	1+	
96·56	1		47·96	1		91·90	1	Nd?
97·12	1		48·26	1	Sa	92·89	1	
98·55	1		49·38	2		93·39	2	Sa
98·65	1		50·55	1+	Y?	93·75	1	
99 36	1		52·15	2		94·36	3	
3901·0	1+		52·79	1		96·50	5	(Co?)
02·54	4		53·19	1		97·94	3	
03·55	1	Sa	53 53	1		4000·59	1	
04·04	1		57·85	5		01·42	3	
04·43	1		59·69	6		02·11	1	
05·78	1	Ta?	60·27	1		04·00	2	
07·25	1		62·28	1		05·08	3	
08·3	1+		63·18	1	Sa	05·62	1	
10·33	1		63·81	3		07·4	1+	
11 55	1+		66·19	1	Sa	07·6	1+	
13·94	1		66·44	1		08·46	1	
16·70	8		67·03	1		09 03	3	
17·55	1		70·70	1	Sa	09·36	2	
18·20	1		71·25	2		12·4	1+	Nd?
18·41	1		71 56	1	Sa	13·96	3	
22·55	1		71·94	3		14 03	1+	
23·43	3		72·1	2+	br. Sa	17 02	1	
25·57	1+		72·35	1	Sa	17·34	1	
28·40	1		72·88	1		17·83	1	
30·66	1	Sa	74·16	3	r.	19·9	1+	
33·14	1		75 00	1		20 05	1+	
34·97	3		75·26	2		20·55	1+	Sc?
35·52	1		76·45	1	Sa	22·50	3	
37·2	1+		76·58	1	Sa	23·30	2	Rh?
38·27	2		77·0	1+		23·49	2	
39·12	2		79·40	1	Sa	27·78	1	
40·04	1+		79·50	1		28·03	1	
41·99	1	Sa	82 1	1+		28·30	1	
42·79	1	Rh?	82·79	1		31·03	1	

λ	i	λ	i	λ	i
4031·50	1	4066·25	1+	4111·57	4
33·65	1	66·8	1+ Os?	11·91	2
35·26	1	68·48	1 Sa	13·90	1+
35·56	1	70·49	5	15·51	2 Ce?
36·99	1	73·33	4	15·99	1
37·51	6	73·95	7 r.	16·30	1
38·08	4 r.	78·04	4	16·98	1
39·64	2+	78·84	3	18·31	1 Ce?
39·80	2	80·67	1	18·67	1 Sa
42·9	1+	82·70	1	20·66	1
43·85	1	83·85	1	21·21	1
44·23	1	84·09	1	21·56	1
45·15	2	84·84	1	23·11	2
45·31	2	85·75	8	23·83	1
46·99	3	86·83	1	24·10	1 Sa
47·23	1	87·26	1	24·66	1
47·96	2	87·81	4	26·0	1+ br.
48·75	2	88·8	1+ br.	27·86	2
49·60	3	90·23	1	28·50	1+ Y?
50·08	6	90·56	1	29·87	2 Sa
51·1	1+ br.	90·93	1	30·55	10
52·0	1+ br.	92·41	1 Sa	31·62	3
52·70	1	92·84	2	32·42	4
53·42	6	93·83	1	34·32	1
53·80	2	94·60	3	35·57	1
54·86	2	97·00	1	37·27	7 Ta?
55·45	1+	98·16	1	40·64	1
56·17	1	98·78	6 Sa?	41·18	1
56·98	1	99·05	4+	42·7	1+
58·03	1 Pb?	4100·03	1 Pr?	44·39	1
58·38	3	00·41	1	44·91	1
59·54	3	01·00	1	46·9	1+ Ru?
60·04	1	01·45	1	47·4	1+
60·41	1+ Ti?	05·18	1	49·98	1 Sa
61·46	3	05·92	1+	50·85	2+
62·75	6	07·53	1+ Ce? Sa	51·81	2+
63·54	5	08·55	2	52·45	2+ (Cy?)
63·74	3+	09·10	1	53·67	2+
64·73	1 Sa	09·59	1 Nd?	55·02	2
65·78	1	10·75	3	57·1	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4157·65	1+	4223·21	1 Pr? Nd?	4288·5	1+ br.
58·31	1	24·45	1+	89·56	1
58·58	1	25·33	3	90·10	2 Ce?
60·05	1	26·02	3	92·43	1+
60·45	1+	27·34	2	92·99	1
61·00	1+	29·98	4	96·30	3
62·91	3	31·20	1	96·51	3+
63·28	2	32 66	1	97·38	4
64·45	1+	34·73	1 Sa	98·63	1
65·24	1 Nd?	35 25	1	4303·67	1+
65·59	1	36·06	2	04·27	1
67·33	1+	36·89	1 Sa	05·09	4
67 82	1+	37·83	1+ Sa	06·54	2
69·45	1+	38·95	4	08·42	1
70·29	2	41·47	2	09·19	1 Sa
71·90	2	44·02	3	09·48	1
73·75	2	44·89	1 Mo? Sa	11·16	2
75 71	2	45·9	1+	14·03	2
81·06	2	46·72	3	14·49	1
84·48	10	51·94	10	14·58	1
85·15	1	53·58	3	16·22	3
88·29	2 Sa	53·82	5	16·35	2+
90·98	2	55·66	1+	19·13	1 Sa
91·30	3	56·57	2 Sa	20·71	1
91·85	1	60 30	1	21·33	3
93·38	1	62·33	10	22·38	2
96·14	1	62·88	1 Sa	23·47	1 Sa
97·30	3	68 93	2	24·24	3
97·86	5	71·03	1+	24·74	1
4202·70	2	74·35	1	25·83	6
03·21	1 Sa	75·2	1+ Nd?	26·54	1
05·08	5	78 40	1	27·34	5
05·22	2 Sa	79·90	1 Sa	29·19	1 Sa
06·82	1 Sa	80·19	1 Sa	29·76	1
08·96	1	80 68	4	30·53	1
09·65	1	80·79	3	30·80	4
12·20	5 Ru?	81·01	1 Sa	31·13	1+
15·18	5	83·02	1	31·59	1
17·37	5 Ru?	86·01	1	33·45	1
20·83	1 Ru? Sa	86·31	1	34·36	1 Sa

λ	i	λ	i	λ	i
4335·49	1	4394·93	1	4464·92	1
37·73	1	97·69	4	66·72	4
41·50	5	4400·36	1	67·27	2
42·39	10	00·96	1 Nd?	67·46	3 Sa
44·50	2	02·04	3	71·48	3
44·65	1+	03·31	2	72·61	1
46·67	3	06·88	5	73·19	1 Sa
46·80	2+	08·44	4	74·31	2
47·53	4	09·46	1 Sa	76·30	2
47·99	1 Sa	11·34	1	78·98	4
50·66	1 Pr? Sa	13·64	1	83·54	4
52·27	1 Sa	14·33	2	84·67	1
54·25	2	14·92	2	84·90	1
56·96	1+	19·20	4	86·57	3
58 04	1+	20·70	1 Os? Sa	87·08	1
59·34	1	21·41	4	88·60	1
59·84	1	22·57	2	97·33	1
61·11	3	24·3	1+	97·52	1
62·20	1 Sa	24·53	2 Sa	98 43	3
64·31	1	25·2	1+	99·70	1+ Sa
68·20	1 Sa	26 31	1	4501·03	1+
69·36	1	27·18	1	06·52	3
69·97	4	27·79	1	07·15	1
70·38	1	30·80	2	07·87	1+
73·67	1 Sa	33·81	1	09 27	1 ·
74·04	2	34·06	1 Sa	10·56	1+
74·45	1	34·50	2 Sa	12·05	1 Sa
75·11	2 Y?	35·75	1+ Sa	14·74	4
78·40	1 Sa	36·38	5	15·26	1 Sa
78·74	1	37·60	1+	17·30	1+
80·86	3	38·41	4	19·84	3 Sa ?
82 25	2	44·44	1 Sa	20·29	2
83·31	3	46·66	2	21·51	1
87·88	4	50·15	1+ Pr?	22·20	4
89·18	1	52·90	1 Sa	23·08	3 r. (Ti?)
89·90	1+	54·10	1	24·11	1 Sa
90·13	1+	54·81	1 Sa	24·6	1+
91·12	4 Sa?	58·70	1 Sa	36·7	1+
91·65	3	63·02	1	37·15	1+
92·25	1	63·44	1	38·01	2

λ	i	λ	i	λ	i
4540·22	5	4583·52	1	4664·5	1+ br.
42·22	1 Sa	85·03	1+ Sa	66·67	1+
44·13	1 Sa	93·75	1+ Sa	69·6	1+ Sa
44·42	1+	94·21	1 Sa	69·85	1+ Sa
48·17	1	95·01	1	74·8	1+ Sa
51·15	1	97·19	3	76·1	1+ br.
51·67	1+	98·10	3	76·5	1+ br.
52·8	1+ Sa	99·08	1	77·1	1+ br. Sa
55·14	1+	4601·29	3	80·3	1+ br.
58·26	2	08·24	1+	83·55	1+
66·39	1 Sa	14·68	1	94·51	1
71·17	1+	15·62	1+ Sa	97·6	1+
74·03	1	15·90	1+ Sa	4704·6	1+ Sa
76·06	1	27·44	1 Sa	12·2	1+ br.
77·86	1 Sa	36·83	1	13·05	1+
79·76	1	39·19	1+	21·55	1+
81·27	1	42·43	1 Sa	24·00	1+
81·43	1+	46·52	1+	26·98	1+
82·68	6 d.	53·77	1+	28·70	2
83·26	1	55·18	1+	32·82	2

In den folgenden drei Tabellen geben wir die vermuthlich dem Samarium, Gadolinium und dem dritten, unbekannten Körper zukommenden Spectren, soweit sie sich aus den vorausgeschickten directen Beobachtungen und den schon erörterten Verhältnissen ersehen lassen.

Tabelle der vermuthlichen Samariumlinien,

d. h. jener Linien, welche im Gadoliniumspectrum entweder gar nicht oder mit wesentlich schwächerer Intensität erscheinen. Die Zahl dieser Linien beträgt 1137.

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
2170·75	1+			2421·0	1+		
78·60	1			41·67	1+		
91·07	1			46·09	1		
91·93	1			48·25	1		
2226·4	1+			48·8	1+		
35·04	1			54·75	1+ br.		
48·91	1+			57·58	1+		
61·22	1			57·73	1+		
2300·67	1			64·05	1		
05·99	1			67·50	1+		
06·42	1			83·05	1		
11·2	1+			84·29	1		
12·2	1+			90·8	1+		
14·18	1+			2507·00	1		
15·3	1+			13·90	1		
18·68	1			14·00	1		
19·12	1			29·31	1		
27·2	1+			36·27	1		
29·7	1+			39·92	1		
30·4	1+			40·05	1		
37·5	1+			50·17	1		
41·39	1			59·2	1+ br.		
41·63	1			81·0	1+ br.		
49·98	1+			82·70	1		
53·3	1+			89·45	1		
54·51	1			2605·76	1		
56·1	1+			07·58	1		
60·91	1			21·3	1+		
61·01	1			32·40	1		
62·54	1			38·84	1		
65·31	1			39·72	1+		
74·70	1+			40·35	1+		
75·56	1			43·1	1+ br.		
80·43	1			47·38	1		
86·11	1			48·45	1		
91·27	1+			49·55	1		
91·85	1+			66·80	1+		
93·97	1			68·38	1+		
97·60	1			69·77	1+		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
2·44	1			2789 40	1+		
2·91	1+ d.			90·05	1+		
3·95	1+			91·0	1+ br.		
8·7	1+ br.			94·57	1+		
1·97	1			98·36	1+		
4·75	1			2804·89	1		
5·66	1+			05·17	1		
9·20	1			06·22	1		
18·32	1			06·95	1		
27·85	2			07·48	1		
29·15	1			09·35	1		
32·72	1			11·42	1		
36·35	1+			11·92	1		
37·70	1+			12·25	1		
41·33	1+			12·65	1		
47·95	1+			13·49	1		
48·48	1+			14·05	2		
50·25	1			15·48	1+		
50·9	1+			16·7	1+ br.		
53·05	1+			19·35	1		
54·55	1			19·7	1+		
56·6	1+			20·90	1		
57·58	1			21·12	1		
58·01	1			29·47	1		
59·49	1			31·00	1		
60·00	1+			33·85	1		
60·15	1+			47·13	1		
63·55	1			54·73	1		
65·75	1+			63·8	1+ br.		
67·95	1			66·0	1+		
68·24	1			78 57	2		
68·75	1			88·90	2		
71·34	1			91·45	1+		
72·90	2			93·82	1		
74·5	1+			2903·29	1+		
74·9	1+			06·79	1		
76·2	1+			10·61	1 Nb?		
77·6	1+			11 9	1+ br.		
87·8	1+			28·05	1+		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolin	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
2928·5	1+			3110·05	1+		
28·7	1+			15·8	1+ br.		
29·21	1+			18·73	1		
31·1	1+			25·05	1+		
34·30	1			27·85	1+		
37·55	1+			28·77	1+		
40·70	1+			29·80	1+		
41·05	1+			30·06	1+		
43·70	1+			33·20	1		
44·8	1+ d.			36·36	1		
46·15	1+ Y?			40·11	1		
48·10	1+			52·21	1		
49·65	1			52·62	1		
51·50	1			62·3	1+		
62·90	1			67·0	1+		
63·72	1			69·99	1		
65·60	1			70·31	1		
66·10	1			71·17	1		
67·07	1			77·58	1		
71·04	1			78·20	1		
79·40	1			84·00	2		
89·90	1+			86·13	1		
92·6	1+ br.			87·09	1		
3020·78	1			87·29	2		
21·23	1+			87·85	1		
22·85	1+			93·10	1		
24·5	1+ br.			93·2	1+		
29·10	1			96·28	1		
47·00	1			3201·88	1		
50·92	1+			05·00	1		
60·03	1			07·30	1		
64·45	1+			08·27	1		
77·12	1			11·87	2		
86·4	1+			14·18	1+		
86·5	1+			15·35	2		
96·3	1+			16·94	2		
98·28	1			18·70	2		
3104·57	1			19·52	1+		
06·62	1+			20·0	1+ br.		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
21·45	1+			3276·86	1		
22·90	1+			80·99	1		
24·37	1			84 80	1		
25·56	2			85·77	1		
26·94	2			86 34	2		
28·55	1+			86·65	1+		
28·87	1			90·50	1		
30·65	2			90·79	1		
31·62	1			93·22	1		
32·06	1			93·50	1		
32·80	1+			95·56	1		
33·65	1+			95·95	1		
33·77	2			97·26	2		
34·57	1			98·20	2		
36·73	2			3301·06	1		
37·3	1+			01·80	2		
37·98	1			04 66	1		
39·74	2	3239·74	1	05·30	1		
41·25	2	41·3	1+ br.	06·51	3		
41·69	1			06·7	1+		
42·14	1			07·16	2 Cr?	3307·2	1+ Cr?
44·82	1			09·65	1+		
47·68	1			10·77	2		
49·86	1+			12·55	2		
50·49	1			15·0	1+		
53·53	2			19·68	1		
54·07	2			20·29	1		
54 54	2			20·57	1		
55·76	1+			20·65	1		
56 00	1+			21·34	2		
61·34	1			23·93	1		
62·38	1			24·5	1+ br.		
65·06	1			25·43	1		
68·45	1			25·60	1+		
69·52	2			40·73	2		
70·80	1			41·54	1+ Pr?		
72·7	1+			42 82	1+		
72·95	2			43·61	1		
73·63	2			43·75	1		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3344·50	1			3404·91	1		
45·2	1+			11·4	1+		
46·46	1			14·65	1		
47·44	1			18·26	1		
48·83	1			18·63	1		
51·02	1			19·90	1		
51·43	1			25·78	1		
54·05	1+			26·06	2		
54·34	1			26·36	1		
54·85	1			27·48	1		
55·49	1			28·12	1		
61·58	1			29·86	1		
64·10	1			32·75	1		
64·90	1			33·77	2		
66·03	2			35·35	1		
67·39	1			36·8	1+		
68·70	1			38·16	1		
69·18	1			40·65	1		
69·57	1			43·2	1+ br.		
69·75	1			44·71	2		
70·72	1			45·80	1		
71·35	1			52·83	1+		
72·5	1+			53·36	1		
75·2	1+			53·67	1		
76·64	1			58·02	1		
78·4	1+ br.			59·30	1		
78·69	1			59·51	1		
82·55	2	3382·55	1+	61·26	1		
84·81	2			61·54	1		
85·17	1+			62·10	1		
87·17	1			62·80	1		
87·81	1			66·00	1		
89·46	2			68·00	1		
91·30	1			71·3	1+ br.		
91·99	1			74·10	1		
96·33	2			75·21	1+ d.		
97·90	1+			78·17	1		
98·57	1+			79·22	1		
3402·61	2			80·10	1		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
0·39	1			3532·70	1		
3·36	1			34·66	1+		
3·44	1			35·07	1		
7·0	1+ br.			35·76	1		
7·55	1+			36·37	1+		
0·72	1			36·91	1+		
2·80	1+			39·04	1+		
2·93	1+			50·30	1		
3·57	1			52·40	1		
3·75	1			53·87	1		
4·18	1			54·32	1		
8·7	1+ br.			55·50	1		
9·97	1			56·89	1		
00·64	1			60·42	1		
03·40	2+	3503·39	1	61·75	1		
04·34	1			61·82	1		
05·06	1			66·57	1+		
07·01	1			66·99	1		
08·70	1			68·41	4 r.	3568·42	2
09·25	2	09·27	1 Ru?	69·88	1+		
09·92	1			73·55	1+		
10·25	1			73·90	1+		
11·36	1			77·92	2		
11·74	1			78·75	1+		
13·03	1			79·81	1		
13·17	1			81·10	2 Sc?		
13·80	1			82·82	1		
16·37	1			83·56	1		
16·88	1			84·07	1+		
17·18	1			84·43	1		
17·99	1			85·70	1		
21·3	1+			87·64	1		
23·22	1			93·90	1		
24·74	1			98·10	1		
25·62	1			3601·86	2		
25·9	1+ br.			02·16	1		
27·01	1			03·69	2		
28·02	1			04·45	4	3604·43	1
30·74	1			09·67	4	09·63	1 Pd?

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3612·60	1			3672·38	1+		
14·93	1			74·22	1		
15·39	1			75·6	1+		
16·82	1			76·99	1		
20·26	1			77·93	2		
20·73	2			78·26	1		
21·15	1			80·15	1		
21·40	3			81·14	1		
22·66	1			82·72	1		
23·47	2			83·65	1+ Ta?		
25·73	1+			84·69	1		
27·15	3	3627·1	1+	88·55	2		
27·57	2			89·03	1		
28·13	1			91·75	1		
30·83	1 Sc?			92·40	1		
31·30	3	31·33	1	92·95	1+		
33·47	1+			94·17	4	94·17	2
34·41	4	34·43	2	94·92	1		
35·05	2			99·35	1+		
36·25	1+			3700·35	2		
38·90	3			01·35	1		
39·53	2			01·74	1		
42·88	2 Ti?			03·51	1		
43·86	1			05·73	1		
44·88	1			06·93	2		
45·49	3	45·51	1+ Sc?	07·15	2		
47·40	1			08·56	2		
50·33	1			08·82	3	3708·80	1
51·68	1			09·8	1+ d.		
55·70	1			11·70	2		
61·51	4	61·50	1	12·27	1		
62·83	1			13·74	1 La?		
63·06	1			15·38	1		
63·80	1			15·85	1		
66·45	1			18·5	1+		
66·82	1			19·05	3	19·02	1
68·06	2			20·74	1		
68·32	1			22·00	3	22·00	1
70·99	5	70·97	1	22·80	1		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3·45	1+			3765·60	1		
5·08	4			66·85	1+		
6·95	1			67·52	2		
8·61	4	3728·59	1	67·91	2		
9·08	1			70·18	1		
1·42	4	31·38	1	71·48	1+		
36·10	3	36·10	1	74·82	1		
37·63	1			78·27	3	3778·26	1 Rh?
38·42	1			79·70	1		
39·32	5			80·60	1		
39·90	1			80·91	2		
41·44	3			81·06	2		
44·02	2			83·50	1		
47·77	2			83·92	1		
48·26	1			84·90	1		
48·40	1			88·25	3	88·27	1
48·77	1			89·1	1+		
49·03	1			90·95	1		
50·4	1+ d.			94·14	3	94·13	1
50·86	1			94·90	1		
51·28	1			97·40	1		
51·73	1			97·85	2		
51·90	1			3800·86	1+		
52·42	1			01·03	2		
52·80	1			06·92	1		
53·22	1			10·00	1		
53·35	1			10·30	1		
54·87	1			10·57	1		
55·05	1			10·65	1		
56·53	2			13·77	1		
56·66	2+			18·43	1+ Y? Pr?		
57·68	2			19·83	5	3819·81	1
57·90	1			21·95	1 Pr?		
58·45	1			22·46	2		
58·57	1+			23·68	1+		
60·20	2			24·35	1		
60·1	1+			24·52	1		
62·75	2			24·70	1		
64·50	2			26·39	3		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3827·75	1			3886·47	1 La?		
29·28	1			87·30	2	3887·27	1
31·66	2			87·9	1+		
33·06	1 Y?			89·01	1		
33·21	1			89·38	3	89·3	1+
33·77	1			90·27	3	90·25	[illegible]
34·36	1			91·05	1		
35·14	2			91·38	1		
36·26	1			92·86	1+		
39·09	1			93·53	1		
39·79	2			94·25	2		
46·14	1			95·45	1		
46·45	1			95·99	3		
47·15	1			97·15	3		
47·69	1			97·72	1		
48·93	2+			98·65	1+		
49·95	1			99·4	1+		
52·07	1			99·7	1+		
53·44	1			3901·07	1		
54·34	2			03·60	4	3903·55	[illegible]
56·01	2			05·82	1		
60·12	1			07·00	1		
60·41	1			07·31	5		
62·21	1			08·35	1		
62·42	1			09·45	1		
63·22	2			10·40	1		
68·25	1			11·13	1		
70·50	1			13·15	1		
70·74	1			13·55	1		
71·95	2			13·8	1+		
72·37	1			18·74	1		
73·40	1			22·24	1		
75·34	1			22·58	4		
75·72	2			23·48	3		
77·36	1			24·53	1+		
84·02	1			25·5	2+		
84·17	1			28·46	4		
85·50	5			29·06	1		
86·09	1			30·67	8	30·66	1

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*
32·78	1+			3981·23	1		
35·32	1			83·28	4		
35·90	2			86·13	1		
39·77	1+			86·80	3		
41·42	1			87·05	1		
42·01	3	3941·99	1	87·34	2		
43·38	2	43·37	1	87·57	2		
47·55	1			87·98	1		
48·25	3	48·26	1	89·39	2		
50·76	1+			90·15	3		
54·4	1+			91·19	1		
55·15	1+			93·41	4	3993·39	2
58·87	1			94·31	3		
60·69	1			97·08	1		
61·70	2			98·49	1		
61·99	1			99·80	1+		
62·41	1			4002·8	1+		
63·19	3	63·18	1	03·05	1+		
64·52	1			03 61	2		
66·20	2	66·19	1	03·85	1		
66·50	1			04·43	1		
67·42	1			06·74	1		
67·85	2			06·99	1		
67·94	1			07·64	2		
69·17	1			08·27	1+		
69·46	2			11·9	1+		
70·70	3	70·70	1	13 0	1+		
71·55	3	71·56	1	15·92	1		
72·16	4	72·1	2+ br.	19·65	1		
72·3	2+	72·35	1	20·15	2		
74·61	2			23·41	4		
74·80	1			30·55	1+		
75·34	1			30·65	1+		
76·10	1			33·1	1+		
76·43	3	76·45	1	39·3	1+		
76 60	3	76·58	1	39·68	1+		
77·86	1			39·87	2		
79·37	4	79·40	1	41·85	2		
81·02	1			43·09	2		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
4043·44	1			4098·20	1		
43·90	1			98·79	8	4098·78	6
45·20	4			4102·9	1+ br.		
46·24	1			03·85	1+		
47·31	2			04·28	2		
47·5	1+			06·78	2		
50·80	1			07·52	4 Ce?	107·53	1+
57·02	1+			07·97	1		
57·82	1+			09·17	1+		
58·00	1+			09·56	2		
59·03	2			10·36	2		
61·23	1			12·41	1		
62·20	1			14·06	3		
64·47	1			16·59	2		
64 73	4	4064·73	1	18 70	4	18·67	1
66·32	1+			19·73	1+		
66·89	3			21·53	2		
67·55	1 La?			22 20	1		
68·48	3	68·48	1	22·66	2		
71·12	1			23·16	1		
76·00	3			24·11	3	24·10	1
76·75	1			27·90	1		
77·01	1			28·25	1+		
78 11	1			29·37	2		
80·71	2			29 87	10	29·87	2
82·13	1			33·33	1		
82·78	3			35·31	2		
83·40	1			35·61	1+		
83·77	2			36·05	1+		
84·16	1			39·1	1+ br.		
84·55	2			39·80	1 Nb?		
86·31	1			42 9	1+ br.		
89·6	1+ br.			44·1	1+		
91·92	1			44·47	1+		
92·41	4	92·41	1	46·90	2		
92·90	1			47·89	2		
93·20	1			49·35	1+		
94·21	2			50·00	3	49·98	1
94·67	3			52·89	5		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
153·50	3 r.			4210·52	4		
55·38	2			18·27	1+		
59·60	2+			20·35	2		
62·17	1+			20·87	6 Ru?	4220·83	1 Ru?
63·90	1			22·05	1		
65·62	1+			22·78	1		
66·20	1			23·89	2		
66·51	1			25·53	4 Pr?		
66·96	1+			28·25	1		
67·40	1			34·75	4	34·73	1
69·63	5			36·91	5	36·89	1
70·75	1+			37·84	3	37·83	1+
71·75	2			44·90	3 Mo?	44·89	1 Mo?
72·6	1+			45·35	1		
73·1	1+			47·58	1 Nd?		
74·28	1			48·4	1+		
74·60	2			49·72	2		
76·14	1			51·45	1		
76·55	1+			56·60	5	56·57	2
77·45	1+ Nd?			58·76	2		
78·19	2			59·6	1+		
79·10	1			62·89	4	62·88	1
79·55	1+ Pr?			65·25	3		
80·21	1			69·96	1		
80·57	1+			76·40	1		
81·31	2			78·73	1+		
83·50	1+			79·88	5	79·90	1
83·95	3			80·17	3	80·19	1
88·30	5	4188·29	2	81·00	4	81·01	1
92·10	2			81·15	3+		
92·32	1			82·40	2		
93·35	1			83·70	1		
99·65	2			84·71	1 Nd?		
4203·20	6	4203·21	1	85·70	4		
05·22	6	05·22	2	86·84	3		
06·31	3			90·79	1		
06·80	3	06·82	1	91·82	1		
07·36	1			92·39	3		
07·65	1			95·65	1		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
4295·95	1			4373·64	3	4373·67	1
96·95	3			78·40	4	78·40	1
4302·23	1			80·63	1		
09·20	5	4309·19	1	84·49	3		
13·05	1			86·42	1		
13·51	1			91·10	6 r.	91·12	4
14·90	1			92·82	1		
15·54	1			93·45	1		
16·90	1			97·05	1+		
19·12	8	19·13	1	4400·05	1		
19·70	2			01·33	2		
22·04	1			03·57	3		
23·48	5	23·47	1	05·82	1		
24·69	1			07·67	1		
27·70	1			09·50	4	4409·46	1
29·19	7	29·19	1	11·74	1		
30·20	2			12·00	1		
34·31	6	34·36	1	16·17	1		
36·30	2			17·75	3		
36·95	1+			19·50	1		
39·14	1			20·70	6	20·70	1 Os
39·50	1			21·33	8		
40·13	1			24·52	10	24·53	2
46·03	3			27·73	2		
46·60	3			27·9	1+		
47·98	6	47·99	1	29·20	1+		
50·68	5	50·66	1	29·81	2		
52·29	5	52·27	1	31·9	1+ br.		
53·97	1			33·25	1+		
60·88	3			34·03	6	34·06	1
61·23	3+			34·50	8	34·50	2
62·21	4	62·20	1	35·71	8	35·75	1+
63·10	2			41·96	2		
63·64	2			42·43	1		
65·56	1			42·6	1+		
68·22	4	68·20	1	44·40	5	44·44	1
70·10	2			45·30	3		
70·43	1			46·0	1+		
70·70	1			46·75	1		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*
51·16	1+			4552·80	4	4552·8	1+
52·90	6	4452·90	1	54·61	2		
54 81	6	54·81	1	56·67	1+		
56 27	1			59·2	1+		
58·71	6	58·70	1	60·10	3		
59·48	1			61·33	1+		
64·07	1			63·57	1+		
67·49	12	67·46	3	64·25	1		
69·85	1			66·39	5	66·39	1
71·09	2			73·97	1+		
72·10	3			77·85	5	77·86	1
73·20	4	73·19	1	78·86	1+		
75·36	1			79·24	1		
78·81	4			80·49	1+		
80·54	1			81·90	2+		
85·72	1			85·00	4	85·03	1+
95·3	1+ br.			89·62	1		
99·33	1			92·00	3		
99·69	4	99·70	1	93·73	5	93·75	1+
01·53	1			94·21	5	94·21	1
03·46	1			94·77	1		
05·25	2			95·98	5		
11·52	1			96·93	1+		
12 03	5	4512·05	1	98·51	1		
12·52	1+			4603·2	1+		
15·30	4	15·26	1	04·35	2		
19·82	5	19·84	3	06 69	2		
22·77	2			07·15	1+ br.		
23·23	4+			13·68	1+		
24·10	5	24·11	1	15·60	3	4615·62	1+
32·66	1+			15·90	4	15·90	1+
33·40	1			16·7	1+		
34·01	1			27·41	4	27·44	1
38·10	6			30·40	1+		
38·71	1			36·46	1		
42·22	3	42·22	1	40·35	1+		
44·10	5	44·13	1	42·46	5	42·43	1
44·99	1			45·61	1		
45·95	1+			46·88	2		

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
4647·76	1			4687·38	2		
48·36	1			88·90	1		
49·7	1+			93·81	1		
52·88	1			4704·59	3	4704·6	1+
55·27	2			13·25	2		
62·09	3			15·46	1		
63·75	1			16·29	1		
65·32	1			17·91	1		
69·56	4	4669·6	1+	18·51	1		
69·83	5	69·85	1+	20·02	1		
71·00	1			23·9	1+		
74·80	5	74·8	1+	26·2	1+		
77·10	4	77·1	1+ br.	28·59	2		
81·8	1+			32·77	1		
82·82	1						

Tabelle der vermuthlichen Gadoliniumlinien,

d. h. jener Linien, welche im Samariumspectrum entweder gar nicht, oder mit wesentlich geringerer Intensität auftreten. Die Zahl dieser Linien beträgt 582.

Gadolinium		Samarium		Gadolinium		Samarium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
2191·2	1+			2303·95	1+		
2228·5	1+			27·09	1		
35 12	1			36·1	1+		
47·02	1			42·15	1+		
61·18	1			61·0	1+ br.		
77·90	1			62·03	3		
79·9	1+			62·45	1+		
86·80	1+			80·38	1+		
87·42	1+			91·65	1		
2303·05	1+			94·03	1+		

Gadolinium		Samarium		Gadolinium		Samarium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
2402·53	1+			2648·50	1		
03·45	1+ br.			49·61	1		
04·05	1			54·17	1+		
22·76	1			63·33	1+		
23·30	1+			69·75	1		
28·45	1			79·53	10	2679·53	5
34·81	1			84·10	1		
35·0	1+ br.			90·18	1		
46·54	1			92·76	1+		
47·85	1			92·95	2+		
48·30	1 Rh?			93·40	1+		
48·9	1+ Zr?			2707·56	1		
50·1	1+ br.			17·40	10	2717·41	4
54·62	1			20·61	1		
57·80	1			53·40	2		
59·0	1+ Rh?			68 63	1 Cr?		
60·7	1+			90·95	2+		
61·95	2			97·03	5	97·07	3
73·45	1			2809·81	5	2809·83	3
74·85	1			14·1	1+		
77·33	1			33·91	3	33·92	1
83·8	1+			40·36	3	40·34	2
86·44	1			56·65	1+		
89·56	1			57·97	1+		
97·00	1+			58·45	1+		
2536·22	1			2904·84	8	2904·83	5
56·98	1+			24·38	1		
65·12	1+			33·1	1+ br. Mn?		
65·52	1+			44·9	1+ br.		
77·00	1			46·0	1+ br.		
94·2	1+			48·0	1+ br.		
2603·65	1+			49·63	1+		
07·51	1			61·7	1+ br.		
08·64	1+			63·68	1+ Rh?		
13·27	1+			65·52	1+		
29·66	1+			66·8	1+		
36·56	1+			67·02	1+		
41·75	1			72·3	1+		
46·60	1			79·5	1+		

Gadolinium		Samarium		Gadolinium		Samarium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
2982·3	1+ br.			3224·45	1		
87·4	1+			25·60	1 Ta?		
89·0	1+ Ru?			32·38	1+		
90·05	1+			34·12	1+		
3010·29	6	3010·29	4	36·26	1 Ti?		
27·71	6	27·75	4	36·75	1 Ti?		
29·03	1			52·95	1+		
32·98	7	33·00	4	68·49	1		
34·19	6	34·19	4	73·5	1+ d.		
66·6	1+ br.			74·13	1 Pt?		
82·11	6	82·14	4	87·35	1+ Pd?		
83·45	1+			89·28	1+ Rh?		
86·83	1+			3307·2	1+ br. Cr?		
3100·63	7	3100·66	5	13·31	1+		
15·95	1+			13·55	1		
16·7	1+ br.			14·33	1+		
18·69	1			20·61	2		
19·20	1			24·56	1		
20·2	1+			27·1	1+ br.		
27·75	1+			50·70	10	3350·67	7
28·62	2+			53·50	1		
29·84	1			56·7	1+ br.		
30·10	1			60·38	1		
33·36	1 Ir?			62·41	10	62·39	6
37·5	1+			65·03	1+		
38·1	1+			66·0	1+		
71·24	1			68·0	1+ Mo?		
72·4	1+			69·80	2		
73·0	1+			73·00	1		
77·15	1+ Ru?			82·0	1+		
82·6	1+			86·50	1+		
87·23	1			3415·47	1+		
3200·5	1+ br.			25·74	1		
03·3	1+ br.			26·17	2		
09·8	1+			27·52	1		
11·7	1+ br.			56·9	1+		
15·40	1			62·14	2 Rh?		
16·84	1 Y?			65·70	1		
17·3	1+ br.			78·23	1		

Gadolinium		Samarium		Gadolinium		Samarium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3483·93	1 Ni?			3636·96	1		
84·12	1			37·3	1+		
87·67	1+			38·6	1+		
99·4	1+			42·7	1+		
99·6	1+			42·95	1 Sc?		
3500·95	1+			44·73	1+		
06·8	1+			46·36	12	3646·36	7
10·34	1			50·60	1		
16·95	1			53 22	1+		
18 01	1			57·30	1		
18·8	1+			64·76	15 Y?	64·79	8
34·72	1			66·38	1+ Rh?		
35·12	1			71·39	8	71·39	5
44·25	1			72·14	1 Pt?		
45·96	9	3545·93	6	73·91	1		
47·8	1+			77·2	1+		
48 65	1			78·0	1+		
49·53	10	49·51	6	84·95	1+		
53 7	1+			85·25	1+		
58·66	2			85 96	1		
61·4	1+			89·23	1		
61·87	1			89·50	1		
62·08	1+			90·06	1+		
63·31	1			94·88	1		
63·55	1			95·78	1+		
69·16	1			96·20	1+		
70·5	1+ br.			98·42	1 Zr?		
76·1	1+			3702·5	1+		
76·58	1+ Sc?			02·65	1+		
80·77	2			03·01	1		
85·14	10	85·15	6	07·36	1		
96·52	1+			10·82	1+		
97·88	1 Ni?			11·8	1+		
3602·11	2 Y?			12·89	10	3712·90	6
03·0	1+			13·68	2		
08·47	1+			13·93	1		
09·32	1			15·01	1		
21·36	1 Co?			15·34	1		
22·35	1+			17·00	1		

Gadolinium		Samarium		Gadolinium		Samarium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3718·40	1+			3761·47	1		
18·80	1			61·75	1+ Ru?		
19·62	12	3719·64	7	62·39	1		
20·04	2			62·48	1		
20·55	1			62·96	1		
20·97	1			65·40	1		
23·36	1+			66·45	1+		
24·92	1			66·6	1+		
25·02	1			68·58	20	3768·60	10
27·10	1			70·13	1 Rh?		
28·34	1			72·27	2 (Cy)		
28·80	1			73·10	1		
29·19	1			73·36	1		
34·63	1+			73·70	1		
36·65	1+			74·23	1		
37·75	1+			74·47	2 Y?		
38·48	1+			76·13	2		
39·27	2			77·00	1		
39·86	2			79·4	1+		
41·40	1 Th?			79·92	2 (Cy)		
42·02	2			80·64	2		
42·36	1			80·95	1+		
44·8	1+			81·80	2 (Cy)		
48·22	2+ Ti?			82·49	12	82·50	6
48·99	2			83·65	2 Ni?		
50·31	1+			83·96	2 d.		
51·21	1+			85·18	1		
51·65	1+			88·82	1 Y?		
51·85	1+ Zr?			89·00	1		
52·35	1			89·13	1		
52·75	1+ Th?			89·48	1		
53·30	1+			90·99	1 La?		
56·45	1			92·72	2+ (Cy)		
56·75	1+			93·04	1+		
57·46	1			93·89	2+ (Cy)		
57·88	2			95·93	1		
58·10	1			97·34	1		
60·14	1+ Ru?			98·05	2 (Cy)		
61·12	3			98·55	1		

Gadolinium			Samarium		Gadolinium			Samarium	
λ	i		λ	i	λ	i		λ	i
3800·09	1				3846·86	1			
00·82	1				50·80	3			
03·22	2	(Cy)			52·55	4	(Cy)		
04·85	2	(Cy)			55·72	3	(Cy)		
06·55	2				57·06	1			
06 96	1				57·27	1			
08·07	1				58·02	1			
08·27	1				59·30	1			
08·83	1				60·36	1			
09·23	2				63·18	2			
09·85	2	(Cy)			64·18	2	(Cy)		
10·40	1				64·67	2	(Cy)		
10·71	1				84·12	1			
10·90	1				85·43	1			
11·47	2	(Cy)			87·76	1			
13·12	1				89·06	1			
13·46	1				89·32	1+			
13·59	1				90·25	1			
14·12	6		3814·13	4	91·00	1			
15·93	1				95·40	2			
17·50	1				95·93	3			
17·81	2	(Cy)			96·56	1			
18 36	1	Rh?			97·12	1			
19·20	1				98·55	1			
21·66	1				98·65	1			
21·91	1	Pr? (Cy)			99·36	1			
22·40	3	Rh?			3901·0	1+			
23·00	1				04·04	1			
23·62	1				04·43	1			
27·46	2				05·78	1	Ta?		
33·15	2				07·25	1			
33·85	1				08·3	1+			
34·70	1				11·55	1+			
35·10	2				13·94	1			
36·63	3	(Cy)			22·55	1			
39·75	2				23·43	3			
41·03	1				25·57	1+			
42·34	3				28·40	1			
46·08	1				35·52	1			

Gadolinium		Samarium		Gadolinium		Samarium	
λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*
3940·04	1+			4045·15	2		
41·99	1			45·31	2		
47·06	1			47·23	1		
50·55	1+ Y?			51·1	1+ br.		
52·79	1			52·70	1		
53·19	1			56·98	1		
66·44	1			58·03	1 Pb?		
71·94	3	3971·94	1	60·41	1+ Ti?		
72·88	1			65·78	1		
75·00	1			66·25	1+		
79·50	1			66·8	1+ Os?		
82·79	1			70·49	5	4070·50	3
83·23	2			73·33	4	73·36	2
86·86	1			73·95	7	73·98	5
87·39	3			80·67	1		
88·02	1			82·70	1		
89·43	2			83·85	1		
90·21	1+			84·09	1		
91·90	1 Nd?			86·83	1		
92·89	1			87·26	1		
93·75	1			90·23	1		
94·36	3			90·93	1		
4005·62	1			92·84	2		
07·4	1+			93·83	1		
07·6	1+			94·60	3		
14·03	1+			97·00	1		
17·34	1			98·16	1		
19·9	1+			4105·18	1		
20·55	1+ Sc?			09·10	1		
23·30	2 Rh?			09·59	1 Nd?		
23·49	2			13·90	1+		
27·78	1			15·99	1		
31·03	1			16·30	1		
31·50	1			16·98	1		
35·56	1			18·31	1 Ce?		
36·99	1			18·67	1		
39·64	2+			20·66	1		
39·80	2			21·21	1		
43·85	1			21·56	1		

Gadolinium		Samarium		Gadolinium		Samarium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
123·11	2			4344·65	1+		
23·83	1			46·67	3		
24·66	1			56·96	1+		
27·86	2			61·11	3		
28·50	1+ Y?			64·31	1		
35·57	1			69·96	4	4369·95	2
37·27	7 Ta?	4137·28	5 Ta?	70·38	1		
42·7	1+			78·74	1		
44·39	1			91·65	3	91·66	1
46·9	1+ Ru?			4400·96	1 Nd?		
47·4	1+			21·41	4		
52·45	2+ (Cy)			24·3	1+		
53·67	2+			27·79	1		
57·1	1+			33·81	1		
57·65	1+			37·60	1+		
58·31	1			46·66	2		
65·24	1 Nd?			67·27	2		
65·59	1			72·61	1		
67·33	1+			78·98	4	4478·98	2
69·45	1+			97·52	1		
71·90	2			4507·87	1+		
91·85	1			10·56	1+		
93·38	1			14·74	4	4514·73	2+
96·14	1			22·20	4	22·18	2
4208·96	1			23·08	3 r. (Ti)		
09·65	1			24·6	1+		
35·25	1			37·15	1+		
45·9	1+			38·01	2		
51·94	10	4251·92	6	44·42	1+		
62·33	10	62·30	6	51·67	1+		
80·79	3			74·03	1		
92·43	1+			81·43	1+		
92·99	1			82·68	6 d.	82·67	3+
4308·42	1			83·52	1		
09·48	1			95·01	1+		
14·49	1			97·19	3	97·16	1
24·74	1			4646·52	1+		
25·83	6	4325·80	3	55·18	1+		
33·45	1			66·67	1+ br.		

Gadolinium		Samarium		Gadolinium		Samarium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
4676·1	1+ br.			4721·55	1+		
.76·5	1+ br.			24·00	1+		
80·3	1+ br.			26·98	1+		
4712·2	1+ br.			28·70	2		
13·05	1+			32·82	2		

Tabelle der Linien des unbekannten Elementes,

d. h. jener Linien, welche im Samarium- und Gadolinium-spectrum mit gleicher Intensität erscheinen. Die Zahl dieser Linien beträgt 800.

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
2176·99	1	2177·00	1	2339·10	3	2339·10	3
77·84	1	77·85	1	40 00	1	39·99	1
2224·07	3	2224 05	3	42·92	1	42·90	1+
36 88	1	36·90	1	46·65	1	46·65	1
39·94	1	39·9	1+	63·39	4	63·40	4
43·88	1	43·85	1	67·35	1 Y?	67·34	1 Y?
50·28	1+	50·28	1	73·50	1	73·49	1
57·13	1	57 16	1	74·40	1+	74 42	1+
92·7	1+	92·65	1+	81·51	1	81·52	1
93·00	1	92·97	1	87·95	1	87 94	1
93·64	1	93·65	1	89·51	1+	89·53	1+
2300·50	1	2300·50	1+	92·30	1+	92·37	1+
03·8	1+ d.	03·80	1+	93·35	1	93 34	1+
07·15	2	07·17	2	94·27	1	94·30	1+
13·75	1+	13·7	1+	97·50	1	97·5	1+ br.
21·2	1+	21·22	1	2408·53	1	2408·53	1
23·30	1+	23·26	1+	09·45	1	09 46	1
23·94	3	23·91	3	14·8	1+ Y?	14·79	1 Y?
29·45	3	29·47	3	17·62	1+	17·70	1+
35·10	1	35·12	1+	17·97	1+	17·95	1+

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
2437·74	1+	2437·75	1+	2608·05	1+	2608·0	1+
38·90	1+ Rh?	38·86	1+ Rh?	09·88	1	09·87	2
45·60	2+	45·64	2	13·47	1	13·48	1+
46·86	1	46·88	1	16·83	1+ Pt?	16·83	1+ Pt?
50·80	1+	50·85	1+	19·50	1	19·48	1
54·31	1	54·34	1	28·20	7	28·22	8
60·0	1+ br.	60·0	1+	29·03	1	29·07	1+
61·4	1+ br.	61·40	2+	29·91	1	29·90	1
65·7	1+	65·72	1	33·42	1	33·39	1+
66·93	2	66·90	2	34·63	1	34·60	1+
68·30	2	68·32	2	38·13	1	38·15	1
69·23	1	69·22	1	40·65	1	40·64	1
69·59	1	69·60	1	43·80	1	43·85	1+
71·68	2	71·70	2	44·7	1+ br.	44·7	1+ d.
74·25	1+	74·26	1+	46·19	1	46·20	1
75·80	1	75·81	1	46·94	1	46·96	1
85·81	1 Rh?	85·80	1+ Rh?	51·62	1+	51·60	1
87·55	1	87·55	1	55·69	5	55·71	7
88 86	1	88·84	2	56·65	1	56·66	1
96·50	1	96·47	1	60·94	1	60·96	1
2520·49	2	2520·48	2	61·63	1+ Ru?	61·65	1 Ru?
34·23	1	34·23	1	64·56	1	64·6	1+
51·70	2	51·70	2	65·4	1+ br.	65·41	1+
53·97	3	54·00	4	65·92	1+	65·95	1+
54·13	2+	54·17	3+	71·75	1+ d.	71·79	1+
57·8	1+ br.	57·82	1+	72·18	1	72·20	1+
64·60	4	64·60	5	74·27	1	74·25	1
66·09	2	66·09	2	75·88	1	75·87	1
71·7	1+ br.	71·67	1+	78·16	1+	78·16	1
73·71	3	73·70	4	80·7	1+ br.	80·7	1+ br.
77·35	1+	77·4	1+ br.	82·13	1+	82·17	1
78 22	1	78·25	1	82·64	1+	82·63	1
78·86	1	78·86	1	83·1	1+	83·10	1
83·75	2	83·74	3	86·35	1+	86·38	1+
86·38	1+	86 3	1+	87·22	1+ Cr?	87·21	1 Cr?
88·35	1	88·34	1	94 52	1	94·54	2+
88·60	2	88·59	2	97·5	1+ br.	97·48	1
95·95	1	95·91	1	2703·00	1	2703·01	2
2602·0	1+	2601·95	1+	03·38	1	03·40	2

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
2764·20	2	2764·22	2	3003·01	2	3003·00	3
69·90	2	69·93	2	05·22	1	05·22	1
70·29	2	70·29	2	12·35	1	12·30	1
79·20	1	79·21	1+	22·3	1+ br.	22·2	1+
79·40	1	79·45	1+	30·8	1+	30·75	1+
81·55	2	81·54	3	40·46	1	40·47	1
92·09	2	92·06	2	53·69	1	53·68	2
94·80	1+	94·76	1	68·75	3	68·75	4
2808·48	1+	2808·45	1+	72·70	3	72·69	4
11·04	1	11·03	1	77·04	3	77·05	4
17·1	1+ br. Y?	17·13	1 Y?	84·14	1 Rh?	84·11	1 Rh?
41·44	1	41·45	1	85·20	1	85·2	1+
62·63	1 Cr?	62·61	1 Cr?	90·10	2	90·08	2
65·20	1+	65·17	1+	92·20	1 Mo?	92·17	1 Mo?
66·50	1+	66·50	1+	98·76	2	98·75	2
81·47	2	81·46	3	99·0	1+	99·0	1+
85·72	1	85·71	1	3101·31	1	3101·28	1
2905·44	2	2905·43	2	02·03	2	02·03	1
07·52	1+	07·6	1+	02·68	3	02·69	4
10·61	1 Nb?	10·63	1 Nb?	05·7	1+	05·66	1
14·9	1+ br.	14·09	1+	08·50	1	08·47	2
18·57	2+	18·57	3	13·30	2	13·27	2
23·46	1	23·46	1	17·1	1+ br.	17·2	1+ br.
30·45	1+	30·4	1+ br.	18·11	3	18·11	4
42·45	1+	42·45	1+	20·05	2	20·04	2
44·23	1	44·23	1+	21·42	1	21·4	1+
55·62	6	55·62	8	21·90	1	21·90	1+
61·07	1	61·05	1+	23·80	1 Rh?	23·83	1 Rh?
63·28	1	63·25	1+	24·13	2	24·12	2
73·5	1+ br.	73·5	1+ br.	27·40	1+	27·35	1+
75·50	1+ Mo?	75·55	1+ Mo?	30·52	1+ Nb?	30·50	1 Nb?
76·97	1	76·95	1+	30·93	1	30·95	1
78·72	1 Ru?	78·73	1+ Ru?	33·99	3	33·97	3
80·32	2	80·29	3	35·16	1+	35·13	1
83·8	1+ br.	83·8	1+ br.	40·92	1	40·91	1
84·22	1	84·25	1+	43·02	1+	43·03	1
91·70	1+ Ru?	91·65	1+ Ru?	43·26	1	43·25	2
93·17	1	93·18	1	45·13	3	45·10	4
99·20	3	99·19	4	45·63	2	45·62	4

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3146·99	2	3147·00	3	3332·85	1+	3332·86	1+
56·63	3	56·64	4	33·43	1+	33·4	1+
60·82	1+	60·82	1	34·19	1	34·22	1
61·48	3	61·49	4	36·30	3	36·31	4
68·3	1+ Ir?	68·3	1+br. Ir?	37 13	1+	37·12	1
69·57	1	69·60	1	46·14	2	46·14	3
76·72	2	76·76	2	47·0	1+ Ti?	46·9	1+ Ti?
91·20	1+	91·2	1+ br.	49·5	1+ Ti?	49·55	1+ Ti?
3206·57	1	3206·60	1	50·27	1 Ru?	50·30	2+ Ru?
07·9	1+	07·87	1	58·60	2	58·62	3
12·95	1+	13·0	1+	58·79	6	58·79	8
23·88	1	23·90	1	60·85	2	60·89	3
26·45	2	26·45	2	63·09	1	63·11	1
37·75	1+	37·77	1	64·38	1	64·41	1
38·74	1	38·75	1	65·74	1	65·77	1
42·44	1 Y?	42·45	2 Y?	67·80	1	67·83	1
47·30	2 Co?	47·33	1+ Co?	73·56	1	73·54	1
50·34	1	50·35	2	74·82	1	74·85	1
56·6	1+ br.	56·6	1+ br.	79·88	1	79·90	2
57·2	1+ br.	57·3	1+ br.	80·17	1	80·17	1
59·40	1	59·40	1	80·67	1	80·67	2
62·70	1	62·7	1+ br.	85·53	1	85·56	1
63·52	1 Nb?	63·53	1 Nb?	89·05	1	89 05	1
70·64	1	70·67	1	91·02	1	91·05	1
74·33	1	74·35	2	91·45	1	91·46	1
79·65	1	79·67	2	92·70	3 (Ru?)	92·69	4 (Ru?)
81·74	2	81·76	2	93·76	2	93·76	2
82·45	2	82·47	2	95·28	3	95 28	4
92·36	2	92·37	3	99·56	1	99·54	1
98·65	1+	98·66	1	3400·12	2	3400·13	3
3302·25	1+	3302·3	1+	01·21	1	01·22	1
13·89	1 Th?	13·89	2 Th?	02·20	3	02·21	4
15·74	1	15·74	1	03·23	1	03·23	1
16·71	2	16·70	2	05·19	1	05·17	1
28·04	1 Y?	28·05	1+ Y?	07·72	4	07·73	5
29·50	1	29·50	2	08·80	2	08·78	1
30·51	2	30·51	3	09·45	1 Ru?	09·43	2 Ru?
31·54	3	31·56	4	10·36	1	10·32	1
32·29	3	32·31	4	10·59	1	10·57	1

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3411·75	1+	3411·73	1	3469·14	4	3469·16	5
12·17	1	12·15	1	72·26	1	72·30	1 Rh?
12·72	1	12·7	1+	73·40	4	73·41	4
12·90	1	12·9	1+	76·45	1	76·48	2
13·41	2	13·40	2	79·63	1	79·67	1
14·36	1	14·37	1+	80·71	1	80·70	1
17·09	4	17·08	4	81·45	7	81·48	8
17·45	1 Ru?	17·45	1 Ru?	81·97	4	81·99	5
18·87	3	18·88	4	82·74	3	82·75	3
22·61	10	22·62	12	86·34	1	86·32	2
22·86	3	22·85	3	89·47	1+	89·45	1
24·07	2	24·06	3	91·91	2	91·90	2
24·73	3	24·74	3	92·12	3	92·11	3
26·46	1	26·48	2	94·58	5	94·60	5
28·59	2 Ru?	28·62	2 Ru?	95·2	1+ br.	95·20	1+
30·35	1	30·33	2	96·1	1+	96·1	1+
31·10	2	31·13	2	97·54	1	97·52	1
31·60	1	31·61	1	3501·70	1+	3501·7	1+ br.
33·15	3 (Co?)	33·16	4 (Co?)	05·70	4	05·71	5
34·5	1+	34·55	1+	07·20	1	07·2	1+
36·2	1+ br.	36·20	1+	10·76	1	10·76	1
39·32	4	39·36	5	12·38	3	12·41	3
39·87	2	39·90	3	12·66	4	12·69	4
40·11	4	40·11	6	22·62	1	22·60	1
41·91	1	41·93	1	24·34	3	24·37	3
47·08	1	47·07	1	28·68	2	28·70	3
49·73	2	49·75	2	31·82	1	31·81	1
50·52	4	50·57	6	34·35	1+	34·38	1
51·37	3	51·40	3 (Pd?)	37·28	1	37·30	2
54·26	2	54·29	3	40·5	1+ br.	40·5	1+ br.
55·05	2	55·04	3	42·50	1	42·51	1
57·18	1 Rh?	57·22	2 Rh?	42·93	3	42·94	4
63·14	1	63·16	2	45·13	1	45·14	2
64·17	6	64·19	8	48·43	1	48·43	1
65·24	1+	65·20	1	57·21	4	57·21	5
66·66	1	66·69	1	58·33	3	58·31	4
67·10	2	67·09	2	59·25	2	59·22	1
67·44	4	67·44	5	60·75	1	60·75	1
68·24	1	68·24	1	64·20	2	64·22	2

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3564·77	2	3564·78	2	3622·98	2	3622·96	3
66·30	1+ Va?	66·30	1 Va?	25·05	3	25·05	3
67·32	1	67·30	2	25·43	2	25·43	2
67·80	1	67·82	1	26·54	2+	26·51	2
69·75	1	69·75	1	29·32	1+	29·30	1+
72·09	3	72·09	3	29·66	2	29·66	3
74·90	3	74·90	3	30·42	1	30·41	1
76·95	1+	76·93	1+	31·01	1	31·05	1
78·51	3	78·50	3	33·27	1+ Y?	33·27	2 Y?
79·7	1+	79·70	2	34·90	2	34 90	3
80·77	2	80·77	2	39·21	2	39·22	3
82·10	4	82·10	5	40·35	2	40·35	2
85·98	1	85·98	1	41·54	3	41·53	3
86·71	1	86·72	1	45·77	3	45·76	4
87·35	1 Ru?	87·34	1 Ru?	49·17	1	49·15	1
90·64	3 Sc?	90·61	4 (Sc?)	49·63	3	49·59	3
91·60	1	91·63	1	51·10	3	53·10	3
92·11	1	92·10	1	51·37	2	51·38	3
92·85	8	92·87	8	52·72	3	52·71	4
93·64	2 Cr?	93·62	2 Cr?	54·80	5 r.	54·79	6
96·85	1	96·82	1+	56·33	5	56·32	6
99·00	1	98·97	1	57·97	1	57·96	1+
3600·93	1+ Y?	3600·90	1 Y?	59·76	1 Nb?	59·73	1 Nb?
01·14	3	01·13	3	61·83	1	61·81	2
05·05	1	05·05	1	62·43	4	62·41	4
05·44	2	05·41	3	66·00	1	65·98	1
05·83	2	05·82	2	68·48	1	68·45	2
07·27	2	07·26	3	72·17	1+ Pt?	72·14	1 Pt?
08 07	1	08·05	1	74·22	1	74·21	1
08·92	4	08·92	5	74·60	1	74·59	1
10·95	3	10·93	3	76·52	1	76·52	1
11·10	2	11·10	3+	79·38	1+	79·35	1
13·06	1	13·03	1	81·89	1	81·89	1
13·62	4	13·58	4	82·4	1+	82·46	1+
14·40	1	14·36	1	82·90	1	82·91	2
16·60	1	16·60	1	84·30	2	84·26	2
17·31	4	17·29	4	86·50	3	86·47	4
18·23	1	18·20	1	87·25	1	87·24	1
20·63	2 Rh?	20·59	3 (Rh?)	87·91	4	87·90	5

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
3691·2	1+ br.	3691·20	1+	3755·7	1+ br.	3755·68	2
93·10	1+	93·11	1	56·22	1	56·23	1
93·75	1+	93·76	1	59·15	3	59·17	3
94·49	1	94·47	1	60·84	3	60·85	3
96·53	1	96·54	1	63·16	1	63·15	1
96·94	2	96·90	3	63·47	1	63·48	2
97·90	5	97·90	5	64·33	2	64·38	3
99·90	4	99·89	5	64·75	1	64·75	2
3700·74	1	3700·70	1	67·20	3	67·18	3
01·07	1 Rh?	01·07	1 Rh?	69·59	2 Ni?	69·59	1 Ni?
03·65	1	03·64	1	70·40	1	70·37	1
04·06	1	04·05	1	70·85	5	70·86	4
05·2	1+	05·1	1+ br.	71·35	1	71·37	1
09·32	1	09·30	1	74·45	3	74·47	2 Y?
10·45	1 Y?	10·42	2 Y?	78·90	1	78·90	2
11·03	1	11·02	1	83·20	2	83·20	3
16·51	4	16·49	4	84·53	1	84·56	1
17·63	2	17·59	2	85·45	1	85·47	2
22·20	1	22·21	2	86·33	1	86·34	1
23·87	1+	23·85	2+	87·70	4	87·71	4
25·63	2	25·61	3	88·62	1 Rh?	88·60	1 Rh?
26·45	1	26·46	2	90·05	1+	90·06	1+
27·50	1	27·49	1	90·60	1 Ru?	90·63	1 Ru?
29·90	2	29·93	1+ br.	90·76	1	90·79	1
31·00	4	31·01	5	91·32	4	91·30	4
32·60	1	32·60	2+	91·88	1	91·89	1
33·22	3	33·21	3	92·54	3	92·54	2
35·53	1	35·55	1	94·51	1	94·50	2
40·19	2	40·16	3	95·45	1	95·45	1
42·05	1	42·02	2	95·65	1+	95·65	1
43·62	6	43·62	8	96·06	1	96·08	1
44·98	1	44·98	1	96·57	6	96·58	6
45·75	3 Ru?	45·69	2 Ru?	99·3	1+ Pd?	99·33	1 Pd?
46·20	1 Zr?	46·15	1 Zr?	3800·48	1 Pr?	3800·45	1 Pr?
46·6	1+ br.	46·59	2+	01·43	3	01·45	4
49·97	1+	49·96	1+	02·94	1	02·94	1
53·75	1	53·73	1	04·08	1	04·09	1
54·42	1	54·42	1	05·24	2	05·23	2
55·43	3	55·40	2	05·68	4	05·65	3

Samarium λ	Samarium i	Gadolinium λ	Gadolinium i	Samarium λ	Samarium i	Gadolinium λ	Gadolinium i
06·25	1	3806·26	1	3947·98	1	3947·96	1
07·75	2	07·76	2	49·39	1	49·38	2
09·55	1	09·57	1	52·18	2	52·15	2
11·18	1	11·16	1	53·55	1	53·53	1
12·22	3	12·21	2+	57·87	5	57·85	5
14·92	3	14·95	3	59·68	6	59·69	6
15·64	1	15·63	1	60·28	1	60·27	1
16·79	3	16·76	3	62·31	1	62·28	1
18·89	2	18·88	2	63·81	2	63·81	3
20·97	1	20·95	2	67·01	1	67·03	1
23·39	1+	23·38	1	71·26	1 Pr?	71·25	2 Pr?
25·20	1	25·17	1	74·15	2	74·16	3 r.
26·22	1	26·20	2	75·27	1	75·26	2
28·6	1+	28·57	1+	77·00	1	77·0	1+
37·05	3	37·04	3	82·05	1+	82·1	1+
42·40	4	42·38	3 r.	96·48	4 (Co?)	96·50	5 (Co?)
44·74	3	44·72	3	97·93	3	97·94	3
50·83	3	50·83	3	4000·59	1	4000·59	1
51·16	3	51·14	4	01·42	3	01·42	3
52·62	4 r.	52·60	4	02·13	1	02·11	1
84·53	1	84·52	1	04·03	1	04·00	2
84·85	1	84·82	1	05·10	4	05·08	3
94·90	4	94·89	4	08·46	2	08·46	1
902·57	4	3902·54	4	09·09	3	09·03	3
10·33	1	10·33	1	09·39	1	09·36	2
16·70	8	16·70	8	12·4	1+ Nd?	12·4	1+ Nd?
17·57	2	17·55	1	13·99	3	13·96	3
18·23	1	18·20	1	17·05	1+	17·02	1
18·43	1	18·41	1	17·85	1	17·83	1
33·15	1	33·14	1	20·0	1+	20·05	1+
34·98	2	34·97	3	22·51	2	22·50	3
37·21	2	37·2	1+	28·05	1+	28·03	1
38·25	1	38·27	2	28·32	1+	28·30	1
39·13	1	39·12	2	33·66	1	33·65	1
42·79	1 Rh?	42·79	1 Rh?	35·27	2	35·26	1
43·77	1	43·75	1	37·52	5	37·51	6
44·84	1	44·82	1	38·11	4	38·08	4 r.
45·67	1	45·66	2	42·87	1	42·9	1+
46·65	2	46·65	1	44·24	1	44·23	1

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
4047·00	2	4046·99	3	4132·45	6	4132·42	5
47·98	1	47·96	2	34·35	1	34·32	1
48·78	2	48·75	2	40·64	1	40·64	1
49·6	4+	49·60	3	41·20	1	41·18	1
50·10	7	50·08	6	44·95	1+	44·91	1
51·95	1+	52 0	1+ br.	50·80	1+	50·85	2+
53·45	5	53·42	6	51·80	1	51·81	2+
53·80	2	53·80	2	55·03	1	55·02	2
54·86	1	54·86	2	58·57	1	58·58	1
55·44	1	55·45	1+	60·05	1	60·05	1
56·17	1	56·17	1	60·50	1	60·45	1+
58·39	3	58·38	3	61·0	1+	61·00	1+
59·54	2	59·54	3	62·90	3	62·91	3
60·03	1	60·04	1	63·29	3	63·28	2
61·46	2	61·46	3	64·42	1+	64·45	1+
62·76	5	62·75	6	67·81	1	67·82	1
63·59	4	63·54	5	70·30	2	70·29	2
63·72	4	63·74	3+	73·77	2	73·75	2
78·60	4	78·59	4	75·70	2	75·71	2
78·86	2	78·86	3	81·04	2	81·06	2
84·87	2	84·84	1	84·45	10	84·48	10
85·78	7	85·75	8	85·15	1+	85·15	1
87·85	3	87·81	4	90·97	2	90·98	2
88·9	1+ br.	88·8	1+ br.	91·29	4	91·30	3
90·58	1	90·56	1	97·27	4	97·30	3
99·05	4+ r.	99·05	4+	97·87	5	97·86	5
4100·04	1+ Pr?	4100·03	1 Pr?	4202·74	2	4202·70	2
00·44	1	00·41	1	05·07	4	05·08	5
01·03	1	01 00	1	12·21	6 Ru?	12·20	5 Ru?
01·48	1+	01·45	1	15·20	6	15·18	5
05·95	1	05·92	1+	17·39	6 Ru?	17·37	5 Ru?
08·52	2	08·55	2	23·23	1 Pr?	23·21	1 Pr?
10·77	2	10·75	3	24·44	1	24·45	1
11·60	3	11·57	4	25·35	2	25·33	3
11·94	2	11·91	2	26·05	3	26·02	3
15·55	2 Ce?	15·51	2 Ce?	27·34	1	27·34	2
26·01	1	26·0	1+	31·2	1+	31·20	1
30·56	10	30·55	10	32·65	1	32·66	1
31·65	3	31·62	3	36·07	2	36·06	2

Samarium			Gadolinium			Samarium			Gadolinium		
λ	i		λ	i		λ	i		λ	i	
4238·95	4		4238·95	4		4329·76	1		4329·76	1	
41·47	1		41·47	2		30·51	1		30·53	1	
44·04	2		44·02	3		30·79	3		30·80	4	
46·76	2		46·72	3		31·10	1		31·13	1+	
53·53	3		53·58	3		31·60	1		31·59	1	
53·81	5		53·82	5		35·49	1		35·49	1	
55·7	1+		55·66	1+		37·73	1		37·73	1	
60·33	1	Sb?	60·30	1	Sb?	41·47	5		41·50	5	
68·95	2		68·93	2		42·38	8	r.	42·39	10	
71·01	2		71·03	1+		44·47	2		44·50	2	
74·34	2		74·35	1		46·79	2+		46·80	2+	
75·20	1+	Nd?	75·2	1+	Nd?	47·51	3		47·53	4	
78·39	1		78·40	1		54·24	1		54·25	2	
80·67	4		80·68	4		58·03	1+		58·04	1+	
83·02	2		83·02	1		59·33	1		59·34	1	
85·99	1		86·01	1		59·86	1		59·84	1	
86·30	1		86·31	1		64·31	1		64·31	1	
88·5	1+	br.	88·5	1+	br.	69·38	1		69·36	1	
89·52	1		89·56	1		74·03	2		74·04	2	
90·10	2	Ce?	90·10	2	Ce?	74·45	1		74·45	1	
96·26	3		96·30	3		75·15	3	Y?	75·11	2	Y?
96·55	3		96·51	3+		80 86	2		80·86	3	
97·36	3		97·38	4		82·25	2		82·25	2	
98·60	1		98 63	1		83·31	3		83 31	3	
4303·66	1+		4303·67	1+		87·87	3		87·88	4	
04·26	1		04·27	1		89·18	1		89·18	1	
05·11	4		05·09	4		89·87	1+		89·90	1+	
06·55	2		06·54	2		90·15	1+		90·13	1+	
11·18	2		11·16	2		92·26	1		92·25	1	
14·00	3		14·03	2		94·90	1		94 93	1	
14·56	1		14·58	1		97·67	4		97·69	4	
16·21	3		16·22	3		4400·35	1+		4400·36	1	
16·4	1+		16·35	2+		02·05	3		02·04	3	
20·71	1		20·71	1		03·28	3		03·31	2	
21·30	3		21·33	3		06·86	4		06·88	5	
22·39	1		22·38	2		08·42	4		08·44	4	
24·25	2		24·24	3		11·32	1		11·34	1	
26·52	1		26·54	1		13·65	1+		13·64	1	
27·31	6		27·34	5		14·32	2		14·33	2	

Samarium		Gadolinium		Samarium		Gadolinium	
λ	i	λ	i	λ	i	λ	i
4414·90	1	4414·92	2	4507·13	1+	4507·15	1
19·20	4	19·20	4	09·26	1	09·27	1
22·56	2	22·57	2	17·4	1+	17·30	1+
25·20	1	25·2	1+	20·30	1	20·29	2
26·30	1+	26·31	1	21·50	1	21·51	1
27·20	1	27·18	1	36·70	2	36·7	1+
30·80	2	30 80	2	40·28	4 d.?	40·22	5
36·38	5	36·38	5	48·18	1	48·17	1
38·41	3	38·41	4	51·15	1	51·15	1
50·14	1 Pr?	50·15	1 Pr?	55·16	1+	55·14	1
54·12	1	54·10	1	58·26	1	58·26	2
63·0	1+	63·02	1	71·1	1+	71·17	1+
63·46	1	63·44	1	76·06	1+	76·06	1
64·94	1	64·92	1	79·75	1	79·76	1
66·73	3	66·72	4	81·3	1+ br.	81·27	1
71·51	2	71·48	3	83·25	1	83·26	1
74·35	1	74·31	2	98·10	2	98·10	3
76·31	2	76·30	2	99·05	1	99·08	1
83·55	3	83·54	4	4601·25	2	4601·29	3
84·68	1+	84·67	1	08·20	1+	08·24	1+
84·95	1+	84·90	1	14·67	1	14·68	1
86·55	2	86·57	3	36·87	1+	36·83	1
87 10	1	87·08	1	39·2	1+	39·19	2+
88·61	1	88·60	1	53·77	1	53·77	1
97·34	1	97·33	1	64·49	1	64·5	1+ br.
98·49	2	98·47	3	83·53	1	83·55	1
4501·0	1+	4501·03	1+	94·54	1	94·51	1
06·51	2	06·52	3	97·62	1+	97·6	1+

Die vorstehende Tabelle gibt zugleich einen brauchbaren Anhalt für die Genauigkeit der Messungen. Rechnet man die mittlere Differenz der beiderseitigen Messungen für alle diese Linien, wobei auch die verwaschenen mitgezählt sind, so erhält man 0·017 AE. Dabei muss bemerkt werden, dass die angegebenen Wellenlängen keine Mittelwerte, sondern das Resultat je einer Einzelmessung sind.

Es scheint, dass bei einzelnen starken Linien, die sowohl im Samarium-, als im Gadoliniumspectrum vorkommen, Verschiebungen auftreten, während die schwachen Nachbarlinien in beiden Spectren dieselbe Lage haben. Die folgenden beiden Liniengruppen mögen dieses Verhalten illustrieren:

Samarium		Gadolinium		
λ	*i*	λ	*i*	Δ
4224·44	1	4224·45	1+	1
25·35	2	25·33	3	—2
26·05	3	26·02	2	—3
27·34	1	27·34	2	0
29·91	6	**29·98**	4	7
32·65	1	32·66	1	1
34·75	4	34·73	1	—2
36·07	2	36·06	2	—1
4419·20	4	4419·20	4	0
20·70	6	20·70	1	0
21·33	8	**21·41**	4	8
22·56	2	22·57	2	1
24·52	10	24·53	2	1
25·20	1	25·2	1+	0
26·30	1+	26·31	1	1
27·20	1	27·18	1	—2

Zur Beziehung zwischen den atmosphärischen Strömungen und der Scintillation

von

Prof. **Karl Exner,**

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1900.)

In einer früheren Abhandlung: »Über das Funkeln der Sterne und die Scintillation überhaupt«[1] glaube ich die Erklärungsversuche der Scintillation zum Abschlusse gebracht zu haben. In einer späteren Abhandlung: »Über die Scintillation, eine Monographie«[2] habe ich die historische Entwicklung dieser Versuche dargestellt und ergänzende Betrachtungen, Beobachtungen und Experimente hinzugefügt. Ich gelangte daselbst auch zu dem Resultate: »Betrachten wir also das Licht eines Fixsternes, nachdem es durch die Atmosphäre gegangen ist, so sehen wir: die Lichtwellenflächen weichen kaum merklich von der ebenen Gestalt ab, die Strahlen kaum merklich vom Parallelismus, allein die Lichtwellenflächen bestehen aus dicht nebeneinander liegenden helleren und dunkleren Theilen, der Querschnitt eines dicken Strahlenbündels zeigt an manchen Stellen viele, an anderen wenige Strahlendurchschnitte. Diese Vertheilung der Intensitäten längs der Wellenflächen, sowie die Verdichtungen und Verdünnungen der Strahlenbündel unterliegen überdies mit dem Zustande der Atmosphäre einem beständigen und unregelmäßigen Wechsel. Es sei ein astro-

[1] Karl Exner, Über das Funkeln der Sterne und die Scintillation überhaupt. Diese Sitzungsber., II. Abth., 1881.

[2] Karl Exner, Über die Scintillation, eine Monographie. Franz Exners Repertorium, 1887.

nomisches Fernrohr nach einem scintillierenden Fixstern gerichtet. Die einfallenden Strahlen sind untereinander merklich parallel, doch an verschiedenen Stellen eines Querschnittes des Strahlenbündels sehr verschieden dicht. Fängt man das durch die Objectivlinse gebrochene Strahlenbündel mittels eines Schirmes auf oder stellt man das Ocular auf die Ebene ein, in der sich der Schirm befände, so nimmt man in dieser Ebene, welche nicht mit der Focalebene des Fernrohres zusammenfallen darf, ein verkleinertes und intensiveres Bild des Querschnittes des einfallenden Strahlenbündels wahr; das Bild wird umso kleiner und intensiver, je mehr sich die Ebene, auf welche eingestellt ist, der Focalebene nähert. Das durch Einschieben oder Ausziehen des Oculars zu einer kreisförmigen Scheibe erweiterte Bild des Sternes erscheint nun nicht gleichförmig hell: verschiedene Stellen der Scheibe erscheinen in jedem Momente in unregelmäßiger Weise in beträchtlich ungleicher Helligkeit, und die Vertheilung der Helligkeiten wechselt unregelmäßig von einem Momente zum anderen. Es gleicht die Erscheinung dem Lichtspiele der Sonnenstrahlen auf einer Wand, wenn dieselben von einer leicht bewegten Wasserfläche reflectiert worden sind. Bei tiefstehenden Sternen wechselt überdies in dem scheibenförmigen Bilde nicht nur die Helligkeit unregelmäßig von Ort zu Ort und von Moment zu Moment, sondern auch die Farbe, wovon später ausführlicher die Rede sein wird. Diese Helligkeits- und Farbenfluctuationen, welche sich bei eingeschobenem Oculare in dem zu einer kreisförmigen Scheibe erweiterten Bilde eines Fixsternes zeigen, will ich im folgenden nach seinem Entdecker das Marius'sche Phänomen nennen; doch ist dasselbe im wesentlichen mit dem Keppler'schen Phänomen identisch. Projiciert man die helleren und dunkleren Theile des Marius'schen Phänomens längs der Lichtstrahlen auf das Objectiv des Fernrohres, so gelangt man zu dem Resultate, dass die Ausdehnung der Lichtmaxima und -Minima auf der Wellenfläche außerhalb des Fernrohres, oder des Keppler'schen Phänomens, im allgemeinen nach Centimetern oder Decimetern misst.«

Diese Verdichtungen und Verdünnungen der Strahlenbündel rühren her von äußerst kleinen unregelmäßigen Ablenkungen.

welche die Strahlen während des Durchganges durch die Atmosphäre beständig erfahren. Jede stärker als die Umgebung brechende Stelle der Atmosphäre wirkt, wie schon Hooke dachte, als eine schwache Sammellinse und macht die Strahlen convergent, jede schwächer brechende Stelle als eine Zerstreuungslinse und macht die Strahlen divergent. Ausführlich findet sich dieser Gegenstand behandelt in meinen Abhandlungen (l. c.). Hochstehende Sterne zeigen im Marius'schen Phänomen nur Helligkeitsfluctuationen, tiefstehende Sterne sowohl Helligkeits-, als Farbenfluctuationen. Im letzteren Falle haben die verschiedenfarbigen, durch die Öffnung des Instrumentes tretenden, von demselben Fixstern kommenden Strahlenbündel in der Atmosphäre getrennte Wege zurückgelegt, sie werden verschieden scintillatorisch modificiert, jedes derselben gibt sein eigenes Marius'sches Phänomen, innerhalb der Marius-schen Scheibe coincidieren die Lichtmaxima und -Minima einer Farbe in einem gegebenen Momente nicht mit den Maximis und Minimis einer anderen Farbe, es entsteht die Farbenentwickelung, welche beobachtet wird. Ausführlicheres hierüber findet man in meinen Abhandlungen (l. c.).

Schon Arago hat das Vorhandensein einer Bewegungsrichtung der Fluctuationen in der Scheibe, als welche ein Stern bei verstelltem Oculare des Beobachtungsfernrohres erscheint, und die Beziehung dieser Richtung zur Windrichtung bemerkt und vom Standpunkte seiner Theorie aus erklärt. Vom Standpunkte der richtigen Erklärung der Scintillation stellt sich die Sache ähnlich dar. Ist beispielsweise das Fernrohr nach einem hochstehenden Sterne gerichtet, so kann man annehmen, dass eine Stelle der Atmosphäre, welche geeignet ist, als schwache Sammel- oder Zerstreuungslinse zu wirken, infolge der allgemeinen Luftströmung durch das Strahlenbündel hindurchgeführt wird, noch ehe sie sich beträchtlich in ihrer Wirkungsweise geändert hat, so dass ein Lichtmaximum oder -Minimum in der Windrichtung durch das erweiterte Bild des Sternes wandern wird. Die von Wolf bemerkte Thatsache, dass im Spectrum eines scintillierenden Fixsternes die Helligkeitsmaxima und -Minima bald von roth gegen violett fortschreiten, bald umgekehrt, erklärt sich ähnlich. Ist nämlich das Fernrohr

nach einem tieferstehenden Sterne gerichtet und verfolgt man das in das Objectiv tretende Strahlenbündel vom Fernrohre bis zur Grenze der Atmosphäre, so sieht man, dass sich dasselbe infolge der regelmäßigen atmosphärischen Dispersion fächerförmig erweitert, so dass das rothe Bündel unten und das violette oben liegt. Es wird also eine beispielsweise sammelnd wirkende Stelle der Luft, indem sie der allgemeinen Luftströmung folgend das Bündel durchsetzt, zuerst die rothen und zuletzt die violetten Strahlen treffen können oder umgekehrt, so dass im Spectrum des Sternes ein Lichtmaximum von roth gegen violett fortschreiten wird oder umgekehrt.

Ich habe überdies die Bewegungsrichtung der scintillatorischen Fluctuationen noch in der folgenden Weise beobachtet.

Richtet man ein nicht zu großes Fernrohr nach dem Sonnenrande, so wird man denselben fast stets in wellenförmiger Bewegung finden. Auch wird man bald erkennen, dass die Bewegung in einer bestimmten Richtung erfolgt. Man wird am Rande der Sonnenscheibe zwei einander gegenüberliegende Punkte finden, an welchen keine Bewegungsrichtung zu erkennen ist, und zwei von diesen um 90 Grade abweichende Punkte, an denen die Richtung der Bewegung am deutlichsten zu erkennen ist. Man wird ferner finden, dass die Bewegungen an den beiden letzteren Punkten in derselben Richtung vor sich gehen. Meine Beobachtungen führten fast stets zu einer Bewegungsrichtung am Sonnenrande, die mit der Richtung der Windfahne übereinstimmte. Näheres hierüber findet man in meinen beiden Abhandlungen (l. c.).

Mit dem letzteren Gegenstande beschäftigte sich später Herr Ventosa und beschrieb eine Methode zur Bestimmung der Windrichtung in höheren Luftschichten.[1] Wie ich dies früher schon gethan hatte, benützte Herr Ventosa zur Bestimmung der Richtung einer Luftströmung die Wellenbewegung am Sonnenrande, doch in anderer Weise. Indem er das Ocular von der Einstellung auf den Focus auszog, d. i. vom Objective entfernte, verschwanden die kleinen Wellen, während die großen

[1] Mémoires de la société royale de géographie d'Anvers, 1895.

hiedurch deutlicher sichtbar wurden. Herr Ventosa erklärte dies so, als wären die Wellen strahlenaussendende Objecte, die sich an bestimmten Stellen der Atmosphäre befinden und am deutlichsten wahrgenommen werden, wenn das Fernrohr auf den Ort der Welle eingestellt ist. An diese Stelle der Atmosphäre versetzt Herr Ventosa den Erregungsort der durch das Fernrohr wahrgenommenen Wellen und bestimmt so aus der Bewegungsrichtung der Wellen die Windrichtung an der entsprechenden Stelle der Atmosphäre.

Es beruht Herrn Ventosas Methode offenbar auf den beiden Voraussetzungen, dass der Erregungsort der wahrgenommenen Wellen sich an einer bestimmten Stelle der Atmosphäre befindet und dass diese Stelle mit dem Orte zusammenfällt, auf welchen das Fernrohr eingestellt ist. Was die erste Voraussetzung betrifft, nach welcher die Erregung an einer bestimmten Stelle erfolgen soll, so möchte ich an einige meiner Beobachtungen über Scintillationserscheinungen erinnern. Richtet man das Fernrohr nach dem Sonnenrande, wo der Strahl die ganze Atmosphäre zu durchsetzen hat, so gewahrt man das Phänomen der Wellenbewegung. Dasselbe Phänomen gewahrt man auch noch, wenn man das Fernrohr auf die Contouren sehr entfernter Gebirge einstellt, wo also ein großer Theil der Atmosphäre ausgeschaltet ist. Als ich unter Benützung eines künstlichen, mittels eines Heliotropen hergestellten Sternes die Luftstrecke auf $1^1/_2$ Meilen reduciert hatte, zeigte das durch Verschiebung des Oculars erweiterte Bild des künstlichen Sternes (die Marius'sche Scheibe) sowohl die Helligkeits-, als die Farbenfluctuationen. Bei weiterer Verkürzung der Distanz auf 500 *m* und unter Benützung des Sonnenbildchens in einem Convexspiegel als Lichtquelle konnten im Arago'schen Scintillometer die charakteristischen Scintillationserscheinungen wahrgenommen werden. Noch bei Reduction der Entfernung auf 20 Schritte zeigten sich Spuren von Helligkeitsfluctuationen im Marius'schen Scintillometer. Diese Beobachtungen weisen deutlich darauf hin, dass der Ort der Erregung der Scintillationserscheinungen, also auch der Wellen am Sonnenrande, nicht an eine bestimmte Stelle in der Atmosphäre zu versetzen ist, sondern in die ganze Strecke, die der Licht-

strahl in der Atmosphäre durchmisst. Indem die ursprünglich ebenen Lichtwellenflächen durch die Atmosphäre gehen, erfahren sie daselbst durch unregelmäßige Brechungen beständig kleine Verbiegungen, wie Jamin[1] zuerst erkannt hat; daher erfahren die Strahlen auch beständig kleine Ablenkungen, sie beschreiben eine Art Schlangenlinie.

Was die zweite Voraussetzung anlangt, nach welcher sich die Stelle der Erregung der Scintillation wie ein leuchtender Körper verhalten soll, auf den man ein Fernrohr einstellen kann, so lässt sich dieser Voraussetzung nur durch die Annahme genügen, dass die betreffende Stelle der Atmosphäre in so beträchtlichem Grade ablenkend auf die Strahlen wirkt, als nöthig ist, um in ihrer unmittelbarer Nähe ein System von Brennlinien hervorzubringen. Diese Annahme erscheint nun aber schwer verträglich mit den Beobachtungen, wie aus den folgenden Daten hervorgeht. Herr Dr. Holetschek hat den Spielraum der Bewegung eines Punktes des Mondrandes bei drei zu verschiedenen Zeiten in Höhen von 51° bis 66° angestellten Messungen zu 10—15 Secunden gefunden, also die Amplitude der Bewegung zu 5—$7\frac{1}{2}$ Secunden. Ich habe aus einem Mittelwerte der von mir gemessenen Krümmungen der Lichtwellenflächen und aus zwei Messungen der Erstreckungen der Unebenheiten der Lichtwellenflächen einen Mittelwert der Amplitude der Zitterbewegung zu 6 Secunden berechnet. Carlini[2] erhielt bei Beobachtung am Polarsterne Oscillationen von 10—12 Secunden, also eine Amplitude gleich 5—6 Secunden. Struve nahm den Stern Fomalhaut als atmosphärisches Spectrum von 22 Secunden verticaler und 8 Secunden horizontaler Ausdehnung wahr. Aus dieser Beobachtung geht, wie ich (l. c.) gezeigt habe, hervor, dass der Stern zur Zeit der Beobachtung scintillierte und dass die Amplitude seiner Zitterbewegung oder der Radius des Scintillationszerstreuungskreises, über den man in meinen Abhandlungen (l. c.) Näheres findet, ungefähr 4 Secunden betrug. Secchi unterschied bei ruhigster Atmosphäre Doppelsterne von $\frac{1}{2}$ Secunden gegen-

[1] C. R. LXVII.

[2] Humboldt, Cosmos, III, 293.

seitiger Distanz, während bei Scintillation der Durchmesser des größeren Sternes 8 Secunden erreichen konnte. Man entnimmt hieraus, dass die Amplitude der Bewegung oder der Radius des Scintillationszerstreuungskreises 4 Secunden betrug. Die Scintillation ist bei Tage weit stärker als bei Nacht. Montigny fand als größte Amplitude der Zitterbewegung entfernter Objecte bei Tage 25 Secunden. Alle diese Daten scheinen zu zeigen, dass die Ablenkungen der Strahlen nach dem Durchgange durch die ganze Atmosphäre im allgemeinen nicht mehr als einige Secunden betragen. Ich habe aus meinen Beobachtungen auch die Entfernungen berechnet, in denen die Strahlen, nachdem sie die Atmosphäre durchmessen haben, sich nach geradliniger Verlängerung treffen würden und habe für die kleinsten, der Beobachtungszeit entsprechenden derartigen Entfernungen Werte zwischen 1817 und 19380 *m* erhalten. Die maximale Tiefe einer Unebenheit, senkrecht zur Lichtwellenfläche gemessen, zeigte bei meinen Messungen im allgemeinen die Größenordnung einer Lichtwellenlänge. Die Erstreckungen der Verbiegungen der Lichtwellenflächen, längs diesen selbst gemessen, sind von mir bei einigen wenigen Beobachtungen bestimmt und von der Größenordnung eines Centimeters oder Decimeters gefunden worden, so dass im allgemeinen auf das Objectiv eines größeren Instrumentes mehrere concave und convexe Theile einer Lichtwellenfläche fallen. Diese Beobachtungen und Messungen, über die sich Genaueres in meinen oben citierten Abhandlungen findet, machen es durchaus unwahrscheinlich, dass scintillatorisch erregende Stellen der Atmosphäre in ihrer unmittelbaren Nähe ein System von Brennlinien hervorbringen sollten, auf das ein Fernrohr eingestellt werden kann.

Aus diesen und anderen Gründen habe ich[1] Bedenken gegen die Anwendbarkeit der von Herrn Ventosa vorgeschlagenen Methode ausgesprochen und weiter[2] eine Beobachtung mitgetheilt, welche diese Methode direct durch den Versuch auf ihre Richtigkeit zu prüfen gestattet. Es bedarf

1 Meteorol. Zeitschr., October 1896.

2 Meteorol. Zeitschr., April 1897.

hiezu eines Falles, wo die wahrgenommene Scintillation unzweifelhaft an einem bestimmten und bekannten Orte erregt wird. Da nun ein vom Rande der Sonnenscheibe kommender Strahl in allen von ihm durchsetzten Punkten der Atmosphäre mehr weniger scintillatorisch erregt wird, muss bei dem anzustellenden Versuche, wenn die Sonne als Lichtquelle benützt werden soll, die Vergrößerung des Beobachtungsfernrohres hinreichend gering genommen werden, damit die durch die Atmosphäre erregte Wellenbewegung im allgemeinen unter der Schwelle der Wahrnehmbarkeit bleibe, und es muss anderseits an einer bestimmten und bekannten Stelle der Atmosphäre eine Scintillationserregung stattfinden von hinreichend großer Intensität, damit die an dieser Stelle erzeugte Wellenbewegung über die Schwelle der Wahrnehmbarkeit trete. Beide Bedingungen waren bei dem von mir angestellten Versuche erfüllt.

I. Versuch.

Ein Fernrohr, das eine hinreichend geringe Vergrößerung hatte, um die Bewegung am Sonnenrande unter gewöhnlichen Verhältnissen eben nicht mehr zu zeigen, zeigte dieselbe doch regelmäßig sehr deutlich, wenn die Sonne über der Heizanlage eines 450 Schritte vom Beobachter entfernten Spitales stand. Hier war also der Ort der Erregung der Wellen bekannt, die wahrgenommene Scintillation entstand zweifellos über der Heizanlage, 450 Schritte vom Beobachter entfernt. Die Wellen erschienen aber am deutlichsten bei Einstellung des Fernrohres auf den Rand der Sonnenscheibe und verschwanden rasch beim Ausziehen oder Einschieben des Oculars. Nach Herrn Ventosas Methode wäre der Erregungsort an die Grenze der Atmosphäre zu versetzen gewesen.

In einer späteren Publication[1] ist Herr Ventosa auf meinen eben angeführten Versuch nicht zurückgekommen, hat aber neue Versuche für die Richtigkeit seiner Methode beschrieben. Er benützte als Lichtquelle einen Sommerladen, durch dessen geöffnete Spalten Licht eintrat, als Erreger der Scintillation diente »en profitant pour cela d'une idée émise par M. Exner«

[1] Ciel et Terre, Juli 1899.

eine in Pendelbewegung gesetzte Fensterglastafel, durch welche die Lichtstrahlen traten, und zur Beobachtung ein Fernrohr. Er fand die Wellen am deutlichsten, wenn das Fernrohr auf die Glastafel eingestellt war, und zog hieraus den Schluss auf die Richtigkeit seiner Methode. Zugleich veröffentlichte Herr Ventosa Photographien der Phänomene, die sich zeigten, wenn das Fernrohr einmal auf die Lichtquelle, sodann auf die Glastafel eingestellt war. Im letzteren Falle sollten nach Herrn Ventosas Annahmen die Wellen am deutlichsten erscheinen.

Ehe ich auf die Besprechung dieser Versuche eingehe, möchte ich bemerken, dass es mir allerdings gelang, die verschiedenen Scintillationserscheinungen im Laboratorium künstlich hervorzubringen, indem ich die irregulären Brechungen in der Atmosphäre durch die Wirkung einer Fensterglastafel und die reguläre Dispersion der Atmosphäre durch die Wirkung eines Prismas ersetzte. Nur beim Arago'schen Phänomen versagte die Fensterglastafel, worüber ich a. a. O. bemerkte: »Die Wirkung einer Fensterglastafel ist zu beträchtlich, um das Arago'sche Phänomen hervorzubringen. Verschiebt man aber ein Stück Spiegelglas vor der Öffnung eines nach einem nicht scintillierenden Lichtpunkte gerichteten Arago'schen Scintillometers, so wird man die charakteristischen, von Arago beschriebenen Erscheinungen wahrnehmen.« In den angeführten photographischen Reproductionen des Herrn Ventosa entsprechen die Figuren *(a)* der Einstellung auf die Lichtquelle, die Figuren *(b)* jener auf die Glastafel, also müssten vom Standpunkte des Herrn Ventosa die Figuren *(b)* die Wellen am deutlichsten zeigen. Ich kann dies bei Betrachtung der Figuren nicht finden mit Ausnahme der Figuren III *(a)* und III *(b)*. In diesen letzteren Figuren zeigt in der That *(b)* sehr schön ausgebildete, feingezackte Wellen, die in *(a)* fehlen. Das Entstehen dieser Wellen bedarf indessen einer besonderen Discussion als Ausgangspunkt der Beurtheilung des ganzen Versuches. Es wurde nämlich in dem Falle III *(b)* une vitre ondulée verwendet, ein gewelltes Glas, wie solche gebraucht werden, um das Licht durchzulassen, ohne beim Sehen durch dasselbe die Gegenstände deutlich erkennen zu lassen. Lässt man Sonnenstrahlen durch ein solches Glas treten, so entsteht in unmittel-

barer Nähe des Glases, beispielsweise 2 *cm* von demselben entfernt, ein System intensiver, wellenförmiger Brennlinien, die mit einem Schirme aufgefangen werden können. Stellt man ein Fernrohr auf die Glastafel ein, so wird man natürlich das System der Brennlinien sehr deutlich wahrnehmen. Die in Fig. III *(b)* sichtbaren feinen verticalen Streifen und die feingezackten Wellen der horizontalen Streifen sind offenbar photographierte Brennlinien dieser Art. Eine solche Glastafel verhält sich nun in der That ähnlich wie ein selbstleuchtender Körper, und die Wellen müssen sehr deutlich erscheinen, wenn das Fernrohr auf die Glastafel eingestellt ist, doch am deutlichsten bei Einstellung auf eine Ebene, die etwas vor oder hinter der Glastafel liegt. Es entspricht dies aber nicht den Verhältnissen in der Atmosphäre, wie aus den oben angeführten Daten hervorgeht. Ähnlich wie diese gewellten Gläser verhalten sich im allgemeinen auch die gewöhnlichen Fensterglastafeln. Lässt man Sonnenstrahlen durch eine solche Tafel treten und fängt die durchgegangenen Strahlen in unmittelbarer Nähe der Glastafel mit einem weißen Schirme auf, so gewahrt man im allgemeinen Brennlinien oder büschelförmig angeordnete Systeme von Brennlinien, die von kräftigen Schlieren im Inneren des Glases herrühren. Auch zahlreiche kleine Luftbläschen im Inneren des Glases, oft linear oder büschelförmig angeordnet, haben eine ähnliche Wirkung, so dass man ein Fernrohr ohne Benützung des Randes der Fensterglastafel genau auf dieselbe einstellen kann.

II. Versuch.

Bei Wiederholung und Variierung dieser Versuche des Herrn Ventosa benützte ich zunächst als Beobachtungsinstrument ein terrestrisches Fernrohr von 38 *mm* Öffnungsdurchmesser und 400 *mm* Brennweite, als Scintillationserreger eine kreisförmige Fensterglastafel, die in ihrer eigenen Ebene um ihren Mittelpunkt gedreht werden konnte und von dem wirksamen Strahlenbündel nahe der Peripherie der Scheibe senkrecht durchsetzt wurde, als Lichtquelle ein Fensterkreuz des Beobachtungsraumes. Die Entfernung des Erregers vom Beobachtungsinstrumente betrug 6·2 *m*, jene der Lichtquelle

17·36 *m*. Wurde bei rotierender Scheibe das Fernrohr einmal auf das Fensterkreuz, sodann auf die Glastafel eingestellt, so zeigte sich in beiden Fällen Wellenbewegung, doch in verschiedener Art. Bei ruhender Scheibe ließ sich erkennen, dass bei Einstellung auf das Fensterglas die Wellen durch ein System der oben erwähnten Brennlinien entstanden waren, die sich mit der rotierenden Scheibe fortbewegten.

III. Versuch.

Um diesen Übelstand zu vermeiden, wurde die früher verwendete Tafel durch eine andere ersetzt, die im durchgehenden Sonnenlichte nur vereinzelte, verhältnismäßig schwache Brennlinien der beschriebenen Art zeigte. In diesem Falle betrug die Entfernung der Tafel vom Fernrohre 4·3 *m*, die des Fensterkreuzes 16·7 *m*. Bei Einstellung auf das Fensterkreuz zeigte sich lebhafte Wellenbewegung, bei Einstellung auf die Glastafel hingegen eine kaum wahrnehmbare Bewegung.

Die Versuche I und III widerlegen die Annahme, nach welcher die Wellen am lebhaftesten bei Einstellung des Beobachtungsinstrumentes auf die Entfernung des Erregers erscheinen sollen.

Bei einer Reihe analoger Versuche diente dasselbe Beobachtungsinstrument, als Erreger der Scintillation eine unter der Visierlinie angebrachte Weingeistlampe und als Lichtquelle eine entfernte, durch das Fenster des Beobachtungsraumes sichtbare, von der Sonne beschienene Baumgruppe. Die Lampe bringt Luftschlieren hervor, die sich nach oben bewegen und das wirksame Strahlenbündel durchsetzen.

Die vielen Glanzpunkte der Blätter eines Baumes im Sonnenlichte wirken wie ebensoviele Fixsterne und zeigen bei verstelltem Oculare in ihren zu kleinen Scheiben erweiterten Bildern dieselben Fluctuationen mit Bewegungsrichtung, die, wie oben erwähnt, Arago zuerst bei den Fixsternen in der Marius'schen Scheibe beobachtete. Indem aber hier die vielen nebeneinander liegenden Bilder sich zu einem Gesammtbilde vereinigen, gewinnt das Phänomen eine flächenhafte Ausdehnung und dadurch eine außerordentliche Deutlichkeit. Es scheint, als flösse ein Bächlein klaren Wassers in bestimmter

Richtung über die Baumkronen hinweg. War das Fernrohr anfangs auf die größtmögliche Nähe eingestellt und wurde das Ocular sodann langsam eingeschoben, so traten bei einer gewissen Stellung *A* des Oculars die ersten Spuren von Fluctuationen auf, es zeigte sich ferner bei weiterem Einschieben des Oculars von *A* bis zu einer Lage *B* zunehmende Deutlichkeit des Phänomens bei abnehmender Strömungsgeschwindigkeit in der Richtung von unten nach oben, von *B* bis *C* (Einstellung auf die Baumkronen) abnehmende Deutlichkeit bei abnehmender Geschwindigkeit von unten nach oben, bei *C* immer noch lebhafte Bewegung ohne Strömungsrichtung (Flackern), von *C* bis *B'* zunehmende Deutlichkeit bei zunehmender Strömungsgeschwindigkeit von oben nach unten, von *B'* bis *A'* abnehmende Deutlichkeit bei zunehmender Strömungsgeschwindigkeit von oben nach unten, bei *A'* die letzten Spuren von Fluctuation. Das Scintillationsphänomen zeigte also zwei Maxima der Deutlichkeit bei *B* und *B'* vor und nach der Einstellung auf die Lichtquelle (Baumgruppe), entgegengesetzte Strömungsrichtungen vor und nach dieser Einstellung und wachsende Strömungsgeschwindigkeit bei zunehmender Abweichung der Einstellung des Fernrohres von jener auf die Lichtquelle. Die folgende Tabelle enthält die näheren Zahlenangaben. Alle Entfernungen sind vom Objective des Beobachtungsinstrumentes aus gerechnet. Die Entfernung der als Lichtquelle dienenden Baumgruppe betrug 59 *m*. Die Tabelle enthält unter den Buchstaben *B*, *C*, *B'* die Entfernungen, auf welche das Fernrohr eingestellt war bei dem ersten Maximum der Deutlichkeit des Phänomens, bei Abhandensein einer Strömungsrichtung, und beim zweiten Maximum der Deutlichkeit. Unter *E* befindet sich die Entfernung der Lampe als Erreger.

IV. Versuch.

Entfernung der Lichtquelle: 59 *m*.

	E	*B*	*C*	*B'*
1.	0·24 *m*	17·36 *m*	59 *m*	—
2.	5·86	21·08	58·5	negativ
3.	10·34	21·7	59	negativ
4.	16·12	22·94	58	—

Man sieht zunächst, dass bei diesen Versuchen die Einstellung *(B)* des Fernrohres, bei welcher die Deutlichkeit des Phänomens ein Maximum war, sich sehr unterschied von der Einstellung auf den Erreger *(E)*. Ebenso gilt dies natürlich vom zweiten Maximum *(B')*, das einer Einstellung auf negative Entfernung entspricht. Man kann überdies bemerken, dass die Einstellung *(C)*, welche der plötzlichen Umkehrung der Strömungsrichtung entspricht, stets mit der Einstellung auf die Lichtquelle übereinstimmte.

V. Versuch.

Die zuletzt beschriebenen Versuche wurden in der Weise variiert, dass an Stelle der Weingeistlampe als Erreger eine rotierende Glasscheibe gesetzt wurde. Es zeigten sich dieselben Erscheinungen wie früher. Insbesondere ergab sich in der obigen Bezeichnungsweise:

E	*B*	*C*	*B'*
1·55 *m*	10·54 *m*	59 *m*	negativ

VI. Versuch.

Die von mir oben gegebene Erklärung der Wirkungsweise der als Lichtquelle benützten Baumgruppe verlangt, dass auch jede andere mit Lichtpunkten dicht besäete Fläche als Lichtquelle benützt dieselben Erscheinungen hervorrufen müsse. In der That erhielt ich dieselben Erscheinungen, wenn als Lichtquelle statt der Baumgruppe ein mit Nadelstichen dicht übersäeter Bogen schwarzen Papieres benützt wurde, durch dessen Öffnungen Lichtstrahlen traten. Bei diesem Versuche betrug die Entfernung des Erregers vom Objective des Fernrohres 1 *m* und jene der Lichtquelle 17·36 *m*. Das Phänomen zeigte das erste Maximum der Deutlichkeit *(B)*, wenn das Fernrohr auf eine Entfernung von 7·44 *m* eingestellt war.

Aus demselben Grunde, wie in dem eben besprochenen Falle, müssen aber dieselben Erscheinungen auch noch dann wahrgenommen werden, wenn die Lichtquelle sich auf einen

einzigen Lichtpunkt reduciert. Auf diesen Fall bezieht sich der folgende Versuch.

VII. Versuch.

Als Beobachtungsinstrument diente dasselbe Fernrohr wie bei den früheren Versuchen, als Scintillationserreger eine schlierenfreie drehbare Scheibe aus Fensterglas, als Lichtquelle das Sonnenbildchen in einem Convexspiegel von kurzer Brennweite. Es ergaben sich in der That dieselben Erscheinungen wieder wie bei den früheren Versuchen. In dem durch Verstellung des Oculars erweiterten Bilde des Lichtpunktes zeigten sich Fluctuationen, die sich bei ausgezogenem Oculare im Sinne der Drehung der Scheibe, bei eingeschobenem im entgegengesetzten Sinne fortbewegten. Ebenso zeigten sich die beiden Maxima der Deutlichkeit, die Veränderungen der Strömungsgeschwindigkeit und die Umkehrung der Bewegungsrichtung unter denselben Umständen wie bei den früher beschriebenen Versuchen.

Die folgende Tabelle enthält dic näheren Zahlenangaben. In derselben haben B, C, B', E dieselbe Bedeutung wie bei Versuch V, während A und A' die Entfernungen ergeben, auf welche das Fernrohr während des Einschiebens eingestellt war, wenn die ersten Spuren von Fluctuation sichtbar wurden und wenn die letzten Spuren verschwanden. L bedeutet die Entfernung der Lichtquelle.

A	B	C	B'	A'	E	L
7·44 *m*	7·45 *m*	8·06 *m*	10·54 *m*	12·40 *m*	3·72 *m*	8·06 *m*
—	6·20	7·44	60	—	0·62	7·44
Keine Fluctuation					5·58	7·44
—	6·20 *m*	8·60 *m*	21·70 *m*	—	1·86	8·60
Lebhafte Fluctuation					0·10	13·02
Keine Fluctuation					13	13·08

Schließlich müssen sich dieselben Erscheinungen auch dann noch zeigen, wenn man das punktförmige Sonnenbildchen durch einen Fixstern ersetzt, die Glasscheibe durch die Atmo-

sphäre und die Bewegung der Scheibe durch die atmosphärischen Strömungen. In der That zeigen sich hier dieselben Erscheinungen und bilden das oben besprochene Marius'sche Phänomen, wie es sich bei hochstehenden Sternen zeigt.

Die Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit und Richtung der Fluctuationen von der Stellung des Oculars, wie sich dieselbe bei den Versuchen IV bis VII zeigte, ist leicht begreiflich. Schreitet in dem Raume zwischen der punktförmigen Lichtquelle und dem Objectiv des Fernrohres eine leichte Störung durch das einfallende Lichtbündel beispielsweise in der Richtung von unten nach oben fort, so wird dasselbe auch in dem Raume zwischen dem Objectiv und dem Bilde des Lichtpunktes geschehen, jedoch mit einer Geschwindigkeit, die überall dem Durchmesser des Querschnittes des Bündels proportional ist. Stellt man also das Ocular auf immer kleinere Querschnitte des Bündels ein, so wird sich die wahrgenommene Strömungsgeschwindigkeit beständig verringern und bei Einstellung auf das Bild der Lichtquelle gleich Null werden. Analoges gilt für den Raum zwischen dem Bilde und dem Ocular; je mehr man durch Ausziehen des Oculars das punktförmige Bild der Lichtquelle erweitert, desto größer wird die Strömungsgeschwindigkeit erscheinen. Da ferner ein Strahl, der sich zwischen Objectiv und Bild im Strahlenbündel beispielsweise oben befindet, nach der Kreuzung der Strahlen sich unten befinden wird, muss sich beim Durchgange durch das Bild der Lichtquelle die Strömungsrichtung umkehren. Diese Umkehrung konnte ich auch am Sirius bei günstigen atmosphärischen Strömungsverhältnissen und Benützung eines Instrumentes von 9 *cm* Öffnungsdurchmesser in aller Deutlichkeit beobachten.

Zur Structur und Form der Hagelkörner

von

Prof. Dr. **Paul Czermak** in Innsbruck.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Februar 1900.)

In der letzten Zeit hat sich wieder vielfach das Interesse der Hagelbildung zugewandt und sah ich mir, angeregt durch die interessante Darstellung von Trabert,[1] die meisten der dort citierten Artikel durch. Es drängten sich mir dabei sowohl mehrere die Form, als auch die Structur betreffende Fragen auf, über welche ich mich nirgends belehren konnte. Ich begann daher einige diesbezügliche Versuche, in erster Linie zur eigenen Orientierung, bei welchen sich aber einige Thatsachen ergaben, welche vielleicht ein allgemeineres Interesse beanspruchen können.

Beim Anblicke der verschiedenen Abbildungen von Hagelkörnern fielen mir besonders jene flachen, tellerförmigen auf, welche unmittelbar den Eindruck von Rotationskörpern[2] machen. Es wurde auch schon mehrfach darauf hingewiesen,[3] dass diese Körner ihre Gestalt wohl einer Drehbewegung verdanken werden. Besonders beim Anblicke der Querschnittsfigur kam mir die große Ähnlichkeit mit der Form des Plateau'schen Öltropfens in Erinnerung, und ist es gerade jenes Stadium, wo die Abplattung so weit gediehen ist, dass sich der Wulst zu bilden beginnt, welcher in den Ring übergeht. Es bekommt dann der

[1] Met. Zeitschr., 1899, S. 433.

[2] Met. Zeitschr., 1888, S. 443, Fig. 1, 2, 3, 9, 10; Met. Zeitschr., 1898, S. 31, Fig. 2, 4.

[3] Met. Zeitschr., 1888, S. 445.

Teller in der Mitte die Einsenkung, und der Rand verdickt sich. Dies ist auch die Form, welche man den guten Kreiseln gibt.

Um diese Erscheinungen etwas besser beobachten zu können, versuchte ich den Plateau'schen Tropfen aus einer Wasserkugel darzustellen, und gelingt dies ganz gut, wenn man eine Mischung von Toluol (spec. Gew. 0·886) und Chloroform (spec. Gew. 1·526) nimmt. Diese beiden Flüssigkeiten mischen sich sehr gut miteinander und gar nicht mit Wasser. Sie lassen sich sehr stark abkühlen und tritt dabei nur dann eine milchige Trübung ein, wenn das Chloroform einen geringen Wassergehalt besitzt, welchen man durch Behandlung mit Phosphorsäureanhydrit entfernen kann.

Wie ich zum Schlusse meiner Versuche fand, hat schon Dufour[1] solche Kugeln in einer Mischung von Mandelöl, Steinöl und Chloroform gemacht und dabei die meisten der von mir beobachteten Erscheinungen gefunden. Auch Berger[2] hat Wassersphäroide auf berußten Uhrschälchen und Tröpfchen auf Watte untersucht. Diese Versuche sind aber fast nirgends mit Quellenangabe citiert, und ich fand sie durch Zufall in O. Lehmanns Molecularphysik erwähnt. Ebenso sind die sehr interessanten und umfangreichen Arbeiten von Tumlirz[3] über Unterkühlung nicht citiert und fehlen in Winkelmanns Handbuch. Trotzdem glaube ich, dass meine unbewusste Wiederholung nicht unnütz war, da ich manche Details geändert hatte und mir gerade die Bestätigung dieser Resultate wichtig erscheint.

Der Plateau'sche Versuch ist in dieser Zusammenstellung nur wegen der großen Beweglichkeit der Toluol-Chloroformmischung schwieriger auszuführen. Diese Beweglichkeit erscheint mir aber aus anderen Gründen als ein Vorzug, da sich bei den Gefrierversuchen der flüssige Zustand des Wassers besser beobachten lässt und sich die Verhältnisse mehr denen in Luft nähern. Ich konnte so die Form des beginnenden Ringwulstes öfters erhalten. Da die Rotationsvorrichtung aber

---

1 Pogg. Ann., Bd. 114, S. 530.

2 Pogg. Ann., Bd. 124, S. 415.

3 Diese Sitzungsber., Bd. 100, S. 1197.

schlecht centriert war und ziemlich stark schlug, so waren die Figuren nicht so lange zu erhalten, dass ich sie hätte einfrieren lassen können. Dies wäre aber mit einer genügend präcisen Einrichtung gewiss erreichbar. Wie aber schon Plateau gezeigt hat, entstehen sehr leicht elliptische Körper. Geht die Rotationsaxe excentrisch durch die Kugel, so bilden sich längliche, abgeplattete Ellipsoide, und gerade solche Formen sind auch bei den Hagelkörnern[1] vertreten. Diese wollten mir vorher nicht recht unter die Rotationskörper passen, bis ich diese Gebilde selbst sich formen sah.

Wenn diese Art von Hagelkörnern aber aus einer einzigen flüssigen Wassermasse entstanden sein sollen, so muss ihnen eine sehr große Rotationsgeschwindigkeit zugemuthet werden. Je kleiner die Wasserkugeln sind, desto rascher müssen sie rotieren, um gegen die erhöhte Oberflächenspannung aufzukommen. Haben aber solche Körner einen festen Kern, auf welchem sich flüssiges Wasser niederlässt, so sind die Verhältnisse ganz anders. Es wird dann die Rotationsfigur mehr nach und nach ausgebildet und Anlass zu anderen Formen geben.

Ich machte daher einmal im Freien bei ungefähr —4° Lufttemperatur einen ähnlichen Versuch, indem ich auf das rotierende Scheibchen, welches sonst beim Plateau'schen Versuche verwendet wurde, Wasser von 0° central tropfen ließ. Es bildete sich zuerst bei sehr langsamer Rotation eine convexe Eisscheibe und flossen dann die Tropfen bei etwas rascherer Drehung sofort dem Rande zu und wurden von dort weggeschleudert. Es wuchsen so an drei Stellen im Verlaufe von einer Viertelstunde drei Eiszapfen in radialer Richtung, welche die Länge von 5 bis 12 *mm* bei einem Durchmesser der Eisplatte von 15 *mm* erreichten. Das Wegschleudern an bestimmten Stellen wurde hier wesentlich durch das Schlagen der Rotationsaxe herbeigeführt und würden bei einer genau centrierten Vorrichtung schon wulstförmige Verdickungen erreichbar sein. Wie aber das Mutterscheibchen etwas unsymmetrisch ist, so bevorzugen die flüssigen Wasser-

[1] Met. Zeitschr., 1888, S. 443, Fig. 9.



theilchen sofort eine Richtung mehr, und es entstehen Auswüchse, wie sie ja an Hagelkörnern auch vielfach vorkommen.

Diese tellerförmigen Körner sind aber sowohl ohne, als auch in der Mehrzahl mit unterscheidbarem Kerne angegeben.

Ich beobachtete nun die ruhenden Wasserkugeln in der Toluol-Chloroformmischung, und zwar bildete ich mir durch Schütteln in einem länglichen Becherglase eine große Anzahl kleiner Tropfen. Durch Untergießen von etwas chloroformreicherer Mischung und Aufgießen von Toluol kann man dieselben alle in eine Zone zusammendrängen. Sie fließen dabei fast gar nicht zusammen. Wurde aber eine geriebene Ebonitstange angenähert oder ließ ich gar einen kleinen Funken auf das isolierte Becherglas überspringen, so flossen eine Menge Tropfen plötzlich zu großen Kugeln zusammen. Es ist dies ein analoger Versuch, wie Lord Rayleigh ihn mit dem zerstäubten Wasserstrahle gemacht hat. Er zeigt nur unmittelbar, wie die kleinen schwebenden Tröpfchen zusammenspringen. Die isolierten leitenden Kugeln laden sich durch Influenz so, dass sie an den Berührungsstellen durch kleine Fünkchen die Oberflächenhaut durchschlagen, worauf die Vereinigung erfolgt.

Nun ließ ich so wie Dufour die Wasserkugeln in einer Kältemischung einfrieren. Es zeigte sich da sehr gut, wie stark destilliertes Wasser unter diesen Verhältnissen unterkühlt werden kann, und zwar kleinere Kugeln viel tiefer als große. Tumlirz[1] hat da gewiss recht, wenn er den Grund davon in der verschiedenen Oberflächenspannung sieht. Berger[2] fand dasselbe.

Die Unterkühlungstemperaturen, welche Dufour angibt, erschienen mir nicht ganz verlässlich, weil er die Kugeln in einer Eprouvette schweben ließ und ein gewöhnliches Thermometer in das Ölgemisch tauchte. Dieses musste sehr nahe an der Glaswand stehen, damit die Kugeln nicht darauf flossen. Die Temperaturen in so einem ruhigen, die Wärme schlecht leitenden Gemische sind aber ungemein verschieden und ist nicht angegeben, wie lange die Kältemischung einwirkte.

---

1 Diese Sitzungsber., Bd. 100, S. 1222.

2 Pogg. Ann., Bd. 124, S. 418.

Ich brachte daher die Löthstelle *L* (Fig. 1) eines feindrahtigen Thermoelementes in den Mittelpunkt der Wasserkugel. Wegen der Dichteänderungen der Flüssigkeiten während des Unterkühlens und wegen der Tendenz der Kugel, von solchen Drähten abzugleiten, brachte ich einen feinen Drahtring *R* in die Flüssigkeit, der etwas kleiner war als der Äquator der Kugel und gegen diesen lehnte sich dieselbe von unten aus fest an. So konnte das Thermoelement genau in die Mitte gebracht werden. Die Drähte waren in dünne Glasröhrchen gesteckt, welche in Capillaren ausgezogen waren und nur die Löthstelle frei ließen. Die andere Löthstelle befand sich in schmelzendem Schnee. Ich umgab das Becherglas mit abgekühlter Salzlösung, zuerst von 0° und dann mit einer solchen von —10°. Es ergaben sich so Unterkühlungen im Mittelpunkte von —4° bis —6° bei Kugeln von ungefähr 17 *mm* Durchmesser und von —8° bei einer 10 *mm* dicken.

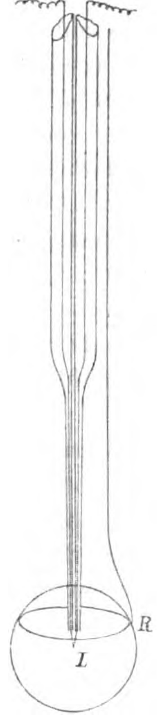


Fig. 1.

Das Erstarren beginnt stets in strahligen Streifen von der Oberfläche aus und bilden sich meist radiale Nadeln bei milchiger Trübung der ganzen Kugel, wobei das Thermometer sofort 0° anzeigt.

Auffällig ist es, wie sehr man sich über die Menge des gebildeten Eises täuscht. Nimmt man eine erstarrte Kugel von 18 *mm* Durchmesser sofort heraus, so hat sie eine ungefähr $1\frac{1}{2}$ *mm* dicke Kruste, von der aus nach innen eine Menge Nadeln ragen, die mit einem mäßig sulzigen Brei verbunden sind.[1] Bei einer Unterkühlung von 5° hat man den Eindruck, dass mindestens die Hälfte der Masse zu Eis erstarrt ist. Wie aber die Rechnung

---

[1] Vor kurzem erhielt ich Nachricht von einem Hagelfalle, bei welchem Körner gefunden wurden, welche vom Beobachter mit Eierschalen verglichen wurden und die gewiss in der Masse ohne Graupelkern erstarrtes, unterkühltes Wasser waren.

zeigt und wie ich mich auch calorimetrisch überzeugt habe, ist in diesem Falle erst $^1/_{16}$ der Gesammtmasse gefroren.

Hat man m Gramm Wasser um $t°$ unter 0° abgekühlt, so soll beim Erstarren der α^{te} Theil zu Eis werden. Die dabei frei werdende latente Schmelzwärme des Eises von $-t°$ heiße L'. Ist L jene des Eises von 0°, so können wir das L' aus folgender Überlegung für unseren Zweck genau genug finden. Wenn ich 1 g Eis von $-t°$ habe, so muss ich ihm λt Calorien zuführen, um es auf 0° zu bringen, wobei λ die specifische Wärme des Eises (zwischen 0° bis —20° bei 0·5) bedeutet. Das Gramm Eis von 0° verlangt noch L (ungefähr = 80) Calorien, um in Wasser von 0° verwandelt zu werden, dann muss ich aber $\lambda' t$ Calorien dem Wasser entziehen, um es um $t°$ zu unterkühlen. Die specifische Wärme des unterkühlten Wassers ist mit λ' bezeichnet und wird diese gleich 1 oder eventuell etwas kleiner als 1 anzunehmen sein.

Wenn ich also $L' = \lambda t + L - \lambda' t = L - t(\lambda' - \lambda)$ Calorien aufwende, so wird Eis von $-t°$ in Wasser von $-t°$ verwandelt, was ja der Begriff der latenten Schmelzwärme des Eises von $-t°$ ist.[1]

Wenn daher von den m Gramm unterkühlten Wassers αm Gramm erstarren, so werden $\alpha m L'$ Calorien frei, und diese haben nun 1. das gebildete Eis von $-t°$ auf Eis von 0° zu bringen, wozu $\lambda \alpha m t$ Calorien nöthig sind, und 2. das übrige Wasser um $t°$ zu erwärmen. Dies verlangt $\lambda'(1-\alpha) m t$ Calorien, so dass die Beziehung besteht:

$$\alpha m L' = \alpha m [L - t(\lambda' - \lambda)] = \lambda \alpha m t + \lambda' (1 - \alpha) m t.$$

Daraus folgt für den erstarrten Bruchtheil der ganzen Masse

$$\alpha = \frac{\lambda' t}{L}. \qquad 1)$$

α ist also der Unterkühlung proportional und $t_0 = \frac{L}{\lambda'}$ die theoretische Grenze, zu welcher das Wasser unterkühlt werden müsste, damit die ganze Masse zu Eis von 0° wird.

[1] Petterson fand durch directe Messung etwas größere Werte. Wied. Beibl., 2, S. 399.

In erster Annäherung wird man $\alpha = \frac{t}{80}$ setzen können, woraus $t_0 = 80$ folgen würde.

Bei den gewöhnlich vorkommenden Unterkühlungen sind aber die Bruchtheile des erstarrten Antheiles:

$t =$	1°	2°	3°	4°	5°	10°	20°
$\alpha =$	0·012,	0·024,	0·036,	0·048,	0·060,	0·120,	0·240.

Im Durchschnitte wird man eine Unterkühlung bei größeren Tropfen von circa 5° und bei kleinen von vielleicht 10° annehmen dürfen, so dass das gebildete Eis knapp den zehnten Theil der Tropfen ausmacht.

Da mir dieses Ergebnis der Rechnung zuerst sehr unwahrscheinlich vorkam, bestimmte ich calorimetrisch nach der einfachen Mischungsmethode die in größeren Eprouvetten gebildete Eismenge, wenn Wasser mit einer Ölschichte bedeckt im Freien unterkühlt wurde.

Es ergab sich da scheinbar ein noch kleinerer Bruchtheil, was aber daher kam, dass ich die Unterkühlungstemperatur nicht direct im unterkühlten Wasser messen konnte, sondern nur außerhalb, da jede Erschütterung vermieden werden musste.

Ich stellte im Freien gleichzeitig das dünnwandige Calorimetergefäß aus Messing auf und wartete bei einer Lufttemperatur von circa —4°, bis die Unterkühlung eintrat. Die innersten Wasserschichten waren aber gewiss noch etwas wärmer.

Ich schüttete das unterkühlte Wasser noch im Freien rasch in das Calorimetergefäß, wobei sofort die Erstarrung eintrat. Es häufte sich am Boden ein ganzer Kegel von einer sulzigen Eismasse. Diese wurde rasch ins Zimmer gebracht und eine gewogene Menge wärmeren Wassers, unter Umrühren mit einem feinen Thermometer, zugesetzt.

Wurden n Gramm Wasser von der Temperatur t_1^0 zugesetzt und stellte sich die Endtemperatur t_2^0 ein, so hatte dieses Wasser $n(t_1 - t_2)$ Calorien abgegeben. Diese dienten dazu, um 1. die αm Gramm gebildeten Eises von 0° in Wasser von 0° zu verwandeln, wozu $L\alpha m$ Calorien nöthig sind, und 2. die ganze Wassermasse, sammt dem Calorimetergefäße und Thermometer vom Wasserwerte μ, von 0° auf die Endtemperatur

von t_2^0 zu bringen. Dies sind noch $(m+\mu)t_2$ Calorien, so dass die Beziehung besteht:

$$n(t_1-t_2) = L\alpha m+(m+\mu)t_2;$$

daraus folgt:

$$\alpha = \frac{n(t_1-t_2)-(m+\mu)t_2}{Lm}.$$

Der Antheil α, welcher bei der hier beschriebenen Manipulation gebildet wird, bedarf noch einer kleinen Correctur wegen des Calorimetergefäßes, welches beim Einschütten die Temperatur $-t'$ haben soll. Die beim Erstarren der αm Gramm Eises frei werdenden Calorien haben also auch noch das Gefäß auf 0° zu bringen, wozu $\mu t'$ Calorien verbraucht werden, so dass die frühere zur Berechnung des Bruchtheiles α dienende Formel 1) jetzt lautet:

$$\alpha = \frac{\lambda' t + \frac{\mu}{m} t'}{L}. \qquad 2)$$

Ist das Gefäß um ebensoviel abgekühlt, wie das unterkühlte Wasser, so kann man schreiben:

$$\alpha = \frac{\lambda' t\left(1 + \frac{\mu}{m}\right)}{L}. \qquad 3)$$

Diese Correction beträgt aber gewöhnlich nur einige Zehntelgrade. Ich fand so bei:

	$t =$	3°,	3°5,	4°
calorimetrisch bestimmt:	$\alpha =$	0·028,	0·039,	0·040.
nach der Rechnung:	$\alpha =$	0·036,	0·032,	0·048.

Ist nun dieser kleine Bruchtheil Eis gebildet, so braucht es noch ziemlich lange, bis die ganze Masse gefroren ist. Für jedes neue Gramm Eis müssen ja immer circa 80 Calorien an die Umgebung abgegeben werden und die Wärmeleitung im Eise und Wasser ist eine ziemlich schlechte.

Jedenfalls wird aber aus unterkühltem Wasser stets trübes Eis gebildet.[1] Das zwischen den Nadeln eingeschlossene Wasser lässt in allen Zwischenräumen Luftbläschen zurück, und so wird die ganze Masse milchig weiß, wie auch Dufour und Berger angeben.

Klares Eis bildet sich, wie wir an den Eiszapfen sehen, am besten beim Gefrieren des nullgradigen Wassers auf der Oberfläche von Eisschichten, da die Luft dann entweichen kann. Die Seele eines Eiszapfens ist gewöhnlich mit Luftblasen durchsetzt und bilden sich diese immer durch das Gefrieren der Spitze. Der Eiszapfen wächst mit einer Cavität an der

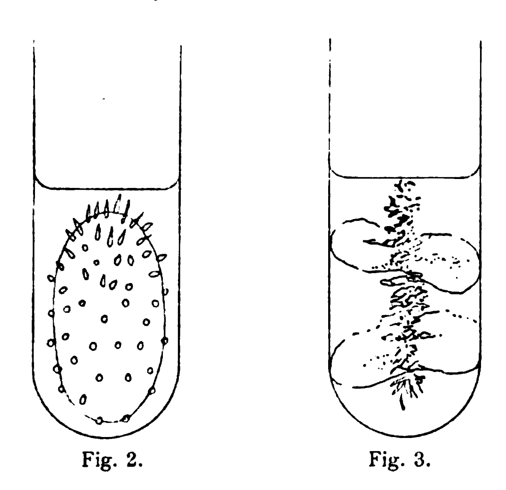


Fig. 2. Fig. 3.

Spitze, wo der Tropfen hängt, und umschließt so immer einen Theil flüssigen Wassers, welches dann in seinem Inneren gefriert und Luftblasen zurücklässt.

Um die Structur verschiedener Eisarten deutlich sehen zu können, ließ ich an einigen kalten Nächten vier größere Eprouvetten mit Wasser einfrieren, und zwar waren je zwei mit destilliertem Wasser und zwei mit Wasserleitungswasser gefüllt. Von diesen war je eine immer mit einer Paraffinölschichte bedeckt.

Das mit Öl bedeckte Wasser war meist unterkühlt und bei stärkerer Kälte das Wasserleitungswasser stets erstarrt. Das

[1] Elfenbeinweißes Eis erhält man bei Anwendung einer Kältemischung aus fester Kohlensäure mit Äther.

destillierte Wasser erstarrte nur einmal bei —11°. Das offene Wasser fror in concentrischen Schichten vom Mantel aus, wobei das Wasserleitungswasser stets blasenreicher und einmal sogar trüb war. Die ausgetriebenen Luftblasen setzten sich meist in oft merkwürdig regelmäßiger Anordnung an der Grenze von Wasser und Eis ab (Fig. 2). Bei gänzlichem Gefrieren bildeten sie einen faserigen, trüben, raupenartigen Cylinder im Inneren (Fig. 3), so dass auch beim Gefrieren des Wassers ohne Unterkühlung ein den Schneekrystallen oder Graupelkernen täuschend ähnliches Gebilde entstehen kann.

Im Falle des Gefrierens bei —11° waren auch alle Eiscylinder in horizontaler Richtung, von dem faserigen Kerne ausgehend, in zwei bis drei Theile zersprengt. Es ist dies ziemlich die Richtung der Eiskrystalle, denn bei Prüfung mit der Turmalinzange sah man in den Krystenplatten der Eismäntel ganz deutlich Theile der zur Axe senkrechten Axenfigur. Würde man Wasserkugeln so gefrieren lassen, so wäre die Lagerung der Axen mehr radial, und beim Gefrieren von außen nach innen würde sich ein haariger Kern bilden und beim Erstarren des innersten Wassers die Kugel radial zerspringen.

Es kann also nicht nur unterkühltes Wasser einen trüben Eiskern bilden, sondern in fast noch täuschenderer Weise das nicht unterkühlte, so dass in vielen Fällen das Graupelkorn nicht echt sein muss. Es wäre daher sehr erwünscht, wenn die Hagelkörner nicht nur bezüglich ihrer Größe und Form, sondern ebenso genau bezüglich ihrer Temperatur, Structur und ihres krystallinischen Gefüges untersucht würden.

Die hier mitgetheilten Versuche wurden, wegen Mangels eines eigenen Laboratoriums, in dem physikalischen Institute meines Collegen Prof. Dr. I. Klemenčič ausgeführt und spreche ich demselben an dieser Stelle für die überlassenen Apparate meinen Dank aus.

Über die Änderung des Momentes eines Magnetes durch Erschütterung, sowie durch Abreißen und Abziehen von weichem Eisen

von

Karl Krüse.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1900.)

Einleitung.

Die folgenden Untersuchungen zerfallen in zwei Theile. Im ersten Theile werden die Magnete durch Herabfallen erschüttert, ferner von einem Eisenstabe abgerissen und von einer Eisenplatte abgezogen. Sämmtliche Magnete wurden vor den Versuchen in gleicher Weise im Felde einer stromdurchflossenen Spule von circa 700 a. E. Stärke bei mehrmaligem Wechsel der Feldrichtung magnetisiert und längere Zeit (siehe in den Tabellen das beigefügte Datum) in der ersten Hauptlage aufbewahrt, weil bekanntlich frisch magnetisierte Magnete einen kleinen Theil ihres Magnetismus von selbst verlieren. Zwei Magnete (45, 9 und $\overline{45}$, 6) wurden außerdem noch in der Weise magnetisiert, dass der Strom nach erfolgtem mehrmaligen Commutieren schließlich durch einen eingeschalteten Flüssigkeitsrheostat stetig bis Null abgeschwächt wurde, durch welche Methode ein größeres Moment erreicht wird. Auch mit einzelnen, nach der Methode von Strouhal und Barus ausgekochten Magneten wurden diese Versuche durchgeführt.

Im zweiten Theile werden einzelne Magnete, die wegen ihres Dimensionsverhältnisses dazu geeignet schienen, einem magnetischen Kreisprocess unterworfen, und zwar kam dabei die magnetometrische Methode zur Anwendung. Aus der so

erhaltenen Hysteresis-Schleife wurde die Coercitivkraft, die remanente und maximale Magnetisierungsintensität und die Retentionsfähigkeit bestimmt.

Die untersuchten Magnete sind mit Kennzeichen versehen, und zwar mit einer die Stahlsorte charakterisierenden Marke und rechts daneben beigefügter Länge in Centimetern. Es wurden folgende Marken untersucht: »UI«, »45«, »43«, »0«, »00«, »Z«, »R«, »B«, »M«.[1] Ferner ist unter *V* überall das Dimensionsverhältnis eingetragen, d. h. das Verhältnis der Länge zur Seite beim quadratischen und zum Durchmesser beim kreisförmigen Querschnitte.

I. Theil.

A. Erschütterung der Magnete.

Die Erschütterung der Magnete geschah in der Weise, dass dieselben durch vertical gehaltene Messingröhren auf eine horizontale Marmorplatte fallen gelassen wurden. Die Länge der Röhren war 1 *m* und 1·94 *m*; zuerst erfolgten die Fälle aus 1 *m* Höhe, dann jene aus der nahezu doppelten (1·94 *m*) und dann bei einigen Magneten noch aus 9·6 *m* Höhe (zweites Stockwerk der Universität); die Art des Auffallens war im letzten Falle eine sehr ungleiche, indem die Magnete das einemal ziemlich senkrecht, anderemale in schräger Richtung auf die Platte fielen, was die Änderung des Momentes jedenfalls sehr beeinflusste. Die Anzahl der Fälle durch die kleine und dann durch die große Röhre war bei jedem Magnete 1, 1, 1, 5, 20, und zwar stets in dieser Folge. Bei Bestimmung des Momentes nach jeder Erschütterung wurden die Magnete auf Messingtischchen in eine fixe Lage zum Magnetometer gebracht und dessen Ausschlag (α) mit Spiegel, Fernrohr und Scala beobachtet. Sonach ist das Moment *M* gegeben durch

$$M = m \, . \, \alpha.$$

Je nach der Größe ihres Momentes wurden die Magnete in einer solchen Entfernung vom Magnetometer beobachtet,

[1] Näheres darüber vide: Klemenčič, Untersuchungen über permanente Magnete, III. Diese Sitzungsber., Bd. CIX.

dass für jene kleineren Momentes $m = 0·88$, für jene größeren Momentes aber $m = 3·68$ war, welche Zahlen durch Beobachtung mit einem Normalmagnete ($M = 503$ a. E.) ermittelt wurden. Ein Magnet (B, 15) musste wegen seines großen Momentes in noch weiterer Entfernung beobachtet werden. Der Ausschlag (α) wurde aus drei Ablesungen, die in Intervallen von einer Minute gemacht wurden, berechnet.

Die Resultate der Beobachtung stellen wir in den folgenden Tabellen zusammen, in denen die procentische Änderung des Momentes angegeben ist. Zum Schlusse wird die procentische Gesammtänderung des Momentes angegeben, die dasselbe nach sämmtlichen Fallversuchen erlitten.

Die Magnete von gleicher Länge und Querschnitt sind nebeneinander angeordnet, ihre Länge ist, wie schon erwähnt, in der Bezeichnung derselben in Centimetern angegeben.

Tabelle I ($V = 10$, $m = 0·88$).

Magnet:	45, 4	43, 4	UI, 4	00, 4	0, 4	Zahl der Fälle	Fallhöhe in Centimetern
Magnetisiert am:	26./V. a.	20./V. a.	26./V. a.	20./V. a.	27./V. a.		
Erschüttert am:	3./VI. a.	21./V. a.	3./VI. a.	21./V. a.	2./VI. a.		
Anfänglicher Ausschlag:	159·2	160·0	173·9	224·8	227·7		
Moment:	140·1	140·8	153·1	197·8	202·6		
Procentische Abnahme:	1·9	1·8	1·6	1·3	1·0	1	100
	0·3	0·6	0·6	0·3	0·4	1	100
	0·0	0·1	0·1	0·1	0·1	1	100
	1·1	0·5	0·6	0·4	0·7	5	100
	0·6	1·5	1·1	0·5	0·8	20	100
	0·6	0·3	0·0	0·4	0·4	1	194
	0·1	0·6	0·5	0·4	0·2	1	194
	0·7	0·4	0·2	0·5	0·2	1	194
	0·5	1·1	0·8	0·5	0·0	5	194
	0·7	1·7	0·5	0·5	0·8	20	194
Gesammtabnahme:	6·7	8·2	5·9	4·8	4·4		

Reihenfolge der Magnete nach der Größe ihrer Gesammtabnahme:

»0, 4«, »00, 4«, »UI, 4«, »45, 4«, »43, 4«.

Tabelle II ($V = 10$, $m = 0\cdot88$).

Magnet:	43, 6	45, 6	UI, 6	0, 6	00, 6	Zahl der Fälle	Fallhöhe in Centimetern
Magnetisiert am:	15./V. p.	15./V. p.	15./V. p.	15./V. p.	15./V. p.		
Erschüttert am:	18./V. a.	18./V. a.	17./V. a.	16./V. a.	16./V. p.		
Anfänglicher Ausschlag:	518·7	555·8	617·1	721·6	780·0		
Moment:	456·5	489·1	543·0	635·0	686·4		
Procentische Abnahme:	1·4	1·2	1·2	1·4	0·6	1	100
	0·3	0·7	0·1	0·4	0·2	1	100
	0·6	0·1	0·1	0·5	0·1	1	100
	0·4	0·4	0·5	0·4	0·6	5	100
	0·4	1·1	0·8	0·5	0·5	20	100
	0·3	0·3	0·4	0·4	0·1	1	194
	0·7	0·2	0·3	0·3	0·2	1	194
	0·1	0·2	0·2	0·1	0·2	1	194
	0·4	0·5	0·6	0·5	0·6	5	194
	0·7	1·1	0·8	0·5	0·8	20	194
Gesammtabnahme:	5·1	5·7	4·7	4·8	3·8		
Erschüttert am:	18./V. p.	18./V. p.	18./V. p.	18./V. p.	18./V. p.		
Procentische Abnahme:	18·3	2·0	15·3	3·7	2·0	1	960
	0·2	19·5	3·5	5·0	6·2	10	960
Gesammtabnahme:	22·6	25·6	22·1	12·9	11·5		

Reihenfolge der Magnete nach der Größe ihrer Gesammtabnahme:

»00, 6«, »UI, 6«, »0, 6«, »43, 6«, »45, 6«.

Tabelle III ($V = 25$, $m = 0·88$).

Magnet:	$\overline{00}$, 10	0, 10	UI, 10	43, 10	00, 10	45, 10	$\overline{45}$, 10	Zahl der Fälle	Fallhöhe in Centimetern
Magnetisiert am:	9./V. (p. m.)			9./V. p.	29./V. p.	29./V. p.	9./V. p.		
Erschüttert am:	13./V. a.	12./V. a.	13./V. a.	13./V. a.	31./V. p.	30./V. p.	15./V. p.		
Anfänglicher Ausschlag:	1053·1	1091·6	1149·1	1158·5	1158·5	1163·8	1179·2		
Moment:	926·6	960·6	1011·1	1019·0	1019·5	1024·1	1037·7		
Procentische Abnahme:	0·8	0·9	1·4	2·8	0·8	1·6	2·0	1	100
	—0·0	0·1	0·4	0·1	0·3	1·1	1·3	1	100
	0·2	0·1	0·3	0·7	0·1	0·4	0·2	1	100
	0·3	0·6	0·5	0·0	0·3	0·3	0·7	5	100
	0·6	0·1	0·1	0·3	0·5	0·7	0·7	20	100
	0·1	0·4	0·2	0·4	0·0	0·2	0·6	1	194
	0·0	0·3	0·4	0·2	0·4	0·3	—0·0	1	194
	0·2	0·1	0·1	0·4	0·0	0·1	0·6	1	194
	0·2	0·2	0·3	0·6	0·6	0·6	0·4	5	194
	0·2	0·5	0·4	0·6	0·2	0·8	0·8	20	194
Gesammtabnahme:	2·7	3·1	4·3	6·9	3·3	5·9	7·0		
Erschüttert am:	18./V. (p. m.)								
Anfänglicher Ausschlag:	1021·8	1053·3	1099·0	1154·9			1181·1		
Procentische Abnahme:	1·7	2·6	8·7	20·9			13·4	1	960
	gebrochen	7·0	3·5	gebrochen			gebrochen	10	960
Gesammt-Abnahme:	—	12·3	15·7	—			—		

Reihenfolge der Magnete nach der Größe der Gesammtabnahme:

»$\overline{00}$,10«, »0,10«, »00,10«, »UI,10«, »45,10«, »43,10«, »$\overline{45}$,10«.

00,10 und 45,10 dienten als Ersatz für die gebrochenen Magnete $\overline{00}$,10 und $\overline{45}$,10.

Tabelle IV ($V = 25$, $m = 3 \cdot 68$).

Magnet:	43, 15	00, 15	45, 15	UI, 15	0, 15	Zahl der Fälle	Fallhöhe in Centimetern
Magnetisiert am:	3./XI. a. m.						
Erschüttert am:	6./XI. a. m.			7./XI. a.	6./XI. a.		
Anfänglicher Ausschlag:	925·0	937·2	965·7	991·4	1005·2		
Moment:	3404·0	3448·9	3553·8	3648·4	3699·1		
Procentische Abnahme:	1·7	1·8	2·4	2·0	1·1	1	100
	0·8	0·5	0·6	0·2	0·3	1	100
	0·6	0·3	0·3	0·4	0·2	1	100
	0·5	•0·6	0·6	0·6	0·3	5	100
	0·5	0·6	0·8	0·4	0·3	20	100
	0·4	0·3	0·5	0·4	0·4	1	194
	0·2	0·1	0·3	0·2	0·1	1	194
	0·2	0·2	0·2	0·1	0·1	1	194
	0·6	0·5	0·3	0·6	0·4	5	194
	0·5	0·7	1·1	0·7	0·4	20	194
Gesammtabnahme:	5·9	5·4	6·7	5·5	3·5		

Reihenfolge der Magnete nach der Größe ihrer Gesammtabnahme:

»0,15«, »00,15«, »UI,15«, »43,15«, »45,15«.

Tabelle V ($m = 0{\cdot}88$ und $m = 3{\cdot}68$).

gnet:	M, 6	M, 10	Z, 10	Z, 10 (r.)	B, 10	B, 15	R, 6	R, 15	Zahl der Fälle	Fallhöhe in Centimetern
	10	25	10	12·5	10	15	10	25		
gneti- rt am:	23./X. p.	27./X. p. m.			28./X. a. m.					
chüt- t am:	26./X. p.	30./X. a. m.			3./XI. p.	31./X. a.	31./X. a.	31./X. a.		
ängl. sschl.:	579·7	1112·3	490·4	386·0	679·8	573·4	413·6	872·6		
ment:	410·1	978·8	1804·7	1420·5	2501·7	—	364·0	1339·5		
ocen- he Ab- hme:	1·1	0·6	0·0	0·5	0·8	1·0	1·1	4·4	1	100
	0·7	0·3	0·1	0·1	0·2	0·7	1·0	0·3	1	100
	0·4	0·0	0·2	—0·0	0·2	0 2	0·2	0·9	1	100
	0·6	0·2	0·1	0·1	0·4	0·2	0·3	1·3	5	100
	gebrochen		0·7	1·3	0·3	0·6	1·0	0·9	20	100
			0·1	0·1	0·6	0·5	0·3	0·6	1	194
			0·1	0·0	0·1	0·7	0·3	0·4	1	194
			0·2	0·0	0 1	0·2	0·0	0·6	1	194
			0·1	0·1	0·8	0·8	0·6	1·1	5	194
			0·2	0·2	1·0	0·8	2·6	0·9	20	194
sammt- nahme:			1·7	2·3	4·5	5·5	7·3	10·9		

Es ist

$m = 0{\cdot}88$ für die Magnete »M, 6«, »M, 10«, »R, 6«,
$m = 3{\cdot}68$ für die Magnete »Z, 10«, »Z, 10 (rund)«, »B, 10«, »R, 15«.

In noch weiterer Distanz musste »B, 15«, der größte aller Magnete, beobachtet werden. Die Magnete »Z, 10 (r.)«, »R, 6«, »R, 15« haben kreisförmigen Querschnitt.

Tabelle VI ($m = 3 \cdot 68$ und $m = 0 \cdot 88$).

Magnetisierung in gewöhnlicher Weise *(A)* und mit Stromabschwächung *(B)*.

Magnetisierung:	*A*	*B*	*A*	*B*	Zahl der Fälle	Fallhöhe in Centimetern
Magnet:	45, 9	45, 9	$\overline{45}$, 6	$\overline{45}$, 6 [1]		
Magnetisiert am:	5./VII. a.	7./VII. a.	28./VI. a.	3./VII. a.		
Erschüttert am:	7./VII. a.	8./VII. a.	1./VII. a.	5./VII. a.		
Anfänglicher Ausschlag:	292·0	331·6	521·0	555·2		
Moment:	1074·6	1220·3	458·5	488·6		
Procentische Abnahme:	1·3	3·1	1·3	3·4	1	100
	0·5	0·5	0·8	0·7	1	100
	0·1	0·1	0·1	0·3	1	100
	0 7	0·6	0·5	1·0	5	100
	0 2	0·6	1·2	1·0	20	100
	0·2	0·7	0·3	0·4	1	194
	0·3	0·1	0·3	0·3	1	194
	0·2	0·1	0·2	0 3	1	194
	1·2	1·3	0·6	0 6	5	194
	0·7	1·2	1·8	1·7	20	194
Gesammtabnahme:	5·4	8·1	6·8	9·4		

[1] Der Strich über der Marke (wie er auch in Tabelle III schon vorkommt) bedeutet, dass das bezeichnete Exemplar ein anderes ist als ein ebenfalls untersuchtes mit derselben Bezeichnung.

Tabelle VII ($m = 3 \cdot 68$, $V = 25$).

Ausgekochte Magnete.[1]

Magnet:	$\overline{43}$, 15	$\overline{UI}$, 15	$\bar{0}$, 15	$\bar{0}$, 15	Zahl der Fälle	Fallhöhe in Centimetern
Magnetisierung:	frisch magnetisiert, dann beobachtet			frisch magnetisiert und 4 Stunden ausgekocht		
Magnetisiert am:	10./XI. (a. m.)			23./XII. a.		
Erschüttert am:	13./XI. (a. m.)			27./XII. a.		
Anfänglicher Ausschlag:	914·5	965·0	996 1	962·7		
Moment:	3384·7	3570 5	3685·6	3562·0		
Procentische Abnahme:	3·0	2·3	1·4	0·4	1	100
	1·2	0·5	0·3	0·1	1	100
	0·3	0·4	0·1	0·1	1	100
	1·2	0·6	0·3	0·1	5	100
	0·4	0·4	0·4	0·1	20	100
	0·6	0·4	0·3	0·2	1	194
	0·3	0·3	0·1	0·2	1	194
	0·2	0·4	0 1	0·0	1	194
	0·6	0·3	0·3	0·3	5	194
	1·0	0·5	0·5	0·2	20	194
Gesammtabnahme:	8·3	6·0	3·7	1·6		

[1] Nach dem Verfahren von Strouhal und Barus.

Resultate.

Durch Erschütterung wird der Magnetismus geschwächt, nur nach mehrmaligem Fallen aus derselben Höhe kann es in vereinzelten Fällen vorkommen, dass das Moment ungeändert bleibt oder gar eine ganz unbedeutende Zunahme zeigt (—0·0% in den Tabellen).

Bei fast sämmtlichen Magneten erfolgte (vom Falle aus 9·6 *m* Höhe abgesehen) die stärkste Abnahme des Momentes nach der ersten Erschütterung. Diese Abnahme nach dem ersten Falle ist im allgemeinen bei kürzeren Magneten ($V = 10$) etwas kleiner als bei den längeren ($V = 25$), hingegen schwankt das Verhältnis der Gesammtabnahme zur Abnahme nach dem ersten Falle aus 1 *m* Höhe zwischen 2·5 und 6·6 (vom Magnet »Z 10« abgesehen), ist aber durchschnittlich bei Magneten mit größerem Dimensionsverhältnisse geringer als bei denen mit kleinerem. Es ist für

$V = 25$ (Magnete 10 und 15) das mittlere Verhältnis **3·2**,
$V = 10$ (Magnete 6 und 4) das mittlere Verhältnis **4·2**.

Die mittlere procentische Gesammtabnahme nach mehrmaligem Fallen aus 1·94 *m* Höhe ist demnach nahezu gleich für beide Dimensionsverhältnisse (5·0% und 5·4%).

2. Den geringsten Verlust an Magnetismus durch mechanische Erschütterung zeigten die beiden Magnete mit der Marke »Z« (Gesammtabnahme 1·7% und 2·3%). Aus den Tabellen I bis IV ersieht man, dass die Stahlsorten »0« und »00« durch Erschütterung wenig von ihrem Magnetismus verlieren, die Sorte »UJ« etwas mehr und »45« und »43« am meisten; und zwar gilt dies für jedes Dimensionsverhältnis und jede Dicke der Magnete, wie aus folgender kleiner Zusammenstellung der procentischen Gesammtabnahme deutlich zu ersehen ist:

Länge	0	00	UI	45	43	
4	4·4	4·8	5·9	6·7	8·2	$V = 10$
6	4·8	3·8	4·7	5·7	5·1	
10	3·1	3·3	4·3	5·9	6·9	$V = 25$
15	3·5	5·4	5·5	6·7	5·9	
Mittel:	3·9	4·0	5·1	6·3	6·5	

Als die schlechtesten Magnete erwiesen sich jene mit der Marke »R« (7·3% und 10·9% Gesammtabnahme).

3. Erfolgte die Magnetisierung mit langsamer Stromabschwächung, so ist sowohl die Gesammtabnahme, als auch jene nach der ersten Erschütterung eine bedeutend größere als bei gewöhnlicher Magnetisierung (Tabelle VI).

4. Ausgekochte Magnete, welche frisch magnetisiert und dann beobachtet wurden, zeigen einen stärkeren Verlust an Magnetismus als gleiche Magnete, die nicht gekocht wurden.

Werden jedoch ausgekochte Magnete frisch magnetisiert und dann vor der Erschütterung nochmals (4 Stunden) gekocht, so zeigen sie eine sehr geringe Abnahme ihres Momentes (Tabelle VII).

B. Abreißen und Abziehen der Magnete.

Wir gehen dazu über, die Änderung des magnetischen Momentes zu untersuchen, wenn die Magnete *a)* dem Ende eines weichen Eisenstabes genähert, mit ihm in Berührung gebracht und dann davon abgerissen werden, und zwar mit jedem Pole erst einmal und dann zehnmal; *b)* auf die Mitte einer weichen Eisenplatte gelegt und dann in der Richtung der Axe der Magnete immer gegen dasselbe Ende der Platte abgezogen werden, ebenfalls zuerst einmal, dann zehnmal, in welch letzterem Falle der Magnet abwechselnd mit seinen verschiedenen Flächen aufgelegt wurde.

Die Dimensionen des Eisenstabes sind 20 *cm* Länge, 0·7 *cm* Durchmesser, jene der Eisenplatte 24 *cm* Länge, 4 *cm* Breite und 0·4 *cm* Dicke. In folgender Tabelle ist unter *A* die procentische Abnahme nach einmaligem, unter *B* jene nach zehnmaligem Abreißen angegeben.

Tabelle VIII (Abreißen).

Magnet	Anfänglicher Ausschlag	*A*	*B*	Gesammtabnahme	Magnetisiert am	Beobachtet am	V
M, 10	321·2	—0·0	0·1	0·1	23./X. p. m.	26./X. p. m.	10
Z, 10 (r.)	476·3	—0·4	0·2	—0·2			12·5
Z, 10	642·4	—0·3	0·3	0·0			10
R, 6	409·6	—0·8	0·1	—0·6	24./X. p. m.	27./X. p. m.	10
R, 15	862·3	—0·1	0·1	0·0			25
B, 10	681·0	—0·2	0·1	—0·0			10
B, 15	558·1	—0·2	0·2	0·0			15
0, 4	228·0	0·1	0·2	0·4	27./V. a. m.	29./V. a. m.	10
00, 4	222·5	0·0	0·4	0·4			
UI, 4	174·4	—0·1	0·3	0·2			
43, 4	160·3	—0·2	0·3	0·1			
45, 4	159·6	—0·2	0·3	0·1			
00, 6	767·1	0·1	0·3	0 4	26./V. a. m.	29./V. a. m.	10
0, 6	708·2	—0·1	0·4	0·3			
UI, 6	605·8	—0·3	0·3	0·0			
45, 6	547·1	—0·5	0·3	—0 2			
43, 6	511·2	—0·4	0·3	—0·0			
0, 10	1090·0	—0·2	0·2	0·1	27./V. a. m.	30./V. a. m.	25
UI, 10	1147·8	0·1	0·1	0·2			
00, 10	1158·5	—0·1	0·2	0·2	31./V. p. m.	3./VI. a. m.	
45, 10	1165·4	0·1	0·1	0·2			
0, 15	1009·0	—0·0	0·1	0·1	25./X. p. m.	28./X. a. m.	25
UI, 15	991·9	—0·0	0·1	0·1			
45, 15	969·4	—0·0	0·1	0·1			
00, 15	939·9	—0·0	0·1	0·1			
43, 15	883·8	—0·1	—0·1	—0·2			
$\bar{0}$, 15	997·0	—0·1	0·1	0·0	13./XI. p. m.	16./XI. a. m.	Ausgekochte Magnete magnetisiert und beobachtet
$\overline{UI}$, 15	965·2	—0·1	0·1	—0·0			
$\overline{43}$, 15	914·6	—0·0	0·0	0·0			
$\bar{0}$, 15	946·0	—0·5	0·0	—0·5	23./XII. a. m.	27./XII. a. m.	Dieselben Magnete magnetisiert, 4 Stunden gekocht, dann beobachtet
$\overline{UI}$, 15	927·5	—0·4	—0·0	—0·4			
$\overline{43}$, 15	867·9	—0·6	—0·0	—0·6			

Wir erhalten aus dieser Tabelle folgendes Resultat:

1. Die Änderungen des Magnetismus durch Abreißen von weichem Eisen sind in allen Fällen sehr gering. Nach einmaligem Abreißen erfolgte beinahe immer eine Zunahme, nach zehnmaligem jedoch stets eine Abnahme, die möglicherweise auch auf die Erwärmung des Magnetes durch das Halten in der Hand zurückzuführen ist; bemerkenswert ist, dass diese Abnahme bei Magneten vom Dimensionsverhältnisse $V = 25$ fast durchwegs $0 \cdot 1\,^0/_0$ beträgt und bei den Magneten vom Dimensionsverhältnisse $V = 10$ $0 \cdot 3\,^0/_0$. Das Gesagte gilt auch von den ausgekochten Magneten, die nach frischer Magnetisierung beobachtet wurden.

2. Wenn ausgekochte Magnete nach frischer Magnetisierung abermals (4 Stunden) ausgekocht und dann abgerissen werden, zeigten sie gar keine Abnahme des Momentes, sondern auch nach 11maligem Abreißen noch eine Zunahme von $0 \cdot 5\,^0/_0$ im Mittel.

Tabelle IX (Abziehen).

Magnet	Anfänglicher Ausschlag	A	B	Gesammtabnahme	Magnetisiert am	Beobachtet am	V	Mittel der Gesammtabnahme
M, 10	320·2	6·6	12·6	18·4	23./X. p. m.	26./X. p. m.	10	
Z, 10 (r.)	477·2	9·9	10·1	19·1			12·5	
Z, 10	642·4	13·1	12 0	23·6			10	
R, 6	412·4	1·5	10·8	12·1	24./X. a. m.	27./X. p. m.	10	
R, 15	862·3	10·9	10·8	20·5			25	
B, 10	681·3	11·5	14·2	26·7			10	
B, 15	558·1	13·7	21·9	32·6			15	
0, 4	226·6	10·2	18·9	27·2	27./V. a. m.	30./V. p. m.	10	28
00, 4	221·4	10·0	23·3	31·1				
UI, 4	173·8	10·5	20·8	29·1				
43, 4	159·8	4·6	21·8	26·2				
45, 4	159·2	6·9	20·4	25·9				

Magnet	Anfänglicher Ausschlag	A	B	Gesammtabnahme	Magnetisiert am	Beobachtet am:	V	Mittel der Gesammtabnahme
00, 6	764·0	10·4	21·4	29·5				
0, 6	705·1	15·3	21·4	33·4				
UI, 6	605·5	10·8	23·5	31·7	26./V. p. m.	30./V. a. m.	10	29
45, 6	548·4	12·8	17·2	27·8				
43, 6	511·4	7·0	15·8	21·7				
45, 10	1163·0	4·6	19·2	22·9	31./V. p. m.	3./VI. a. m.		
00, 10	1156·7	3·8	13·2	16·5			25	20
UI, 10	1144·8	13·1	15·6	26·6	27./V. p. m.	30./V. a. m.		
0, 10	1089·9	4·4	9·2	13·3				
0, 15	1009·0	7·2	15·2	21·4				
UI, 15	991·3	8·9	11·8	19·6				
45, 15	969·4	7·0	14·7	20·7	25./X. p. m.	28./X. a. m.	25	21
00, 15	939·4	5·6	16·3	20·9				
43, 15	885·8	11·6	10·9	21·3				
$\overline{0}$, 15	996·8	8·8	9·7	17·7				21
$\overline{\text{UI}}$, 15	965·3	9·0	13·6	21·4	13./XI. p. m.	16./XI. a. m.	25	(ausgekocht und magnetisiert)
$\overline{43}$, 15	914·6	8·9	15·1	22·7				
$\overline{0}$, 15	950·3	7·0	9·5	15·9				18
$\overline{\text{UI}}$, 15	931·5	7·2	13·7	19·9	23./XII. a. m.	27./XII. a. m.	25	(magnetisiert und ausgekocht)
$\overline{43}$, 15	873·3	7·1	10·9	17·3				

Das Resultat dieser Untersuchung ist Folgendes:

1. Durch Abziehen wird der Magnetismus in allen Fällen bedeutend geschwächt, und zwar durchschnittlich umso stärker, je kleiner das Dimensionsverhältnis:

Es ist für $V = 25$ die mittlere Gesammtabnahme nach 11maligem Abziehen 20%,

für $V = 10$ . . . . 28%.

2. Die dickeren Magnete werden verhältnismäßig mehr geschwächt als die dünneren, was namentlich bei den nach dem ersten Abziehen beobachteten Werten (in der Tabelle unter *A*) deutlich hervortritt. Diese Thatsache ist offenbar auf den Einfluss von Foucault'schen Strömen zurückzuführen.

3. Folgende Magnete sind gegen die Abnahme des Momentes durch Abziehen am widerstandsfähigsten:

»R, 6« (12·1%), **»0, 10«** (13·1%), **»00, 10«** (16·5%), **»M, 10«** (18·4%), **»Z, 10 (r.)«** (19·1%), **»UI, 15«** (19·6%).

Den größten Verlust an Magnetismus zeigen die Magnete:

»00, 4« (31·1%), **»UI, 6«** (31·7%), **»B, 15«** (32·6%), **»0, 6«** (33·4%).

4. Die ausgekochten Magnete zeigen keine bemerkenswerte Abweichung von den ungekochten derselben Sorte und Dimension, hingegen ist anfängliche und Gesammtabnahme etwas, aber nicht bedeutend geringer, wenn ausgekochte Magnete nach frischer Magnetisierung abermals gekocht werden.

II. Theil.

Die magnetische Hysteresis der Magnete »10« und »15«.

Wie bereits eingangs bemerkt wurde, kam die magnetometrische Methode bei Bestimmung der Magnetisierungsintensität zur Anwendung. Dieselbe ist gegeben durch:

$$J = \frac{M}{d.q},$$

wenn M das Moment, d den Polabstand und q den Querschnitt des Magneten bedeutet. Setzen wir $d = \frac{5}{6} l$, was angenähert richtig ist, wenn l die Länge des Magneten bedeutet, und $M = m.\alpha$, so ist

$$J = \left(\frac{6m}{5\,lq}\right).\alpha = R.\alpha;$$

dabei ist $m = 30 \cdot 1$, d. h. ein Scalentheil gleich 30·1 a. E. für die Magnete 15 und $m = 7 \cdot 4$ (oder ein Scalentheil gleich 7·4 a. E.) für die Magnete 10.

Zunächst folgt eine Tabelle zur Bestimmung des Reductionsfactors (R), in der auch die Dimensionen (a, b, l) der zur Untersuchung gelangenden Magnete angegeben sind.

Magnet	a	b	l	R	m
UI, 10	0·38	0·39	10·03	5·91	
00, 10	0·39	0·39	10·05	5·79	7·4
45, 10	0·39	0·39	10·10	5·74	
0, 10	0·40	0·39	10·03	5·73	
45, 15	0·61	0·61	15·02	6·46	
00, 15	0·60	0·61	15·00	6·58	
UI, 15	0·59	0·62	15·03	6·58	30·1
0, 15	0·59	0·60	15·05	6·78	
43, 15	0·61	0·61	15·07	6·44	

Die Feldstärke im Inneren der Spule $H = 0 \cdot 4\pi n \cdot \frac{e}{w}$ wurde durch Einschalten verschiedener Widerstände in den Stromkreis variiert. Bei den Magneten »10« war $e = 32\,V$ (Strom von 16 Accumulatoren), $n = 75 \cdot 6$, bei den Magneten »15« war $e = 30\,V$ (Strom von 15 Accumulatoren), $n = 50 \cdot 4$. Der kleinste Widerstand w_0 (Spulenwiderstand) war bei den Magneten »10« 8·55 Ω, so dass die maximale Feldstärke den Wert erreichte:

$$H_m = \mathbf{355 \cdot 6} \text{ (a. E.)} \qquad \text{(Magnete »10«)}.$$

Bei den Magneten »15« war $w_0 = 3 \cdot 10\ \Omega$, folglich

$$H_m = \mathbf{612 \cdot 9} \text{ (a. E.)} \qquad \text{(Magnete »15«)}.$$

Tabelle der Widerstände und Feldstärken.

Magnete 10			Magnete 15		
w_i	Gesammt-widerstand	H	w_i	Gesammt-widerstand	H
8·55	8·55	355·6	3·10	3·10	612·9
4·56	13·11	231·9	4·16	7·26	261·7
8·24	21·35	142·4	4·14	11·40	166·7
8·25	29·60	102·7	4·24	15·64	121·5
8·30	37·90	80·2	8·24	23·88	79·6
8·13	46·03	66·0	8·25	32·13	59·1
20·70	66·73	45·6	8·30	40·43	47·0
20·83	87·56	34·7	8·13	48·56	39·1
42·8	130·36	23·4	20·70	69·26	27·4
80·7	211·06	14·4	20·83	90·09	21·1
197·8	408·86	8·2	42·8	132·9	14·3
∞	∞	0·0	80·7	213·6	8·9
			∞	∞	0·0

Indem nun zu sämmtlichen angegebenen Feldstärken (den positiven und negativen) die Intensität der Magnetisierung bestimmt wurde, ergab sich für sämmtliche Magnete die Hysteresis-Schleife, und aus ihr bestimmt sich nun

1. die Coercitivkraft (H_c),
2. die remanente Magnetisierung (J_r),
3. die maximale Magnetisierung (J_m),
4. die Retentionsfähigkeit ($k = J_r : J_m$ in Procenten),
5. die verschwindende Magnetisierung ($J_e = J_m - J_r$).

Um die wahren Werte dieser Constanten zu erhalten, ist es nöthig, die charakteristische Normalcurve zu construieren, die man durch Rückscherung von der Ordinatenaxe bis zur Richtlinie von der Gleichung

$$H = \overline{N}.J$$

erhält, wobei $\overline{N}$ den mittleren Entmagnetisierungsfactor bedeutet.

Der Wert von $\overline{N}$ ist abhängig vom Dimensionsverhältnisse der Magnete. Es ist für $V = 25$

$$\overline{N} = 0 \cdot 0675,$$

wenn man annehmen darf, dass der Entmagnetisierungsfactor gleich ist bei kreisförmigem und quadratischem Querschnitte.[1]

Wir stellen die fünf Constanten für die neun untersuchten Magnete im folgenden tabellarisch zusammen.

Magnete 10.

Magnet	0, 10	00, 10	UI, 10	45, 10
Coercitivkraft	82	80	60	58
Maximale Magnetisierung	939	993	1151	1214
Remanente Magnetisierung	618	670	765	795
Verschwindende Magnetisierung	321	323	386	419
Retentionsfähigkeit	66%	67%	66%	66%
Procentische Gesammtabnahme bei Erschütterung	3·1	3·3	4·3	5·9
Procentische Gesammtabnahme beim Abziehen	13·3	16·5	26·6	22·9

Magnete 15.

Magnet	0, 15	00, 15	UI, 15	43, 15	45, 15
Coercitivkraft	84	76	63	59	57
Maximale Magnetisierung	1160	1115	1347	1364	1402
Remanente Magnetisierung	753	710	816	821	827
Verschwindende Magnetisierung	407	405	531	543	575
Retentionsfähigkeit	65%	64%	60%	60%	59%
Procentische Gesammtabnahme bei Erschütterung	3·5	5·4	5·5	5·9	6·7
Procentische Gesammtabnahme beim Abziehen	21·4	20·9	19·6	21·3	20·7

[1] Vide H. du Bois: »Magnetische Kreise«, S. 45.

Das Ergebnis des II. Theiles unserer Untersuchung können wir folgendermaßen ausdrücken:

Die Abnahme des permanenten Momentes durch Erschütterung ist umso geringer, je größer die Coercitivkraft ist. Weniger übersichtlich ist der Zusammenhang zwischen der Coercitivkraft und den Verlusten beim Abziehen von einer weichen Eisenplatte; hier dürften die Foucault'schen Ströme einen beträchtlichen Einfluss ausüben, dieselben sind aber nicht nur vom specifischen Widerstande, sondern auch vom Querschnitte des Stabes abhängig; bei dünnen Stäben dürfte sich der Einfluss der Coercitivkraft auf die Abnahme beim Abziehen in dem Sinne äußern wie bei den Erschütterungen.

X. SITZUNG VOM 29. MÄRZ 1900.

Der Vorsitzende Herr Präsident Prof. E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die mathem.-naturw. Classe durch das am 24. März l. J. erfolgte Ableben ihres correspondierenden Mitgliedes, Herrn Oberbergrathes Prof. Dr. Wilhelm Waagen in Wien, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt folgende eingelangte Arbeiten vor:

I. »Zur Photographie der Lichtstrahlen kleinster Wellenlängen«, von Victor Schumann in Leipzig.

II. »Das Compressibitätsgesetz der Flüssigkeiten«, von Prof. Dr. O. Tumlirz in Czernowitz.

Herr Custos Dr. L. Ritter Lorenz v. Liburnau übersendet einen Nachtrag zu seiner in der Sitzung vom 4. Jänner l. J. vorgelegten Arbeit: »Über einige Reste ausgestorbener Primaten von Madagaskar«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. F. Lippich übersendet eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. G. Jaumann in Prag, betitelt: »Zur Theorie der Lösungen«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Dr. A. Bauer überreicht eine Arbeit aus dem Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz: »Zur Kenntnis der gefärbten Rosanilinbase und ihrer Färbungen« von Prof. Dr. G. v. Georgievics.

Versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität sind eingelangt:

I. Von Herrn Andreas Jubele in Wien, einen Versuch auf dem Gebiete der Elektricität betreffend;

II. von Herrn Julius A. Reich in Wien mit dem Titel: »Beschreibung eines Verfahrens zur Darstellung von ‚Resistenzglas'«.

Herr Sectionschef i. R. Dr. Josef Ritter Lorenz v. Liburnau in Wien überreicht eine von ihm verfasste Abhandlung: »Zur Deutung der drei fossilen Fucoidengattungen *Taenidium, Gyrophyllites* und *Hydrancylus*«.

Herr Prof. Dr. Anton Heimerl in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Monographie der Nyctaginaceen. I. *(Bougainvillea, Phaeoptilum, Colignonia.)*«

Das w. M. Herr Oberbergrath Edm. v. Mojsisovics legt den »Allgemeinen Bericht und die Chronik der im Jahre 1899 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben« vor, welcher in der Reihe der Mittheilungen der Erdbeben-Commission als XVIII. Stück in den Sitzungsberichten abgedruckt werden wird.

Das w. M. Herr Director Prof. E. Weiss legt eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. G. v. Niessl in Brünn vor, betitelt: »Bahnbestimmung des Meteors vom 19. Februar 1899«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ludwig Boltzmann legt folgende zwei Arbeiten vor:

I. »Über die Additivität der Atomwärmen«, von Dr. Stefan Meyer.

II. »Zur Empfindlichkeit der Spectralreactionen«, von Prof. F. Emich in Graz.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. K. Toldt legt folgende drei Abhandlungen vor:

I. »Zur Morphologie der A. pudenda interna«, von Prof. E. Zuckerkandl in Wien.

II. »Beiträge zur Anatomie des Riechcentrums«, ebenfalls von Prof. E. Zuckerkandl in Wien.

III. »Über die Milzentwickelung von *Tropidonotus natrix*«, von Emil Glas, ausgeführt im I. anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Sigm. Exner legt eine im physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte

Arbeit von Herrn Arturo Brun aus Triest vor, welche den Titel führt: »Die Nerven der Milchdrüse während der Lactationsperiode«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Katzer, F., Dr., Das Eisenerzgebiet von Vareš in Bosnien. Mit 1 geolog. Karte und 22 Bildern im Texte (Separatabdruck aus dem Berg- und hüttenmännischen Jahrbuche der Bergakademien, XLVIII. Bd.). Wien, 1900. 8°.

— Die geologischen Grundlagen der Wasserversorgungsfrage von D. Tuzla in Bosnien. (Herausgegeben von der Stadtgemeinde D. Tuzla.) D. Tuzla, 1899. 8°.

Redaction der »Chemiker-Zeitung« in Berlin, Die chemische Industrie und die ihr verwandten Gebiete am Ende des XIX. Jahrhunderts. Berlin, 1900. 8°.

Preis des ganzen Heftes: 3 K 70 h = 3 Mk. 70 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerolds Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. IV. UND V. HEFT.

JAHRGANG 1900. — APRIL UND MAI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 10 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1900.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 4. und 5. Heftes April und Mai 1900 des CIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XI. SITZUNG VOM 5. APRIL 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. II. a, Heft IX (November 1899).

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

I. »Über den Zusammenhang des Polarsystems einer positiv gekrümmten Rotationsfläche zweiten Grades mit dem Nullsysteme«, und

II. »Construction der Haupttangenten der Conoide mit einem Rotationsparaboloide als Leitfläche«, beide Arbeiten von Prof. Eduard Janisch in Brünn.

III. »Versuch zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen nach einer neuen Methode«, von Bürgerschuldirector Wenzel Schuster in Falkenau a. d. Elbe.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Dr. Alexander Bauer überreicht eine Arbeit von Prof. Dr. G. v. Georgievics und L. Springer: »Beiträge zur Kenntnis des Oxydationsprocesses«, aus dem Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht fünf Abhandlungen aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium:

I. »Über Derivate des 2-Methyl-1,3,4,5-Phentetrols«, von Karl Konya.

II. »Über Amidoderivate des Methylphloroglucins«, von Arthur Friedl.

III. »Zur Kenntnis der Monoalkyläther des Phloroglucins«, von F. Aigner.

IV. »Zur Kenntnis der Bromderivate der homologen Phloroglucine«, von Karl Rohm.

V. »Über eine neue Darstellungsweise der γ-Pyridincarbonsäure und über einige Derivate derselben«, von Ludwig Ternajgo.

Herr Dr. G. Alexander überreicht eine Arbeit aus dem I. anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Über Entwickelung und Bau der Pars inferior labyrinthi der höheren Säugethiere: Die Entwickelung der Pars inferior labyrinthi des Meerschweines (Cavia cobaya)«.

Das w. M. Herr Director Prof. E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Dr. Egon v. Oppolzer in Prag, mit dem Titel: »Über den Zusammenhang von Refraction und Parallaxe».

Das w. M. Herr Hofrath Prof. K. Toldt überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. Oscar Frankl in Wien, betitelt: »Über den Descensus testiculorum«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Nansen F., The Norwegian North Polar Expedition 1893 to 1896. Scientific Results. Vol. I. London, 1900. 4°.

Haeckel E., Kunstformen der Natur. Vierte Lieferung. Leipzig und Wien. 4°.

Mc. Intosh W. C., A Monograph of the British Annelids; part II. Polychaeta, Aphinomidae to Sigalionidae. London, 1900, 4°.

Über die elektrische Leitfähigkeit von gepressten Pulvern.

(I. Mittheilung.)

Die Leitfähigkeit von Platinmohr, amorphem Kohlenstoff und Graphit

von

Franz Streintz.

(Ausgeführt im physikalisch-chemischen Institute der Universität Göttingen.)

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Februar 1900.)

Die Leiter für Elektricität zerfallen in zwei streng von einander geschiedene Classen: in die metallischen und in die elektrolytischen. Die Art der Elektricitätsbewegung in den letztgenannten ist erkannt; dagegen herrscht über jene in den Metallen noch völliges Dunkel. Das Verhalten der Leiter zur Temperatur bildet im allgemeinen ein Kennzeichen dafür, ob sie in die erste oder in die zweite der genannten Classen einzureihen sind; auch das Auftreten oder Fehlen von galvanischer Polarisation dient zur Charakterisierung.

Leiter, die gleichzeitig beiden Classen angehören, sind experimentell noch nicht ermittelt worden. Die Möglichkeit ihrer Existenz gibt bereits Clausius[1] zu, bezweifelt aber, ob diese Art von Leitung vom theoretischen Standpunkte wesentlich Neues darbieten würde. Es erscheint aber nicht ausgeschlossen, dass durch das Verhalten derartiger gemischtclassiger Körper Aufschlüsse über die Natur der metallischen

---

[1] Clausius, Die mech. Behandlung der Elektricität, Braunschweig, 1879, S. 169.

Leitung wenigstens angebahnt werden. Möglicherweise sind unter den Metalloxyden und -Sulfiden Träger dieser Art zu finden. Von einigen unter ihnen ist nämlich nachgewiesen worden, dass sie metallisch, von anderen, dass sie elektrolytisch leiten; eine dritte Gruppe endlich besteht aus Nichtleitern. Das Verhalten dieser Körper ist übrigens noch wenig erforscht, da die dabei auftretenden experimentellen Schwierigkeiten nicht leicht zu überwinden sind. Verschiedenheiten in der Structur beeinflussen die Ergebnisse in hervorragendem Grade. So liegen, um von Verbindungen vorläufig abzusehen, die für das Element Kohlenstoff in seiner graphitischen Modification gefundenen Zahlen weit auseinander. Neben der Structur ist aber auch der Druck, unter welchem die Zuleitungen gegen den zu untersuchenden Körper pressen, von ganz erheblichem Einflusse.

Endlich spielt auch die Natur des Metalles, aus dem die Zuleitungen bestehen, eine maßgebende Rolle. So fand Schoop,[1] um ein wichtiges Beispiel herauszugreifen, dass Bleisuperoxyd ein schlechter Leiter sei. Die Substanz war durch Bleiplatten mit dem Messinstrumente verbunden. Dolezalek[2] hat aber beobachtet, dass an der Berührungsfläche des Superoxydes mit der Bleiplatte, die mit dem positiven Pole verbunden war, ein großer Übergangswiderstand auftritt, der sein Entstehen der Bildung von Bleioxyd durch Abgabe von Sauerstoff von Seite des Superoxydes verdankt. Dieser einseitig auftretende Widerstand besitzt, ähnlich wie bei Aluminium in Schwefelsäure, den Charakter einer unipolaren Leitung oder Ventilwirkung. Nach der im folgenden beschriebenen Methode habe ich mich überzeugt, dass Bleisuperoxyd in die Gruppe der gut und auf metallische Art leitenden Körper gehört.

Seit Jahren trug ich mich mit der Absicht, Messungen über das Leitvermögen von Metalloxyden und -Sulfiden anzustellen. Schwierigkeiten mancherlei Art stellten sich der Ausführung des Geplanten entgegen. Ich bin daher meinem verehrten Freunde, Herrn Prof. Nernst, durch dessen liebens-

---

1 Schoop, Handbuch der Accumulatoren, 1898, S. 195.

2 Dolezalek, einer freundlichen mündlichen Mittheilung zufolge.



würdiges Entgegenkommen mir die Mittel des von ihm geleiteten Institutes zur Verfügung gestellt wurden, zu ganz besonderem Danke verpflichtet, dass ich endlich an die Arbeit gehen konnte.

Methode.

Die zu untersuchenden Körper befinden sich schon von ihrer Darstellung her großentheils in dem Zustande feiner Pulver. Wo dies nicht der Fall war, wurden sie sorgfältig gemahlen und durch ein feinmaschiges Sieb geschüttelt. Es entstand nun die Aufgabe, die Bestandtheile der Pulver möglichst dicht aneinander zu schließen. Zu diesem Zwecke wurden sie mittels einer Presse in Pastillenform gebracht; zwei Platinelektroden, die federnd an die beiden Grundflächen der Pastille angelegt waren, wurden in die Brücke von Kohlrausch geschaltet. Der Widerstand der Pastillen zeigte sich in hohem Grade abhängig von dem Drucke, mit dem die Elektroden auflagen. So sank er, wenn man die Finger auf die Elektroden presste, bis zu 100 Procent und darüber. Die gleiche Erscheinung trat ein, als an Stelle der Pastillen feste Stücke (z. B. von Bleisuperoxyd) untersucht wurden. Es musste deshalb eine andere Anordnung gewählt werden.

Die Grundflächen der Pastillen wurden mit Platinstreifen bedeckt, die mittels vier Schrauben zwischen zwei mit Paraffin durchtränkte Brettchen geklemmt waren. Für eine Pastille aus Braunstein (MnO_2) von $2 \cdot 96\, g$ Gewicht fand sich zunächst ein Widerstand von 990 Ω; wurden die Schrauben jedoch fester und fester angezogen, dann sank der Widerstand auf 730 und 700 Ω, und die Pastille zerbarst schließlich, da der Druck durch ungleichförmiges Anziehen der Schrauben sich im Inneren auch ungleichförmig vertheilt hatte.

Auf diese Weise konnte man also einen Aufschluss über das Verhalten zur Leitfähigkeit ebenfalls nicht erwarten.

Allein das Princip, dass die Pulver zu untersuchen seien, während sie unter dem großen Drucke stehen, war gewiss richtig und man daher gezwungen, die Versuchsanordnung dementsprechend einzurichten. Es handelte sich also nur darum, ein Material zu finden, das die Pulver dauernd einschließt und bei guter Isolation auch den nöthigen Wider-

stand gegen Druck besitzt. Nach vergeblichen Versuchen, hiezu Glas, gebrannten Speckstein u. a. zu verwenden, habe ich mich überzeugt, dass Hartgummi den beiden Bedingungen genügt. Massive Kreiscylinder aus diesem Material von 2·2 *cm* Durchmesser und gleicher Höhe wurden durch zwei Schnitte parallel zur Grundfläche in drei Stücke zerlegt, derart, dass das Mittelstück *W* genau die Höhe von 1 *cm*, die Deckstücke X_1 und X_2 je 0·6 *cm*

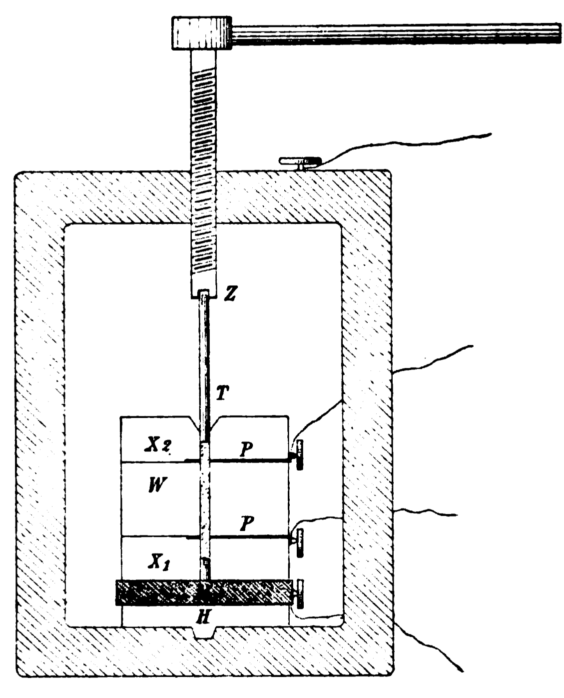


Fig. 1.

erhielten (man vergleiche die Figur). Auf die beiden Grundflächen des Mittelstückes wurden Platinstreifen *P*, *P* von je 0·3 *cm* Breite aufgekittet, die radiale Richtung hatten und mit dem einen Ende über den Rand der Fläche herausragten, mit dem anderen die Umgebung des Mittelpunktes deckten. Mit Hilfe von drei Schrauben von 2·2 *cm* Höhe, die parallel zur Axe des Cylinders eingesetzt waren, wurden die drei Stücke Hartgummi wieder zu einem einzigen vereint. Mittels eines Bohrers wurde nunmehr durch den Cylinder ein conaxialer, kreisförmiger

Canal von 0·16 *cm* Durchmesser gedreht und damit auch die beiden 1 *cm* voneinander entfernten Platinbleche durchlocht. Die über den Rand hervorragenden Streifen wurden rechtwinkelig umgebogen und mit kleinen Klemmschrauben verbunden. Das obere Ende des Canales erhielt zur bequemen Füllung eine kleine trichterförmige Erweiterung *T*.[1] Der Cylinder wurde auf eine kreisförmige Messingplatte *M* gesetzt, die in ihrer Mitte einen 0·3 *cm* hohen cylindrischen Dorn trug, der aus gehärtetem Stahl, an seinem oberen Ende jedoch aus Platin bestand. Die Messingplatte, die am Rande gleichfalls eine Klemmschraube trug, erhielt an der unteren Seite eine Führung, mit der sie auf einer Hartgummischeibe *H* aufsaß; diese war auf der entgegengesetzten Seite mit einem kurzen konischen Fortsatze versehen.

Als Pressvorrichtung diente eine kleine Handpresse, deren Bestandtheile aus Stahl hergestellt waren. Sie bestand aus zwei etwa 7 *cm* hohen Säulen, die oben und unten mit Querbalken verbunden waren. In die Mitte des oberen Balkens war eine Schraubenmutter eingeschnitten, durch die eine Schraube mit 0·09 *cm* Ganghöhe gieng. Durch den Schraubenkopf war eine Hebelstange gelegt. Am unteren Ende der Schraube befand sich eine kleine Vertiefung *Z*, in die der Presstempel passte. Dieser hatte eine Länge von 2 *cm*, einen Durchmesser des Querschnittes von 0·16 *cm*, bestand aus sorgfältig gehärtetem Stahl und lief an dem einen Ende zur Aufnahme in die Schraube etwas konisch zu, während er an dem anderen ein Platinblech angelöthet trug. An dem oberen Querbalken der Presse war gleichfalls eine kleine Klemmschraube angebracht. Durch Bewickelung mit Isolierband war die Presse vor Berührung mit fremden Leitern geschützt.

Die Füllung mit dem zu untersuchenden Pulver erfolgte in der Art, dass man zunächst eine ganz geringe Menge in den Canal brachte; nun wurde die Schraube angezogen, dann mit dem Drucke wieder etwas nachgelassen, die Schraube wieder neuerdings angezogen und dieses Spiel so lange fortgesetzt, bis der Widerstand nicht mehr zu überwinden war. Als Begleit-

[1] Der Mechaniker des Institutes stellte eine Reihe gleichartiger Cylinder mit großer Sorgfalt her.



erscheinung trat bei einigen Pulvern (Pt, MnO_2, PbO_2 u. a.) ein knirschendes oder knarrendes Geräusch auf.

Der Hartgummicylinder wurde nunmehr aus der Presse entfernt und der Presstempel mit Hilfe eines Schraubstockes aus dem Cylinder gezogen. Sodann wurde eine zweite geringe Menge in den Canal gebracht und damit in derselben Weise verfahren. Endlich, nachdem das Pulver in acht bis zehn Portionen eingebracht worden war, hatte der Canal bis auf 0·3 bis 0·5 *cm* unter dem Rande die erforderliche Füllung erhalten.

Einige Aufmerksamkeit erforderte die Härtung des Pressstempels, damit er unter dem großen Drucke weder zersprang, noch sich bedeutend verbog. Geringe Verbiegungen waren indes unvermeidlich; wurden sie größer, dann ersetzte man den Stempel durch einen anderen. So konnte endlich mit den Messungen begonnen werden.

Die Widerstände der Pulver liegen weit auseinander. Dementsprechend waren die Messmethoden zu wählen. In allen Fällen jedoch wurde der Strom von Stempel zu Stempel durch den Canal geleitet, der Widerstand hingegen zwischen den in der Mitte angebrachten (parasitischen) Elektroden, deren Abstand, wie bereits bemerkt, den constanten Wert von 1 *cm* betrug, gemessen.

Bei einigen Oxyden, über die in einer nächsten Mittheilung berichtet werden wird, treten große, von Druck und Temperatur abhängige Übergangswiderstände in der Umgebung der Pressstempel auf. Nach den gebräuchlichen Methoden mit dem Differentialgalvanometer und den Brückencombinationen nach Wheatstone und Thomson erhält man über die Größe dieser Übergangswiderstände keinen Aufschluss. Prof. Nernst empfahl, in solchen Fällen die Wheatstone'sche Methode derart einzurichten, dass man auch die an Anode und Kathode auftretenden Widerstände finden könne. Werden diese mit X_1 und X_2 bezeichnet und bedeutet W den Widerstand zwischen den parasitischen Elektroden, dann sind zu ihrer Ermittlung rasch nacheinander drei Messungen erforderlich, die bei den Stellungen 1), 2) und 3) des Brückenzweiges auszuführen waren. Bezeichnen c_1, c_2 und c_3 die entsprechenden Verhältniszahlen der Längen des Messdrahtes AB, so findet sich:

$$W = R.(c_2 - c_3)\frac{1 + c_1}{(1 + c_2)(1 + c_3)},$$

$$X_1 = R.c_3\frac{1 + c_1}{1 + c_3},$$

$$X_2 = R.\frac{c_1 - c_2}{1 + c_2}.$$

Dabei lag in J Element oder Inductorium, in T Galvanometer oder Telephon. Bei der praktischen Ausführung verbindet man J, desgleichen die auf der Strecke AK gelegenen Punkte mit Quecksilbernäpfchen und stellt dann die Verbindung zwischen J und je einem der Punkte der Reihe nach durch einen Kupferbügel her.

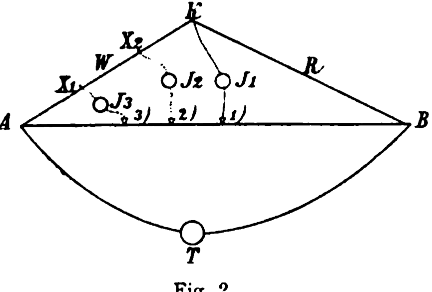


Fig. 2.

Die Methode empfiehlt sich aber nicht nur in Fällen, wo Aufschlüsse über Übergangswiderstände erwünscht sind, sondern sie ersetzt auch dort, wo es sich um die Ermittlung sehr kleiner Widerstände *(W)* handelt, die Thomson'sche Doppelbrücke, da die Widerstände der Zuleitung nicht in Betracht kommen.

Die Untersuchung über die Leitfähigkeit der Metalloxyde und -Sulfide ist noch nicht abgeschlossen; in der vorliegenden Mittheilung will ich mich darauf beschränken, einige Erfahrungen, die ich über das Verhalten zweier Elemente, Platin und Kohlenstoff, in Pulverform gesammelt habe, zu veröffentlichen. Da das Verhalten von Platin in festem Zustande bekannt ist, so ist eine Grundlage zur Vergleichung der Leitfähigkeiten in festem und in gepresst pulverförmigem Zustande gegeben. Hingegen förderte die Untersuchung des Kohlenstoffes manches neue, vielleicht nicht uninteressante Material zutage.

Um die Abhängigkeit des Leitvermögens von der Temperatur kennen zu lernen, habe ich die Pulver zuerst bei Zimmertemperatur und dann in einer Kältemischung geprüft;

hiezu wurde die Presse in einen Vacuumbecher gesenkt, der feste Kohlensäure in Äther enthielt. Mit Hilfe eines Thermoelementes wurde die Temperatur der Mischung ermittelt. Sie betrug —76 bis —78° C.

1. Das Verhalten von Platinmohr.

Das Pulver war von Heraeus in Hanau bezogen worden. Der Hartgummicylinder wog:

Im leeren Zustande	14·3100 *g*,
im gefüllten Zustande	14·6198
die Platinmohrsäule mithin ..	0·3098 *g*.

Da die Länge der Säule zu 1·33 *cm* gemessen war, ihr Querschnitt 0·0201 *cm*² betrug, so ergibt sich das Volumen zu 0·0267 *cm*³ und das specifische Gewicht 11·6.[1] Platinmohr besaß mithin etwa die Dichte von Palladium und etwas mehr als die halbe Dichte des festen Platin (20·9—21·7). Die Messungen wurden nach der Brückenmethode in der Anordnung von Prof. Nernst ausgeführt. Als Stromquelle diente ein Accumulator, der zunächst an einen Widerstand von 100 Ω geschaltet war, als Messinstrument ein Spiegelgalvanometer; der Brückendraht hatte eine Länge von 100 *cm* und bestand aus Platin mit federndem Schleifcontact aus demselben Materiale. Der Vergleichswiderstand *R* betrug 0·1 Ω. Der Stromkreis wurde durch einen Taster nur auf Augenblicke geschlossen.

Nachdem der Cylinder die Füllung erhalten hatte, wurde er einen Tag sich selbst überlassen. Am nächsten Tage fand sich:

$9^h 30^m$	Vormittag, Temp. +10° C.	0·00476 Ω,
$10^h 45^m$	» » »	0·00470

(Die Presse in die Kältemischung gebracht: $11^h 25^m$.)

$11^h 30^m$	Vormittag, Temp. —77° C.	0·00437 Ω,
$11^h 35^m$	» » »	0·00414
$11^h 40^m$	» » »	0·00413

---

[1] Die Zahl dürfte zu groß sein, da durch den Druck des Pulvers eine Volumvergrößerung des Füllkanales eingetreten sein wird.

(Die Presse aus der Kältemischung entfernt: $11^h 40^m$.)

$0^h 10^m$ Nachmittag, Temp. +10° C. . . . . 0·00472 Ω.

Bei der Temperatur von +10° betrug der Widerstand mithin 0·00471 im Mittel, bei —77° . . . 0·00413 Ω.

Unter Berücksichtigung, dass die Länge des gemessenen Widerstandes 1 *cm*, der Querschnitt 0·0201 cm^2 betrug, ergibt sich als specifischer Widerstand $\left(\frac{1\,m}{1\,mm^2}\right)$ bei einer Temperatur von $t°$ C. folgender Wert in Ohm:

$$w_t = 0{\cdot}933(1 + 0{\cdot}0014\,t).$$

In den Nachmittagstunden desselben Tages war der Widerstand etwas kleiner geworden. Er betrug um

$3^h 15^m$ Nachmittag bei +10° C. . . . . 0·00456 Ω.

(Die Presse in die Kältemischung gebracht: $3^h 25^m$.)

$3^h 32^m$ Nachmittag bei —77° C. . . . . 0·00399 Ω,
$3^h 37^m$ » » » . . . . 0·00399

(Die Presse aus der Kältemischung entfernt: $3^h 40^m$.)

$4^h 40^m$ Nachmittag bei +10° C. . . . . 0·00464 Ω.

Es ergibt sich also bei 10° die Größe des Widerstandes zu 0·00460 Ω, bei —77° zu 0·00399 Ω.

Daraus folgt für den specifischen Widerstand in Ohm die Gleichung:

$$w_t = 0{\cdot}910(1 + 0{\cdot}0015\,t).$$

Nimmt man aus beiden Gleichungen den Mittelwert, so erhält man für Platinmohr von der Dichte 11·6 die Gleichung:

$$w_t = 0{\cdot}92(1 + 0{\cdot}00145\,t).$$

Festes Platin besitzt einen specifischen Widerstand von 0·14 bei 0° C. und einen Temperaturcoefficienten, der gegen 0·004 gelegen ist. Der Widerstand des Pulvers ist mithin $6^1/_2$ mal so groß, während sein Temperaturcoefficient etwas unter dem halben Werte beim festen Elemente gelegen ist.

Die Widerstände in den beiden Zustandsformen sind den Dichten nicht proportional; eher scheinen es die Temperaturcoefficienten zu sein.

Irgendwelche Schlüsse aus dem Verhalten von Platinmohr zu ziehen, wäre verfrüht, bevor nicht eine Reihe von Metallpulvern, so Au, Ag, Cu, Ni in gleicher Weise untersucht worden sind.

2. Das Verhalten von Kohlenstoff.

»Diamant ist ein Nichtleiter, ebenso reine Holzkohle, dagegen leiten die graphitischen Kohlen. Je nach ihrer Herstellung und Structur ist die Leitfähigkeit sehr verschieden.«

Mit diesen Worten leitet G. Wiedemann[1] in seinem Handbuche das Capitel über die Leitfähigkeit der Kohle ein. Sie beweisen, dass unsere Kenntnisse über eine wichtige Eigenschaft dieses Elementes außerordentlich mangelhaft sind. Die Angabe über die reine Holzkohle, die als Vertreterin des Kohlenstoffes in seiner amorphen Modification anzusehen ist, erregt zudem Zweifel, da die Kohle zu den »schwarzen Körpern« gehört. Ich habe mir die Aufgabe gestellt, sowohl den amorphen Kohlenstoff, als den Graphit, und zwar beide Modificationen in Präparaten von möglichster Reinheit zu untersuchen.

Zur Herstellung von amorphem Kohlenstoff bediente ich mich einer Terpentinflamme, deren Ruß in einem großen Becherglase aufgefangen wurde. Der Ruß wurde dann mit Äther übergossen und die Mischung in einer luftdicht geschlossenen Flasche stundenlang kräftig geschüttelt. Wird darauf die Flasche sich selbst überlassen, so sinkt der Ruß zu Boden, während der Äther eine schöne Fluorescenzerscheinung gewährt. Er ist im durchgelassenen Lichte weingelb, im auffallenden moosgrün. Nun wurde der Äther wiederholt sowohl durch frischen Äther, als durch Alkohol ersetzt und die Mischungen geschüttelt und gekocht so lange, bis die den den Ruß bedeckende Flüssigkeit vollkommen wasserklar blieb. Dann kam die Kohle in einen Porzellantiegel, durch dessen Deckel ein Thonrohr führte, um

[1] G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität, I, S. 524; 1893.

in einem Strom von gereinigtem Wasserstoff etwa eine halbe Stunde lang geglüht zu werden.

Der schließlich erhaltene Körper war von ideal schwarzer Farbe, ohne jede Spur von Glanz und so weich, dass er sich sehr dicht pressen ließ. Er verbrannte im Sauerstoffstrom, ohne einen Rückstand zu hinterlassen.

Es wog

der leere Hartgummicylinder	14·1785 *g*,
der gefüllte	14·2210
das Gewicht des amorphen Kohlenstoffes betrug ...	0·0425 *g*.

Die Länge der Kohlensäule war zu 1·42 *cm* ermittelt worden, der Querschnitt betrug 0·0201 cm^2, ihr Volumen also 0·0283 cm^3. Aus diesen Größen ergibt sich ein specifisches Gewicht von 1·50, das jenem der festen Holzkohle gleichkommt.[1]

Die Messungen wurden erst aufgenommen, nachdem die Kohle bereits 24 Stunden unter dem Drucke gestanden war. Sie erfolgten nach der beschriebenen Methode mit Wechselstrom und Telephon. Die Minima waren scharf.

Ich theile das Ergebnis der Messungen der Reihenfolge nach mit. W bedeutet den Widerstand zwischen den beiden parasitischen Elektroden, X_1 jenen zwischen dem unteren, an der Messingscheibe befestigten Stempel und der unteren parasitischen Elektrode, X_2 den Widerstand zwischen der oberen parasitischen Elektrode und dem Presstempel. Als Vergleichswiderstand R dienten 100 Ω.

Zeit	Temp.	Stellungen der Brückenwage in *cm*	Berechnete Werte von c	Widerstände in Ohm
4. Dec. 1899		233	$c_1 = 3 \cdot 290$	$W = 197 \cdot 7$
10^h	$+12°$	301	$c_2 = 2 \cdot 320$	$X_1 = 100 \cdot 6$
		761·5	$c_3 = 0 \cdot 313$	$X_2 = 27 \cdot 1$
		233	$c_1 = 3 \cdot 290$	$W = 197 \cdot 6$
$10^h 30^m$	$+12°$	300	$c_2 = 2 \cdot 330$	$X_1 = 102 \cdot 5$
		761	$c_3 = 0 \cdot 314$	$X_2 = 28 \cdot 8$

Die Presse in die Kältemischung gebracht: $10^h 35^m$.

[1] Man vergleiche die Anmerkung auf S. 468.

Zeit	Temp.	Stellungen der Brückenwage in *cm*	Berechnete Werte von c	Widerstände in Ohm
		145	$c_1 = 5\cdot900$	$W = 341\cdot5$
11^h05^m	$-77°$	217	$c_2 = 3\cdot610$	$X_1 = 198\cdot5$
		712	$c_3 = 0\cdot404$	$X_2 = 49\cdot6$
		142·5	$c_1 = 6\cdot017$	$W = 346\cdot2$
11^h20^m	$-77°$	216·0	$c_2 = 3\cdot630$	$X_1 = 200\cdot8$
		713·5	$c_3 = 0\cdot401$	$X_2 = 51\cdot5$

Aus der Kältemischung entfernt: 11^h25^m.

		210	$c_1 = 3\cdot762$	$W = 234\cdot5$
0^h20^m	$+12°$	275	$c_2 = 2\cdot636$	$X_1 = 110\cdot7$
		752	$c_3 = 0\cdot303$	$X_2 = 31\cdot0$
		206·5	$c_1 = 3\cdot842$	$W = 236\cdot0$
3^h15^m	$+10°$	271·0	$c_2 = 2\cdot690$	$X_1 = 117\cdot1$
		758·0	$c_3 = 0\cdot319$	$X_2 = 31\cdot2$

In die Kältemischung gebracht: 3^h20^m.

		121	$c_1 = 7\cdot264$	$W = 462\cdot5$
3^h40^m	$-77°$	185·5	$c_2 = 4\cdot391$	$X_1 = 210\cdot6$
		745·0	$c_3 = 0\cdot342$	$X_2 = 53\cdot3$

Aus der Kältemischung entfernt: 3^h43^m.

		189	$c_1 = 4\cdot291$	$W = 272\cdot2$
4^h20^m	$+10\cdot5°$	250	$c_2 = 3\cdot000$	$X_1 = 124\cdot3$
		765	$c_3 = 0\cdot307$	$X_2 = 32\cdot3$
		190·5	$c_1 = 4\cdot247$	$W = 270\cdot1$
5^h	$+12°$	252·0	$c_2 = 2\cdot968$	$X_1 = 122\cdot3$
		766·8	$c_3 = 0\cdot304$	$X_2 = 32\cdot2$

Die Schraube der Presse wurde kräftig angezogen: 5^h01^m.

		205·7	$c_1 = 3\cdot861$	$W = 258\cdot1$
5^h05^m	$+12°$	240·0	$c_2 = 3\cdot167$	$X_1 = 111\cdot3$
		771·0	$c_3 = 0\cdot297$	$X_2 = 16\cdot6$

Der Widerstand der Kohlensäule war im Laufe von sieben Stunden von 198 auf 270 Ω, also um 36 Procent seines Aus-

gangswertes gestiegen. Die Vergrößerung dürfte dadurch hervorgerufen werden, dass das Element bei der niedrigen Temperatur eine dauernde Veränderung in der Lagerung seiner Theilchen erfährt. Man beachte, dass die Änderung des Widerstandes in jenen Perioden, in denen die Temperatur constant blieb, nur geringfügig ist. So blieb der Widerstand der Säule in der ersten halben Stunde vollständig constant; auch in den drei um Mittag gelegenen Stunden und in der Zeit zwischen $4^h 20^m$ und 5^h betrug die Änderung kaum ein Procent. Dagegen stieg der Widerstand, nachdem die Säule zum erstenmale in die Kältemischung gebracht worden war und wieder Zimmertemperatur angenommen hatte, von 197·6 auf 234·5 Ω, also um ungefähr 19 Procent, und als sie zum zweitenmale mit der Kältemischung in Berührung gestanden hatte, von 236 auf 272·2 Ω, also um rund 12 Procent!

Der specifische Widerstand $\left(\frac{1\,m}{1\,mm^2}\right)$ der Kohlensäule bei Beginn der Messungen ergibt sich zu ungefähr 40.000 Ω, das Leitungsvermögen von $250 . 10^{-7}$ kommt einer 6·5procentigen Schwefelsäure gleich. Die Widerstandsänderung mit der Temperatur ist überraschend groß.

Beim ersten Versuche stieg der Widerstand in der Kältemischung um 75 Procent seines Ausgangswertes, beim zweiten sogar um 96 Procent! Es ergibt sich mithin auf 1° C. Temperaturerhöhung eine Widerstandsabnahme von ungefähr 1 Procent.

Der amorphe Kohlenstoff steht also nicht nur in Hinsicht auf den Sinn, sondern auch auf die Größe des Temperaturcoefficienten den elektrolytischen Leitern weit näher, als den metallischen. Freilich erscheint es einigermaßen gewagt, hier von einem Temperaturcoefficienten überhaupt zu sprechen. Wahrscheinlich ist der Widerstand keine einfache Function der Temperatur, so dass Coefficienten, die mit höheren Potenzen der Temperatur verbunden sind, ins Gewicht fallen.

Da die Vermuthung nahe lag, dass der Druck auf die Kohlensäule in der Kältemischung abgenommen habe und später nicht mehr auf seinen anfänglichen Wert zurückgekehrt sei, wurde zum Schlusse der besprochenen Beobachtungen die

Schraube der Presse angezogen. In der That konnte sie um etwas über eine Ganghöhe nach abwärts bewegt werden, während vor Beginn der Messungen bereits das Äußerste im Pressen des Pulvers geleistet worden war. Die Veränderung, die durch das Nachpressen erzielt wurde, ist am Schlusse der Tabelle angegeben; der Widerstand W erfuhr eine Abnahme von nur 3 Procent; dagegen sank der Wert von X_2 von 32·2 auf 16·6 Ω. Die Erklärung dafür ist einfach. Der Druck verbreitet sich nicht gleichmäßig auf alle Schichten der Säule, sondern ist in den Schichten die dem Presstempel am nächsten liegen, am größten. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass daneben auch eine Verminderung des Übergangswiderstandes zwischen dem Platin des Stempels und der anliegenden Kohlenstoffschicht eingetreten ist. Die größere Veränderung, die auch X_1 erfahren hat, eine Verminderung um 12 Procent, spricht auch für die letztere Annahme.

Am 5. und 6. December 1899 wurden die Messungen fortgesetzt, da zu erwarten war, dass endlich ein stationärer Zustand eintreten werde. Eine Änderung der Zimmertemperatur um 5° lieferte zunächst folgendes Ergebnis:

Zeit	Temp.	Stellungen der Brückenwalze	Berechnete Werte von c	Widerstände in Ohm
		204·5	$c_1 = 3·890$	$W = 261·7$
5. Dec., 10^h	+11°	242·5	$c_2 = 3·124$	$X_1 = 108·8$
		777·5	$c_3 = 0·286$	$X_2 = 18·5$
		210	$c_1 = 3·762$	$W = 253·0$
12^h	+16°	248	$c_2 = 3·032$	$X_1 = 105·0$
		788	$c_3 = 0·283$	$X_2 = 18·1$
		204·5	$c_1 = 3·890$	$W = 260·5$
$3^h 30^m$	+11°	242·7	$c_2 = 3·124$	$X_1 = 110·0$
		775·0	$c_3 = 0·290$	$X_2 = 18·5$

Die Änderung von W betrug innerhalb dieses geringen Temperaturintervalles 0·7 Procent für eine Temperaturänderung von 1° C.

Nun wurden die Versuche in der Kältemischung fortgesetzt. Es ergab sich:

Zeit	Temp.	Stellungen der Brückenwage	Werte von c	Widerstände in Ohm
Die Presse stand in der Kältemischung seit 4^h.				
		126·5	$c_1 = 6·905$	$W = 463·6$
5. Dec., $4^h 25^m$	—77°	165·0	$c_2 = 5·060$	$X_1 = 196·5$
		751·2	$c_3 = 0·331$	$X_2 = 30·4$
		125·7	$c_1 = 6·955$	$W = 465·7$
$4^h 45^m$	—77°	166·5	$c_2 = 5·006$	$X_1 = 197·3$
		752	$c_3 = 0·330$	$X_2 = 32·3$
Aus der Kältemischung entfernt: $4^h 50^m$.				
		199·5	$c_1 = 4·001$	$W = 264·9$
$5^h 30^m$	+12°	236·0	$c_2 = 3·241$	$X_1 = 117·1$
		765·5	$c_3 = 0·306$	$X_2 = 17·9$
		198·8	$c_1 = 4·030$	$W = 268·6$
6. Dec., $9^h 50^m$	+10°	237·0	$c_2 = 3·220$	$X_1 = 115·1$
		771·0	$c_3 = 0·297$	$X_2 = 19·2$
In die Kältemischung gebracht: $10^h 10^m$.				
		121·7	$c_1 = 7·235$	$W = 489·0$
$10^h 30^m$	—77°	162·5	$c_2 = 5·154$	$X_1 = 200·5$
		756·0	$c_3 = 0·322$	$X_2 = 33·0$
Aus der Kältemischung gebracht: $10^h 40^m$.				
		195·0	$c_1 = 4·128$	$W = 274·3$
$11^h 30^m$	+10°	233·0	$c_2 = 3·291$	$X_1 = 118·9$
		768·5	$c_3 = 0·302$	$X_2 = 19·5$

Die zeitlichen Änderungen, die der Widerstand der Kohlensäule an den beiden letzten Versuchstagen erfuhr, sind, wie erwartet wurde, gering im Vergleiche zur Änderung am ersten Tage. Sie betragen nur mehr 4 Procent. Es hat sich also in der That ein stationärer Zustand in der Lagerung der Kohlenstofftheilchen hergestellt, der durch vorübergehende Temperaturänderungen nicht mehr dauernd beeinflusst wird.

Die Veränderung des Widerstandes mit der Temperatur hingegen hält sich auf derselben Höhe und beträgt wieder fast 1 Procent für 1° C.

Ich beabsichtige, das Verhalten des amorphen Kohlenstoffes gelegentlich noch eingehender zu verfolgen. Vielleicht ist es möglich, die Function der Temperatur zu ermitteln, wenn man das Element sowohl bei sehr niederen Temperaturen (in flüssiger Luft), als auch bei solchen, die hunderte Grade oberhalb des Nullpunktes gelegen sind, untersucht. Freilich muss hiezu erst ein Isolator gefunden werden, der den Hartgummi zu ersetzen imstande ist.

Graphit wurde von der chemischen Fabrik E. de Haën in List vor Hannover in der Form des bekannten grauen, im reflectierten Lichte metallisch glänzenden Pulvers als chemisch rein bezogen. Unter der Presse verhält er sich noch viel nachgiebiger, als der amorphe Kohlenstoff. Wird aber eine gewisse Grenze des Druckes überschritten, dann zertrümmert er den Hartgummicylinder. Das ist leider öfter vorgekommen, bis ich beobachtete, dass das Pulver, sobald der Druck eine gewisse Größe erreicht hatte, den Presstempel entlang aus dem Cylinder emporkroch. Ist diese Erscheinung eingetreten, dann darf nicht weiter gepresst werden.

Der leere Hartgummicylinder wog	14·2670 *g*,
der gefüllte	14·3775
das Gewicht des Graphitpulvers betrug somit	0·1105 *g*.

Zur Ermittlung des Volumens wurde nach beendeten Versuchen der Kanal des Mittelstückes *M* entleert und dann mit Quecksilber ausgewogen. Aus dem Gewichte des Quecksilbers von 0·373 *g* ergiebt sich das Volumen zu 0·0273 cm^3 für die Längeneinheit, mithin für die Länge der Graphitsäule von 1·32 *cm* ein solches von 0·0360 cm^3. Das specifische Gewicht betrug demnach 3·0. Diese Zahl ist erstaunlich groß. Im Winkelmann'schen Handbuche[1] sind für Graphit die Zahlen 2·17 bis 2·33 angegeben. Muraoka[2] fand das specifische Gewicht von

[1] Winkelmann, Handbuch der Physik, I, S. 155; 1891.

[2] Muraoka, Wied. Ann., 13, S. 311; 1881.

festem sibirischen Graphit, dessen Procentgehalt an Kohlenstoff 98 betrug, zu 1·8.

Zu den Widerstandsmessungen bediente ich mich derselben Anordnung wie bei Untersuchung von Platinmohr. Vergleichswiderstand $R = 0\cdot 2\,\Omega$. Gleich nach der Zusammenstellung fand sich für W der Wert 0·0532 Ω. Nach 3 Stunden erhielt man 0·0824 Ω. Der Druck schien nachgelassen zu haben. In der That ließen sich mehrere Umdrehungen der Schraube vornehmen, bis das Pulver wieder in die Höhe stieg. Unmittelbar nach der Druckvermehrung war $W = 0\cdot 0812\,\Omega$, die Veränderung des Widerstandes also eine geringfügige. Nun begann aber der Widerstand fort und fort zu sinken, um 45 Minuten nach erfolgter Druckvergrößerung einen Minimalwert von 0·0520 Ω zu erreichen. Aus dieser letzten Zahl ergibt sich der specifische Widerstand des Graphitpulvers zu

14·20 Ω.

Die specifischen Widerstände des Kohlenstoffes in den beiden leitenden Modificationen verhalten sich mithin wie 1 : 3000.

Muraoka (a. a. O.) fand für den specifischen Widerstand des festen Graphits den Wert 12·20.

Am nächsten Tage (9. December) war der Widerstand der Graphitsäule bei 10° C. auf 0·0920 Ω gestiegen. In der Kältemischung vergrößerte er sich auf 0·0994 und nahm bei der nachfolgenden Erwärmung stetig ab, und zwar auch dann noch, als die Zimmertemperatur längst erreicht war. Eine Stunde nach Entfernung der Presse aus dem Vacuumbecher erhielt man bei 0·0498 Ω eine Ruhelage.

Es haben also sowohl Druck-, als auch Temperaturänderungen Erscheinungen im Gefolge, die man als Nachwirkungen zu bezeichnen hat.

Am 11. December schwankte der Widerstand zwischen den engen Grenzen von 0·0982 und 0·0990 Ω bei Zimmertemperatur. Es erschien zweckwidrig, wieder die Schraube anzuziehen und damit den Widerstand vorübergehend herabzusetzen. Wünschenswert war vielmehr die Erreichung eines stationären Zustandes.

Am 12. December fand sich gleichfalls ein Wert von 0·0990 Ω; es wurde ein neuerlicher Versuch, den Temperaturcoefficienten zu ermitteln, angestellt. Im Vacuumbecher erhielt man 0·1081 Ω und eine halbe Stunde nach Entfernung der Presse daraus 0·0984 Ω. Dieser Wert hielt sich längere Zeit constant, nahm aber später weiter ab. Legt man die drei zuletzt genannten Zahlen der Berechnung vom specifischen Widerstande und Temperaturcoefficienten zugrunde, so erhält man in Ohm:

$$w_t = 20 \cdot 04[1 - 0 \cdot 0011\, t].$$

Einige Tage später wurde die Untersuchung des Graphits fortgesetzt.

Das Ergebnis war:

Zeit	Stellungen des Contact-drahtes	Werte von c	Widerstände in Ohm	Temp
	474	$c_1 = 0 \cdot 901$	$W = 0 \cdot 1076$	
15. Dec., $11^h 45^m$	452	$c_2 = 0 \cdot 824$	$X_1 = 0 \cdot 066$	+10°
	168	$c_3 = 0 \cdot 203$	$X_2 = 0 \cdot 008$	
	474	$c_1 = 0 \cdot 901$	$W = 0 \cdot 1076$	
$12^h 14^m$	452	$c_2 = 0 \cdot 824$	$X_1 = 0 \cdot 066$	+10°
	168	$c_3 = 0 \cdot 203$	$X_2 = 0 \cdot 008$	

Die Presse stand seit $0^h 15^m$ in der Kältemischung.

	494	$c_1 = 0 \cdot 977$	$W = 0 \cdot 1200$	
$0^h 25^m$	472	$c_2 = 0 \cdot 894$	$X_1 = 0 \cdot 067$	—77°
	168	$c_3 = 0 \cdot 203$	$X_2 = 0 \cdot 009$	

Die Presse war um $0^h 30^m$ aus der Kältemischung entfernt worden.

	478	$c_1 = 0 \cdot 916$	$W = 0 \cdot 1094$	
$0^h 50^m$	455	$c_2 = 0 \cdot 836$	$X_1 = 0 \cdot 065$	
	170	$c_3 = 0 \cdot 205$	$X_2 = 0 \cdot 009$	
	477	$c_1 = 0 \cdot 912$	$W = 0 \cdot 1086$	+10°
$1^h 03^m$	454	$c_2 = 0 \cdot 832$	$X_1 = 0 \cdot 065$	
	170	$c_3 = 0 \cdot 205$	$X_2 = 0 \cdot 009$	

Zeit	Stellungen des Contactdrahtes	Werte von c	Widerstände in Ohm	Temp.
	475	$c_1 = 0{\cdot}905$	$W = 0{\cdot}1076$	
$5^h 45^m$	452	$c_2 = 0{\cdot}824$	$X_1 = 0{\cdot}065$	10°
	169	$c_3 = 0{\cdot}204$	$X_2 = 0\ 009$	

Der erwartete stationäre Zustand war also erreicht. Für w_t ergibt sich die Gleichung:

$$w_t = 21{\cdot}9(1-0{\cdot}0013\,t).$$

Muraoka hat für festen Graphit innerhalb der Temperaturgrenzen von 26 und 302° C. die Gleichung

$$w_t = 12{\cdot}20(1-0{\cdot}000739\,t+0{\cdot}000000273\,t^2)$$

ermittelt.[1] Beim Vergleiche mit meinen Beobachtungen kommt der mit dem Quadrate der Temperatur verbundene Coefficient nicht in Betracht.

Während also für Platinmohr der Temperaturcoefficient ungefähr halb so groß ist wie bei dem festen Elemente, ist hier das Umgekehrte der Fall. Ich mache aber aufmerksam, dass auch das Verhältnis der Dichten zwischen dem pulverförmigen und festen Elemente sich umgekehrt hat.

Vergleicht man die für Graphit gefundenen Ergebnisse mit jenen für amorphen Kohlenstoff, so sieht man, dass ersterer sowohl in Bezug auf den Widerstand, als auch auf den Temperaturcoefficienten den metallischen Leitern weit näher steht.

In seiner bekannten Untersuchung über die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit der Kohle von der Temperatur vergleicht Werner v. Siemens[2] das Verhalten der Gaskohle

---

[1] Muraoka, a. a. O. — Differentiiert man w_t nach der Temperatur und setzt den erhaltenen Ausdruck gleich Null, dann erhält man $t = 1350°$ C. Unter der Voraussetzung, dass die Muraoka'sche Gleichung außerhalb der beobachteten Grenzen Geltung habe, bezeichnet t jene Temperatur, über die hinaus das Leitungsvermögen des Graphits abnimmt.

[2] W. Siemens, Wied. Ann., 10, S. 572; 1880.

mit dem von Selen und kommt zur Annahme, dass die Kohle bei höherer Temperatur deshalb besser leite, weil sie eine latente Wärme enthalte. Im Lichtbogen werde die latente Wärme frei, so dass der Kohlenstoff durch den elektrischen Strom in metallischer Form fortgeführt werde. Die Gaskohle sei dementsprechend eine latente Wärme enthaltende allotrope Modification eines hypothetischen metallischen Kohlenstoffes.

Diese Annahme findet durch die vorliegende Arbeit eine Bestätigung. Nach ihr muss nämlich der amorphe Kohlenstoff jene allotrope Modification sein, der die größere latente Wärme besitzt.

Nun maßen Berthelot und Petit[1] mittels der calorimetrischen Bombe die Verbrennungswärme des Kohlenstoffes in den drei bekannten Modificationen und fanden für amorphen Kohlenstoff 97·7 und für Graphit 94·8 Cal. Demnach würden also beim Übergange von amorphem Kohlenstoff in Graphit 2·9 Cal. entwickelt werden.

Einer weiteren Prüfung könnte die Anschauung von Siemens durch eine Untersuchung der specifischen Wärmen unterworfen werden; ist sie richtig, dann müsste Graphit eine geringere Abweichung vom Dulong-Petit'schen Gesetze zeigen, als amorpher Kohlenstoff bei einer und derselben niedrigen Temperatur.

Zum Schlusse soll noch kurz eines Versuches Erwähnung geschehen, der mit einer Lichtkohle ausgeführt wurde. Das specifische Gewicht des Kohlenpulvers betrug 1·80. Muraoka fand für verschiedene Sorten von künstlicher Kohle, die für elektrisches Licht bestimmt waren, 1·55 bis 2·37. Der Widerstand der Kohlensäule schwankte bei Zimmertemperatur zwischen 0·311 und 0·320, woraus sich die entsprechenden specifischen Widerstände zu 62·5 und 64·3 Ω ergeben. Für die festen Kohlen gibt Muraoka Werte an, die zwischen 39·1 und 55·1 gelegen sind. Die Veränderlichkeit des Widerstandes mit der Temperatur war innerhalb des Intervalles von ungefähr 90° C. so gering, dass ich nicht in der Lage bin, sie ziffer-

[1] Berthelot und Petit, Compt. rendus, 108, p. 1144; 1889.

mäßig auszudrücken. Doch hatte der Widerstand stets die Tendenz, in der Kältemischung abzunehmen. Da ich Verdacht schöpfte, dass die Kohle durch fremde Beimischung verunreinigt sei, prüfte ich nach beendeten Messungen das Pulver mit Rhodankalium auf Eisen und fand, dass es mehr als bloß Spuren davon enthielt. Immerhin geht aus dem Versuche hervor, dass die untersuchte Lichtkohle in ihrem Verhalten zur Stromleitung dem Graphit ungleich näher steht als dem amorphen Kohlenstoff.

Untersuchungen über permanente Magnete. III.

Studien über die Constanz permanenter Magnete

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1900.)

Die vorliegende Abhandlung enthält Beobachtungen, welche einen Zeitraum von etwas mehr als einem Jahre umfassen. Sie beziehen sich auf die Constanz permanenter Magnete und ihre Abhängigkeit von äußeren Umständen, wie z. B. der Dicke, dem Dimensionsverhältnisse und der Qualität des verwendeten Materiales. Man weiß gegenwärtig, dass die Abnahme des Momentes bei neueren Stahlsorten, insbesondere wenn sie nach dem Verfahren von Strouhal und Barus behandelt werden, selbst im Laufe eines Jahres keine große ist. Anders verhielten sich die älteren Magnete, ja wir finden noch in verhältnismäßig neuer Zeit bei erdmagnetischen Instrumenten Magnete verwendet, bei denen die Abnahme des Momentes in kaum mehr als einem Monate etwa 6% betrug,[1] obwohl man den Magnet vorher mehrmaligen Temperaturschwankungen zwischen 0° und 55° aussetzte.

Ausführliche Mittheilungen über die Abnahme des Momentes und über die Gesetzmäßigkeit derselben sind auch in Lamont's

---

[1] Vide: Strouhal und Barus, Wied. Ann. Bd. XX, S. 662. Die Bemerkung bezieht sich auf eine Mittheilung von Wild in den »Annalen des physikalischen Central-Observatoriums« Petersburg, Jahrg. 1878.

»Handbuch des Magnetismus« enthalten. Man ersieht hieraus, dass bei den vor Jahrzehnten angefertigten Magneten von einer Constanz des Momentes keine Rede sein konnte.

Hingegen findet sich in Du Bois' »Magnetische Kreise, deren Theorie und Anwendung« auf S. 325 eine Tabelle über die Constanz eines von Hibbert angegebenen Feldetalons. Dieser Feldetalon ist so gebildet, dass der magnetische Kreis eines guten Stahlmagnetes durch eine Eisenglocke bis auf ein schmales, ringförmiges Interferricum geschlossen ist. Die Angaben der Tabelle beziehen sich auf drei solche Feldetalons und die Beobachtungen erstrecken sich zunächst auf die Zeit vom 16. April bis 10. November 1891; für einen Etalon ist jedoch auch noch eine Mittheilung vom 4. November 1893 gegeben. Aus den angeführten Daten lässt sich eine nachweisbare Änderung der Etalonstärke nicht entnehmen, doch betragen deren Schwankungen in maximo 1%. Dies kann aber durch den Einfluss der Beobachtungstemperaturen nicht erklärt werden und muss also entweder auf Beobachtungsfehler zurückgeführt werden oder in einer wirklichen Änderung des Momentes des Magnetes seinen Ursprung haben. Diese Beobachtungen sagen demnach nur, dass das Moment eines solchen Etalons innerhalb einer längeren Zeit auf etwa 0·5—1·0% constant ist.

Durch die vorliegenden Beobachtungen wird gezeigt, dass selbst bei Magneten ohne Schließungskreis eine über die oben angeführte Grenze hinausgehende Constanz zu erreichen ist.

Die Constanz eines Magnetes hängt neben anderen Umständen auch von der verwendeten Stahlsorte ab und es wäre ganz gewiss die Beantwortung der Frage, welche Stahlsorte gegenwärtig die besten Magnete liefere, von außerordentlicher Bedeutung. Diese Frage lässt sich aber ihrem vollen Umfange nach gewiss nicht leicht beantworten und ich konnte dies auch nicht anstreben, jedenfalls bilden aber die mitgetheilten Beobachtungen einen Beitrag zur Lösung dieser Frage.

Für diese Untersuchung standen mir Stäbe aus steirischem Wolframstahl von Böhler & Cie. in Wien, sodann Magnete von Zellweger in Uster bei Zürich, von Remy in Hagen in W., Berg in Berlin und Marchal in Paris, zur Verfügung.



Die Untersuchung einer Stahlsorte hinsichtlich ihrer Eignung zu Anfertigung guter permanenter Magnete kann man in der Weise führen, dass man aus dem betreffenden Materiale entweder Hufeisenmagnete oder Stabmagnete macht und sie hinsichtlich ihrer Tragkraft oder ihres magnetischen Momentes untersucht. So hat z. B. die Firma Siemens & Halske in Wien verschiedene Magnetstahlsorten der Firma Böhler & Cie. untersucht, indem sie aus denselben Hufeisenmagnete herstellte und deren Tragkraft an verschiedenen Tagen prüfte.[1] Die Versuchsdauer betrug 36 Tage. Bei diesen Versuchen scheint wirklich die Tragkraft gemessen worden zu sein. Diese Methode kann wohl nicht besonders genaue Resultate liefern; sie ist im nachfolgenden auch nicht angewendet worden.[2] In der Praxis scheint sich ein besonderes Verfahren für die Untersuchung von Magnetstahlsorten ausgebildet zu haben, denn einem Briefe des Herrn Zellweger in Uster bei Zürich entnehme ich, dass er, um ein schnelles Urtheil über die Constanz der Magnete zu gewinnen, dieselben mehrfachen Erschütterungen aussetzt und notiert, welche Abnahme das magnetische Moment zeigt; er glaubt damit in zwei bis drei Tagen ein ziemlich genaues Bild von der Constanz der Magnete zu gewinnen. Ich bin jedoch der Ansicht, dass eine solche Methode für die definitive Beurtheilung der Güte einer Stahlsorte kaum ausreichen dürfte.

Die Bedingungen, unter welchen Magnete functionieren und ein constantes Moment bewahren sollen, sind im allgemeinen verschieden, lassen sich aber doch in zwei Hauptgruppen einreihen. Eine Reihe hat beim Gebrauche starke mechanische Erschütterungen, Abreißen des Ankers u. s. w.

---

[1] Die Resultate dieser Beobachtungen sind nicht veröffentlicht worden, wurden aber von der Firma Böhler & Cie. verschiedenen Personen zur Verfügung gestellt.

[2] Erich Schmidt sagt in seinem Buche »Die magnetische Untersuchung des Eisens und verwandter Metalle« Halle a. S., Druck und Verlag von Wilhelm Knapp, 1900, S. 53 in einer Anmerkung: »Die sonst übliche Untersuchung der Hufeisenmagnete nach der Tragkraftmethode ist unter allen Umständen zu verwerfen, da man nach derselben infolge des Haftens durch Adhäsion u. s. w. eventuell bis zu 50% falsche Resultate erhält.

zu ertragen; für Magnete, welche unter solchen Umständen zu functionieren haben, wird vielleicht die Methode brauchbare Resultate liefern.

Ganz anders verhält sich die Sache bei Magneten, welche den Bedingungen der zweiten Hauptgruppe unterliegen. Hier sollen die Magnete bei ziemlich ruhigem Lagern ihr Moment constant erhalten. Diesen Bedingungen unterliegen z. B. die Magnete bei erdmagnetischen und physikalischen Apparaten, Normalmagnete zur Aichung von Galvanometern u. s. w. Bei solchen Magneten ist die hauptsächlichste Ursache der Änderung des Momentes in den Temperaturschwankungen, wie sie durch den Wechsel der Jahreszeiten in einem Locale bedingt sind, zu suchen. Daraus folgt aber, dass man von diesem Gesichtspunkte aus ein größeres, mindestens ein Jahr umfassendes Zeitintervall für die Beobachtungen heranziehen muss.

Es ist aber gar nicht einzusehen, warum eine Stahlsorte, die sich in einer Beziehung bewährt, auch in der anderen die besten Resultate liefern müsste. Dies ist auch in der That nicht der Fall. Die richtige Würdigung einer Stahlsorte ergibt sich erst, wenn man sie unter jenen verschiedenen Bedingungen geprüft hat, unter welche sie in der Praxis gestellt werden kann.

Im allgemeinen aber wird man bei der Prüfung der Stahlsorte, respective der daraus verfertigten Magnete ein Verfahren einschlagen müssen, wie man es bei der Untersuchung der Normalelemente angewendet hat. Hiebei bildet die Ausdehnung der Beobachtungen auf ein großes Zeitintervall die Hauptrolle. Vielleicht gelingt es sodann, auf Grund der gesammelten Erfahrungen auch Normalmagnete von gleicher Constanz, wie man sie heutigen Tages bei den Normalelementen und Normalwiderständen hat, herzustellen.

Die Punkte, welche für die Güte eines permanenten Magnets maßgebend sein werden, sind folgende:

1. Die Constanz des Momentes. Dies ist sicher der wichtigste Punkt.
2. Ein möglichst niederer Temperatur-Coefficient.
3. Ein möglichst niederer Inductions-Coefficient.
4. Ein möglichst hoher specifischer Magnetismus.

Die Reihenfolge der letzten drei Punkte hinsichtlich ihrer Wichtigkeit wird etwas verschieden sein, je nach dem Zwecke, welchem der Magnet dienen soll.

Bei den drei letzten Punkten spielt neben der Stahlsorte auch das Dimensionsverhältnis eine Rolle; bei allen vier ist aber auch die Behandlung des Materiales vor dem Magnetisieren, respective seine Härtung von großem Einflusse.[1]

Um Stahlsorten verschiedener Provenienz hinsichtlich ihrer Güte zu untersuchen, habe ich mir gehärtete Stäbe und zum Theile auch schon fertige Magnete von verschiedenen Firmen kommen lassen. Ich glaube, dass dies der Weg ist, welcher ja größtentheils zur Beschaffung eines permanenten Magnetes eingeschlagen wird, denn die wenigsten sind in der Lage, den Stab, zumal bei einer durch die Erfahrung gegebenen günstigsten Temperatur, selbst zu härten. Die Fabriken haben aber schon ihre vermeintlich besten Härtungsmethoden ausgearbeitet.

Die Stahlsorten bezog ich durchwegs in Stabform mit quadratischem, in einigen Fällen auch kreisförmigem Querschnitt bei 4—10 *mm* Seite, respective Durchmesser und einem Dimensionsverhältnisse von 10—25.

Beschreibung der Magnetstahlsorten.

Die größte Zahl der untersuchten Magnete (40) stammt aus der Gusstahlfabrik Böhler & Cie. in Kapfenberg in Steiermark. Diese Firma liefert einen Wolframstahl für Magnete, der schon von vielen Seiten als ganz besonders ausgezeichnet erkannt wurde. Sie überließ mir fünf verschiedene Sorten, welche mit den Marken »UI«, »45«, »43«, »00«, »0« bezeichnet waren. Von jeder Marke waren acht Stäbe vorhanden, und zwar je zwei immer ganz gleich. Die Stäbe hatten quadratischen Querschnitt von 6 *mm*, respective 4 *mm* Seite bei einer Länge von 15 *cm* und 6 *cm* für den größeren und 10 *cm*, respective

[1] In früheren Zeiten hat man es als einen besonderen Vorzug einer Stahlsorte bezeichnet, wenn die daraus verfertigten Hufeisenmagnete nach oftmaligem Abreißen des Ankers eine höhere Tragkraft aufwiesen. Mit Rücksicht auf die Verwendung bei Messinstrumenten muss aber das geradeso als ein Mangel der Stahlsorte bezeichnet werden, wie eine Abnahme des Momentes.

4 *cm* für den kleineren Querschnitt, so dass ich also von jeder Marke je 4 Stück von den Dimensionsverhältnissen 25 und 10 zur Verfügung hatte. Zur näheren Kennzeichnung eines jeden Stabes wurde auch dessen specifischer elektrischer Leitungswiderstand bestimmt.

Nachstehende Tabelle enthält die näheren Daten über diese Magnete. In derselben ist jeder Magnet durch seine Marke, mit rechts daneben angefügter Länge in Centimetern, gekennzeichnet. Von den beiden ganz gleichen Stücken eines Paares ist das eine durch einen unter die Marke gesetzten Strich hervorgehoben. Überdies bedeutet in dieser, sowie in allen nachfolgenden Tabellen:

M das magnetische Moment,
m das magnetische Moment, bezogen auf 1 *g*.
σ den spec. elektrischen Leitungswiderstand in Mikrohm,
S die Seitenlänge in Millimeter,
D den Durchmesser in Millimeter,
V das Dimensionsverhältnis, d. h. das Verhältnis der Länge zur Seite oder zum Durchmesser;
Bez. die nähere Bezeichnung des Magnetes.

Die Härtung der Stäbe hat die Firma Böhler & Cie. selbst besorgt. Die Gruppen »UI«, »45« und »43« sind ziemlich gleichmäßig gehärtet, während in den Gruppen »00« und »0« große Unregelmäßigkeiten vorkommen. Insbesondere zeichnen sich die Magnete 00_{10}, 0_{10}, 00_4 und 0_4 durch einen hohen spec. Widerstand aus. Es ist interessant, zu bemerken, dass sich der Einfluss des hohen Härtegrades je nach dem Dimensionsverhältnisse beim spec. Magnetismus verschieden äußert; eine Thatsache, welche ja schon vielfach constatiert wurde.

Hinsichtlich der übrigen mir zur Verfügung gestellten Magnete sei bemerkt, dass von denselben nur ein Theil zur Untersuchung herangezogen werden konnte, da die Beobachtungsgestelle nicht für jeden beliebigen Querschnitt und für jede Länge eingerichtet waren.[1]

[1] Ich habe von den einzelnen Firmen Magnetstäbe von genau vorgeschriebenen Dimensionen erbeten; diesem Wunsche wurde jedoch nur von Böhler & Cie. und von Marchal in Paris entsprochen.



Tabelle I.

$S = 6\,mm$, $V = 25$				$S = 4\,mm$, $V = 25$				$S = 6\,mm$, $V = 10$				$S = 4\,mm$, $V = 10$			
Bez.	M	m	σ	Bez.	M	m	σ	Bez.	M	m	σ	Bez.	M	m	σ
UI_{15}	2628	60·8	38·1	UI_{10}	719	62·5	39·0	UI_{6}	387	23·9	37·0	UI_{4}	117	24·5	38·9
$\underline{UI_{15}}$	2595	61·2	37·2	$\underline{UI_{10}}$	722	63·1	38·3	$\underline{UI_{6}}$	388	23·0	37·1	$\underline{UI_{4}}$	110	25·4	38·1
00_{15}	2505	57·9	38·1	10_{10}	634	52·2	47·2	00_{6}	448	25·8	40·2	00_{4}	146	27·0	46·9
$\underline{00_{15}}$	2576	61·0	39·2	$\underline{00_{10}}$	666	51·3	49·0	$\underline{00_{6}}$	487	27·6	43·0	$\underline{00_{4}}$	143	27·9	48·0
0_{15}	2677	63·2	41·2	0_{10}	668	53·7	49·5	0_{6}	458	27·0	42·4	0_{4}	140	29·1	46·9
$\underline{0_{15}}$	2659	64·3	42·6	$\underline{0_{10}}$	689	54·2	47·5	$\underline{0_{6}}$	448	26·7	40·9	$\underline{0_{4}}$	146	28·8	46·5
45_{15}	2561	58·7	35·1	45_{10}	749	59·5	34·5	45_{6}	348	20·9	34·8	45_{4}	101	21·0	34·4
$\underline{45_{15}}$	2527	59·9	35·7	$\underline{45_{10}}$	743	60·4	35·6	$\underline{45_{6}}$	350	21·1	34·2	$\underline{45_{4}}$	101	20·3	35·2
43_{15}	2505	58·0	34·1	43_{10}	735	59·4	34·4	43_{6}	326	19·5	34·1	43_{4}	99	20·4	33·9
$\underline{43_{15}}$	2509	58·1	34·1	$\underline{43_{10}}$	725	59·6	34·6	$\underline{43_{6}}$	326	19·9	32·5	$\underline{43_{4}}$	100	20·7	34·4

Tabelle II enthält Daten über die anderen untersuchten Magnete. Es bedeutet die Marke:

Z = Zellweger,
M = Marchal,
B = Berg,
R = Remy.

Tabelle II.

Bez.	S	V	M	m	σ	Bez.	D	V	M	m	σ
M_{15}	6	25	2606	60·3	32·3	R_{15}	6·2	24	2241	60	36·8
M_{10}	4	25	855	60·2	39·1	$\underline{R_{15}}$	6·5	23	2285	62	35·4
M_{6}	6	10	381	21·4		R_{6}	6·3	9·5	287	19	33·6
M_{4}	4	10	125	22·6		$\underline{R_{6}}$	6·2	9·7	277	18	36·9
Z_{10}	10	10	1760	22·3	35·1	Z_{10}	8	12·5	1112	27·5	36·6
$\underline{Z_{10}}$	10	10	1736	22·0	33·1						
B_{15}	9·4	16	2812	27·0	39·3						
B_{10}	9·3	11	1225	17·7							

Die Beobachtungsmethode.

Die vorher beschriebenen Magnete wurden nach dem Magnetisieren in verschiedenen Kästen in der Ost—West-Lage aufbewahrt. Sie wurden nur zu den Beobachtungen herausgenommen und auf die Beobachtungsgestelle gelegt, so dass sie während der ganzen Zeit keinen besonderen Erschütterungen ausgesetzt waren. Die Magnetisierung geschah durchwegs in dem homogenen Felde einer langen Spirale unter Anwendung eines Accumulatorenstromes bei einer Feldstärke von 600 bis 700 abs. E., und zwar wurde der Strom, während der Magnet in der Spirale lag, mehrmals (20—50mal) gewechselt und dann plötzlich unterbrochen.

Sollte nun bei den Beobachtungen eine Genauigkeit von 0·1% oder noch mehr erreicht werden, so musste auf die

Variationen der Horizontal-Intensität Rücksicht genommen werden, da das Moment der Stäbe durch Ablenkungen einer Magnetometernadel aus der I. Hauptlage bestimmt wurde. Dies hätte in der Weise geschehen können, dass im Beobachtungsraume auch ein Intensitätsvariometer aufgestellt worden wäre, nach dessen Gang dann die Ablenkungsbeobachtungen der Magnete zu corrigieren gewesen wären. Dieses Verfahren hätte aber bei der Beschaffenheit und Lage des Arbeitsraumes kaum zu einem günstigen Resultate geführt, außer es wäre das Variometer dicht am Magnetometer angebracht worden, eine Forderung, die eben nicht zu erfüllen war; sonst aber hätte man die vom Variometer angezeigten Schwankungen wohl kaum als für das Magnetometer giltig annehmen können. Ich schlug daher ein anderes Verfahren ein und benützte zur Controle der Horizontal-Intensität ein Clark'sches Normalelement, einen Manganinwiderstand und eine am Magnetometer angebrachte Galvanometerspule. Hiebei musste vorausgesetzt werden, dass sich die Horizontal-Intensität nicht sprungweise ändert. Es wurden sodann abwechselnd Ablenkungen der Magnetometernadel durch einen constanten Strom und durch die Beobachtungsmagnete gemacht.

Das Clark'sche Normalelement, insbesondere in der von der physikalisch-technischen Reichsanstalt wieder zur Geltung gebrachten H-Form, ändert die elektromotorische Kraft im Verlaufe mehrerer Jahre nur um einige $0 \cdot 001^0/_0$. Ein solches Element wäre also für die hier vorliegenden Beobachtungen zur Lieferung eines constanten Stromes außerordentlich günstig, wenn sein innerer Widerstand constant oder mindestens gegen den Widerstand des Gesammtkreises zu vernachlässigen wäre. Das war nun nicht der Fall. Ich habe mir daher für diese Beobachtungen ein eigenes großes Clark-Element von dem englischen Typus, aber mit nicht ganz concentrierter Zinksulfatlösung construiert; es wird fortan mit R bezeichnet. Dieses Element hatte den inneren Widerstand von $18\,\Omega$ bei circa 18°. Es wurde hinsichtlich seiner elektromotorischen Kraft mit einem anderen Element von der H-Form öfters verglichen. Der Umstand, dass bei dem Elemente R nur eine nicht ganz concentrierte Lösung verwendet wurde, war in einer Beziehung besonders günstig;

es war nämlich der Temperaturcoefficient desselben viel kleiner als der des gewöhnlichen Normalelementes, und zwar war sein Werth $= 0 \cdot 034^0/_0$.[1]

[1] Neben dem nach den Vorschriften der physikalisch-technischen Reichsanstalt von mir verfertigten Normal-Clark-Element von der H-Form, welches von nun ab mit *H* bezeichnet werden soll, stand mir noch ein zweites, ursprünglich von Fuess herstammendes, mit Nr. 160 bezeichnetes Normal-Clark-Element zur Verfügung. Das Element Nr. 160 war im Verlaufe der Zeit unbrauchbar geworden und ist sodann im Sommer 1898 von Hartmann und Braun frisch in Stand gesetzt worden. Bezüglich des inneren Widerstandes dieser Elemente könnten vielleicht folgende Angaben interessieren:

H hergestellt am 25./V. 1898 hatte am 13./X. 1898...... 227 Ω bei 16·2°
am 14./XI. 1899..... 301 Ω bei 17·4

Nr. 160, frisch in Stand gesetzt im Sommer 1898, hatte
am 13./X. 1898...... 614 Ω bei 16·5°
am 14./XI. 1899..... 921 Ω bei 18·0.

Der Widerstand beider Elemente ist also im Verlaufe eines Jahres ganz beträchtlich gewachsen.

Eine Vergleichung der elektromotorischen Kräfte beider Elemente ergab die folgenden Verhältnisse:

12./X. 1898........	$\frac{H}{\text{Nr. 160}}$	= 1·00027
16./XII. 1898.......	»	= 1·00042
8./III. 1899........	»	= 1·00038
12./VIII. 1899......	»	= 1·00034
3./X. 1899........	»	= 1·00036.

Es sei bemerkt, dass diese Daten hinsichtlich des absoluten Wertes des Verhältnisses nicht richtig sein müssen, weil die verwendeten Thermometer nicht miteinander verglichen wurden.

Das Element *R* änderte seine elektromotorische Kraft im Verlaufe eines Jahres ziemlich gleichmäßig in einem Sinne. Es war nämlich für 18°:

	$\frac{R}{H}$
11./VII. 1898..........	1·00224
12./X. 1898...........	1·00163
22./XII. 1899..........	1·00122
8./III. 1899..........	1·00079
12./VIII. 1899.........	1·00005
3./X. 1899...........	0·99985

Als Widerstandsmaterial braucht man gegenwärtig meistentheils Manganindraht, der neben einer großen Constanz auch einen verschwindend kleinen Temperaturcoefficienten hat. Ich wickelte mir mehrere Widerstände aus 0·1 *mm* dickem, doppelt mit Seide umsponnenem Manganindraht zu 10000 Ω, welche ich in bestimmten Zeitintervallen mit einem von O. Wolff in Berlin bezogenen Normal 10000 verglich. Die frisch gewickelten Widerstände zeigten in den ersten Wochen Widerstandsänderungen, die einen Theil der Beobachtungen störten. Ich habe darauf diese Widerstände etwa eine Stunde lang in Paraffin gekocht und sie dann solange in Paraffin liegen lassen, bis es zu erstarren begann. Durch diese Manipulation wurde jede weitere Änderungstendenz behoben und die Widerstände ergaben fortan sowohl unter sich, als auch gegen den Normal 10000 dieselben Verhältnisse.

Nachdem ich durch das Clark'sche Element und die Widerstände einen bestimmten Strom festgelegt hatte, war noch dafür zu sorgen, dass die Galvanometerrolle durch Temperaturschwankungen keine Lageänderungen gegen die Magnetometernadel erfahre. Es sei bemerkt, dass der Träger der Galvanometernadel bis auf die Suspensionsröhre ganz aus Metall war. Die Galvanometerrolle wurde nun ebenfalls in der früher beschriebenen Weise in Paraffin ausgekocht und auf den Metalldämpfer aufgeschraubt. Der Widerstand der Galvanometerwindungen war = 710 Ω. Um das Magnetometer wurde ein Holzkasten angebracht, durch welchen es bis auf eine Visieröffnung ganz eingehüllt und vor muthwilligen oder zufälligen Berührungen geschützt war. Endlich musste noch dafür gesorgt werden, dass die Versuchsmagnete bei den Beobachtungen immer in dieselbe erste Hauptlage gebracht wurden. Zu diesem

---

Die Clark'schen Elemente haben bei nicht ganz gesättigter Zinksulfatlösung eine etwas höhere elektromotorische Kraft, als bei gesättigter. Obige Abnahme deutet also dahin, dass die Lösung im Elemente durch Austrocknen immer concentrierter wurde. Der Verschluss (Paraffin) war auch in der That nicht besonders fest. Bemerkenswert ist die Thatsache, dass sich der Temperaturcoefficient zwar auch änderte, aber schließlich doch nur auf 0·050 stieg. Es sei noch erwähnt, dass die Temperaturen des Elementes R an einem im Elemente angebrachten Thermometer abgelesen wurden.

Zwecke dienten zwei ganz gleiche Messinggestelle, welche in zwei verschiedenen Entfernungen vom Magnetometer aufgestellt waren. Zwei Gestelle wurden genommen, um mit den einzelnen Magneten passende Ablenkungen zu bekommen, weil die Momente der untersuchten Magnete sehr verschieden waren.

Jedes Gestell war aus massivem Messingguss und bestand aus einer auf einem Dreifuße ruhenden Säule S (vide Fig. 1 und 2), welche sich oben zu einem kreisförmigen Tischchen T

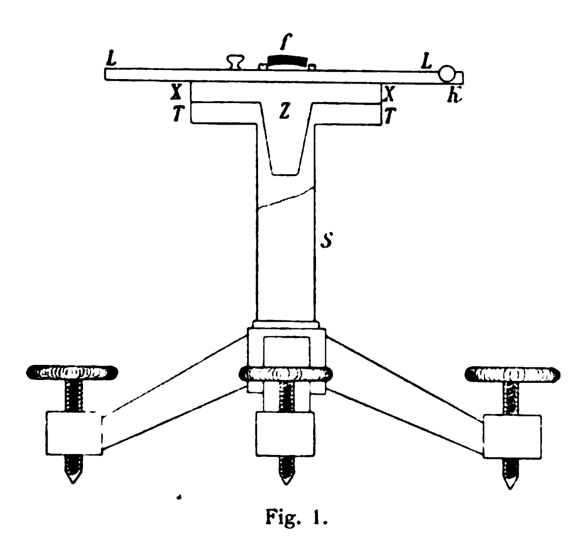


Fig. 1.

erweiterte. Ober demselben war ein genau gleiches, um einen Zapfen Z drehbares zweites Tischchen XX angebracht, welches also in einer zur Stativsäule senkrechten Ebene drehbar war. Auf dieses Tischchen wurden die Versuchsmagnete gelegt, wenn sie aus der ersten Hauptlage auf die Magnetometernadel wirken sollten. Um die Magnete immer in derselben Lage auf dem Tischchen anzubringen, war auf demselben eine Anschlagleiste LL mit einem Anschlagzapfen k befestigt. Überdies befanden sich daselbst ein fixes Dreieck d und ein bewegliches Trapez p aus Messing, welche durch eine Feder f verbunden waren. Zur Beobachtung mit dem Versuchsmagnete wurde das Trapez nach rückwärts gezogen, in den erweiterten Raum zwischen der einen Seite des Trapezes und der Anschlagleiste

der Magnet hineingelegt und bis zum Anschlagzapfen vorgeschoben. Sobald das Trapez ausgelassen wurde, klemmte es den Magnet in seiner Lage fest. Der Anschlagzapfen konnte entsprechend der Länge des Magnetes verstellt werden und wurde jeweilig so angebracht, dass die Mitte des Magnetes mit der Umdrehungsaxe zusammenfiel. Bei der Beobachtung wurde die Ablenkung des Magnetometermagnetes immer bei zwei Stellungen des Versuchsmagnetes beobachtet, indem man

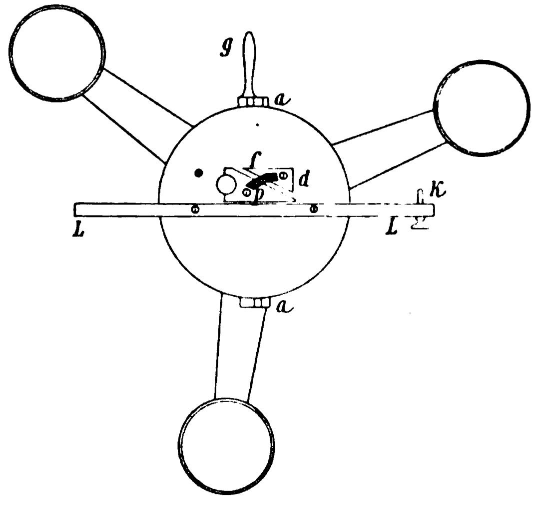


Fig. 2.

diesen in der einen Hauptlage um 180° drehte. Um dies immer exact ausführen zu können, waren am unteren Tischchen *TT* zwei um 180° von einander abstehende Anschläge *aa* angebracht, gegen welche sich der mit dem drehbaren Tischchen verbundene Griff *g* legte. Das Magnetometer und die Messinggestelle waren auf einem Marmortische aufgestellt. Das bewegliche Tischchen des Messinggestelles befand sich in gleicher Höhe mit der Magnetometernadel. Um die Lage des Gestelles gut zu fixieren, wurden für die Spitzen der Stellschrauben passende Löcher in die Marmorplatte gebohrt.

Die Entfernung der Mitte des ersten Gestelles von der Magnetometernadel betrug 62·4 *cm*, die des zweiten 38·9 *cm*. Auf diese Weise glaube ich erreicht zu haben, dass die

Magnete bei jeder Beobachtung immer die gleiche erste Hauptlage gegen die Magnetometernadel inne hatten.

Ein weiterer Umstand war noch zu berücksichtigen. Die Magnetometernadel war auf einem Coconfaden aufgehängt, welcher eine merkbare elastische Nachwirkung zeigte, deren störender Einfluss eliminiert werden musste. Dies geschah in der Weise, dass die Beobachtungen nach dem Schlage einer Uhr gemacht wurden, welche jede Minute einen Glockenschlag gab. Genau mit dem Glockenschlage wurde die Ablenkung an der Scala abgelesen und darauf sofort der Strom commutiert oder der Magnet um 180° gedreht.

Um die Sicherheit der Beobachtungen noch zu erhöhen und insbesondere um eine etwa vorgefallene Lagenänderung bei den Ablenkungsgestellen bemerken zu können, bediente ich mich noch zweier Magnete, die schon vor mehreren Jahren magnetisiert worden waren und von denen ich glaubte annehmen zu können, dass sie ihr Moment nicht weiter ändern würden. Ich will diese beiden Magnete von nun an als Normalmagnete bezeichnen. Sie dienten bereits im Jahre 1896 zu einer vorläufigen Untersuchung über permanente Magnete aus steirischem Wolframstahl[1] und waren im Winter 1896 magnetisiert worden. Ihre Bezeichnung ist Nr. 5 und Nr. 12. Nr. 5 war für Ablenkungen von dem weiter entfernten, Nr. 12 für solche von dem näher gelegenen Gestell bestimmt. Nr. 12 wurde schon im Jahre 1896 nach dem Verfahren von Strouhal und Barus behandelt. Die Normalmagnete erfuhren hinsichtlich der Aufbewahrung dieselbe Sorgfalt, wie die anderen untersuchten Magnete.

Der Beobachtungsvorgang.

Mit Rücksicht auf die Änderungen der Horizontalcomponente wären, wie schon erwähnt, gleichzeitig mit den Ablenkungen durch die Magnete, auch die Variationen des Erdmagnetismus zu beobachten gewesen. Da dies nicht möglich war, wurde der folgende Vorgang eingeschlagen. Es wurde zunächst eine Ablenkung durch den Strom bestimmt und dabei

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 105, Abth. II.a. 1896.



die Temperatur des Clark-Elementes berücksichtigt. Hierauf wurden Beobachtungen mit einigen Versuchsmagneten (2—4) gemacht, sodann die Strombeobachtung wiederholt, endlich nochmals mit den Magneten und am Schlusse wieder mit dem Strome beobachtet. Ab und zu machte ich nun solche Beobachtungen auch mit den Normalmagneten und dem Strome. Abgesehen von nahezu plötzlichen und sprungweisen Änderungen der Horizontalcomponente, wie solche z. B. bei magnetischen Gewittern vorzukommen pflegen, war durch dieses Verfahren für eine Berücksichtigung der normalen Intensitätsvariationen in genügender Weise gesorgt. Magnetische Gewitter sind übrigens bei Beobachtungen mit Magnetometern leicht zu entdecken und konnte zu solchen Zeiten einfach nicht beobachtet werden.[1] Die Ablesung der Ablenkungen geschah mittelst Fernrohr und Spiegel an einer 1200 *mm* langen, in einer Entfernung von 2135 *mm* vom Spiegel aufgestellten Scala.[2]

---

[1] Schlimmer als die Störungen durch die Variationen des Erdmagnetismus sind in unserem Falle die localen Störungen gewesen, welchen das physikalische Institut infolge seiner ungünstigen Lage sehr stark ausgesetzt ist. Zu diesen gehören insbesondere die Axen der in der Universitätsstraße vorbeifahrenden Wägen. Zum Glücke wurde man durch das Geräusch der Wägen auf das Vorhandensein einer solchen Störung aufmerksam gemacht.

[2] Die Genauigkeit der Ablesung an der Scala kann auf nahezu 0·1 *mm* geschätzt werden. An einem störungsfreien Tage war daher auch in der That zwischen den einzelnen Ablenkungsbeobachtungen eine außerordentlich gute Übereinstimmung zu erzielen. Als Beispiel führe ich eine Beobachtungsreihe an, welche mit den 4 *cm* langen Magneten vom Dimensionsverhältnisse 10 am 26./XII. 1898, nachmittags zwischen 3 und 4 Uhr gemacht wurde. Die Temperatur des Clark'schen Elementes war constant 14·2°. Es wurden folgende Ablenkungen durch den Strom und durch die verzeichneten Magnete beobachtet:

	Strom	43_4	45_4	0_4	UI_4	00_4	Strom
Ablenkung...	897·70	148·57	150·75	209·12	172·77	216·92	897·80

	00_4	UI_4	0_4	45_4	43_4	Strom
Ablenkung..........	216·95	172·72	209·20	150·80	148·50	897·72

Die Beobachtungen sind in der Reihenfolge angeführt, wie sie gemacht wurden. Bei den Werten der Ablenkungen sind absichtlich noch die Hundertstel eines Scalentheiles, wie sie sich aus der Berechnung der Mittel ergaben,

Die Scala war fix aufgestellt und ist während der ganzen Beobachtung nicht merklich verstellt worden. Das hier eingeschlagene Beobachtungsverfahren hatte übrigens den Vortheil, dass ein Verstellen der Scala auf das Resultat keinen Einfluss hatte.

Die Beobachtungsresultate.

Zunächst habe ich mit den von Böhler & Cie. gelieferten Magneten eine drei Wochen umfassende Beobachtungsreihe gemacht, um zu sehen, wie die Abnahme des Momentes unmittelbar nach der Magnetisierung verläuft und wie sich in dieser Beziehung das Dimensionsverhältnis und die Dicke des Magnetes äußert.

Die erste Beobachtung wurde 2—3 Stunden nach der Magnetisierung gemacht.

In den nachfolgenden Tabellen ist die procentische Abnahme in den verschiedenen Zeitintervallen verzeichnet.

Tabelle III.

Magnete 15 *cm* lang, $S = 6\,mm$; $V = 25$.

Magnetisiert am 2. Mai 1898.

Zeitintervall	Abnahme in Procenten									
	UI	$\underline{\text{UI}}$	00	$\underline{00}$	0	$\underline{0}$	45	$\underline{45}$	43	$\underline{43}$
2./V. bis 4./V.	0·37	0·35	0·39	0·23	0·45	0·30	0·41	0·14	0·20	0·26
4./V. bis 8./V.	0·35	0·30	0·16	0·23	0·20	0·23	0·18	0·09	0·12	0·12
8./V. bis 15./V.	0·13	0·20	0·15	0·25	0·19	0·17	0·07	0·16	0·07	0·29
15./V. bis 29./V.	0·62	0·58	0·60	0·56	0·46	0·45	0·26	0 14	0·30	0·25
Summe......	1·47	1·43	1·39	1·27	1·30	1·15	0·92	0·53	0·69	0·92

angeführt, da sie die Genauigkeit noch wesentlich illustrieren. Die größte Differenz zwischen je zwei für einen Magnet gemachten Ablesungen findet sich bei 0_4 und beträgt 0·08, beim Strom aber 0·10 Scalentheile.

Tabelle IV.

Magnete 6 *cm* lang, $S = 6\,mm$; $V = 10$.

Magnetisiert am 7. Mai 1898.

Zeitintervall	Abnahme in Procenten									
	UI	$\underline{\text{UI}}$	00	$\underline{\text{00}}$	0	$\underline{\text{0}}$	45	$\underline{\text{45}}$	43	$\underline{\text{43}}$
7./V.— 9./V.	0·28	0·23	0·45	0·36	0·28	0·27	0·19	0·27	0·16	0·20
9./V.—13./V.	0·30	0·29	0·12	0·12	0·21	0·25	0·11	0·28	0·10	0·12
13./V.—20./V.	0·58	0·50	0·37	0·32	0·37	0·49	0·34	0·11	0·38	0·39
20./V.— 3./VI.	0·66	0·67	0·45	0·40	0·44	0·49	0·29	0·33	0·32	0·34
Summe......	1·82	1·69	1·39	1·20	1·30	1·50	0·93	0·99	0·96	1·05

Tabelle V.

Magnete 10 *cm* lang, $S = 4\,mm$; $V = 25$.

Magnetisiert am 3. Mai 1898.

Zeitintervall	Abnahme in Procenten									
	UI	$\underline{\text{UI}}$	00	$\underline{\text{00}}$	0	$\underline{\text{0}}$	45	$\underline{\text{45}}$	43	$\underline{\text{43}}$
3./V.— 5./V.	0·23	0·19	0·17	0·18	0·15	0·19	0·21	0·14	0·12	0·13
5./V.— 9./V.	0·23	0·20	0·07	0·08	0·11	0·11	0·10	0·10	0·13	0·12
9/V.—16./V.	0·34	0·34	0·20	0·24	0·31	0·22	0·16	0·17	0·18	0·18
16./V.—30./V.	0·36	0·40	0·31	0·33	0·20	0·32	0·23	0·19	0·20	0·19
Summe......	1·16	1·13	0·75	0·83	0·77	0·84	0·70	0·60	0·63	0·62

Tabelle VI.

Magnete 4 *cm* lang, $S = 4\,mm$; $V = 10$.

Magnetisiert am 6. Mai 1898.

Zeitintervall	Abnahme in Procenten									
	UI	$\underline{\text{UI}}$	00	$\underline{\text{00}}$	0	$\underline{\text{0}}$	45	$\underline{\text{45}}$	43	$\underline{\text{43}}$
6./V.— 8./V.	0·30		0·17	0·09	0·10		0·19	0·00	0·21	0·16
8./V.—12./V.	0·37	1·0	0·15	0·12	0·31	0·49	0·25	0·15	0·13	0·05
12./V.—19./V.	0·54		0·29	0·73	0·17		0·13	0·26	0·19	0·41
19./V.— 2./VI.	0·46	0·72	0·33	0·31	0·38	0·52	0·25	0·26	0·17	0·23
Summe....	1·67	1·72	0·94	1·25	0·96	1·01	0·82	0·67	0·70	0·85

Um den Einfluss des Dimensionsverhältnisses und der Dicke zu bestimmen, empfiehlt es sich, die Gruppen zu trennen und zunächst eine Tabelle zusammenzustellen, in welcher nur Daten von den Marken »UI«, »45« und »43« benützt werden. Diese Marken weisen nämlich innerhalb einer und derselben Gruppe beinahe durchwegs gleich gehärtete Stücke auf, wie das aus dem spec. Widerstande hervorgeht. Wir wollen die in drei Wochen beobachteten Gesammtabnahmen summieren und durch die Anzahl der Magnete dividieren. Da ergibt sich für die sechs Magnete:

von 6 *mm* Seite und $V = 25$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 0·99%,

von 4 *mm* Seite und $V = 25$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 0·81%,

von 6 *mm* Seite und $V = 10$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 1·26%,

von 4 *mm* Seite und $V = 10$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 1·07%.

Daraus geht hervor:

1. Dass die Abnahme dem Dimensionsverhältnisse entgegengesetzt verläuft, doch ist der Unterschied eigentlich kleiner, als man dies erwartet hätte;

2. dass in den ersten Tagen nach der Magnetisierung die dünnen Magnete ihren Magnetismus besser als die dicken beibehalten. Bei den übrigen zwei Gruppen »00« und »0«, innerhalb welcher die Härtungsverhältnisse weniger gleichartig sind, erhält man in gleicher Weise folgende Werte:

Bei	6 *mm*	Seite	$V = 25$	pro	Magnet	1·28%,
»	4	»	$V = 25$	»	»	0·80
»	6	»	$V = 10$	»	»	1·35
»	4	»	$V = 10$	»	»	1·04

wodurch die oben ausgesprochene Regel ebenfalls bestätigt wird.

Die mittlere Abnahme in drei Wochen pro Magnet ergibt sich bei den einzelnen Marken für die zwei Dimensionsverhältnisse wie folgt:

	$V = 25$	$V = 10$
»UI«	1·25%	1·72%
»00«	1·06	1·20
»0«	1·01	1·19
»45«	0·69	0·85
»43«	0·72	0·89

Wenn man also die Güte der Stahlsorte nach der Abnahme des Momentes während der ersten drei Wochen beurtheilen wollte, so würde sich die Reihenfolge

»45«,
»43«,
»0«,
»00«,
»UI«

ergeben.

Mit einem Theile der hier untersuchten und mit den übrigen mir zur Verfügung stehenden Magneten wurden die Beobachtungen von Mai 1898 bis October 1899 fortgesetzt.

Da jedoch im Juni 1898 sich eine ziemlich beträchtliche Änderung in den Widerständen (0·2%) einstellte und überdies um diese Zeit die Anschläge bei einem Stativ ein wenig gedreht wurden,[1] so überspringe ich in den nachfolgenden Mittheilungen einige Werte und beginne mit den Beobachtungen vom Juli 1898. Von da ab wurde von den Böhler'schen Magneten aus jedem Paare ein Stück (das unterstrichene) ausgeschieden.

---

[1] Das Tischchen *TT* war in die Säule eingeschraubt und durch häufiges Drehen des zweiten Tischchens die Schraube gelockert. Diesem Übelstande wurde dann mittelst Durchsteckens eines Zapfens durch Säule und Schraube bei beiden Gestellen gründlich abgeholfen. Die Widerstandsänderungen wurden, wie erwähnt, durch Auskochen in Paraffin behoben.

Tabelle VII.

Magnete von Böhler & Cie.

Zeitintervall	Abnahme in Procenten									
	Magnete 15 *cm* lang, $S = 6$ *mm*, $V = 25$					Magnete 6 *cm* lang, $S = 6$ *mm*, $V = 10$				
	UI	00	0	45	43	UI	00	0	45	43
13./VII.–11./X. 1898	0·60	0·50	0·49	0·41	0·40	1·21	1·13	1·18	0·90	0·92
11./X.–25./XII. 1898	0·24	0·14	0·11	0·11	0·18	0·65	0·25	0·32	0·25	0·27
25./XII.–15./III. 1899	0·03	0·09	-0·04	-0·04	0·07	0·26	0·31	0·33	0·21	0·33
15./III.–29./VII. 1899	0·41	0·42	0·42	0·55	0·35	0·95	0·96	1·04	1·00	1·02
29./VII.–25./X. 1899	0·23	0·18	0·20	0·21	0·39	0·25	0·33	0·40	0·33	0·48
Summe.....	1·45	1·33	1·18	1·22	1·39	3·32	2·98	3·27	2·69	3·02

Tabelle VIII.

Magnete von Böhler & Cie.

Zeitintervall	Abnahme in Procenten									
	Magnete 10 *cm* lang $S = 4$ *mm*, $V = 25$					Magnete 4 *cm* lang $S = 4$ *mm*, $V = 10$				
	UI	00	0	45	43	UI	00	0	45	43
13./VII.—15./X. 1898	0·48	0·65	0·59	0·40	0·49	1·30	1·40	1·26	0·93	0·94
15./X.—25./XII. 1898	0·12	0·24	0·19	0·21	0·06	0·23	0·56	0·58	0·33	0·52
25./XII.—16./III. 1899	0·06	0·09	0·19	0·00	0·21	0·35	0·60	0·53	0·33	0·40
16./III.—31./VII. 1899	0·46	0·62	0·70	0·56	0·65	1·00	1·30	1·20	1·03	0·87
31./VII.—26./X. 1899	0·16	0·37	0·32	0·22	0·22	0·47	0·84	0·77	0·60	0·67
Summe......	1·28	1·97	1·99	1·49	1·63	3·35	4·70	4·34	3·22	3·40

Wir wollen jetzt wieder so verfahren, wie vorher bei der Betrachtung der Abnahme in den ersten drei Wochen.

Zunächst ergibt sich für die Gruppen »UI«, »45« und »43« eine Gesammtabnahme in 15 Monaten für die Magnete

von $S = 6\,mm$ und $V = 25$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 1·39%;

von $S = 4\,mm$ und $V = 25$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 1·47%;

von $S = 6\,mm$ und $V = 10$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 3·01%;

von $S = 4\,mm$ und $V = 10$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 3·32%.

Für die beiden Marken »00« und »0«:

von $S = 6\,mm$ und $V = 25$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 1·25%;

von $S = 4\,mm$ und $V = 25$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 1·98%;

von $S = 6\,mm$ und $V = 10$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 3·12%;

von $S = 4\,mm$ und $V = 10$

eine mittlere Abnahme pro Magnet von 4·52%.

Auch hier bestätigt sich die früher beobachtete Thatsache, dass für die Constanz die großen Dimensionsverhältnisse günstiger als die kleinen sind. Diese Thatsache tritt hier sogar viel auffälliger auf, als bei der Abnahme während der ersten drei Wochen. Sodann ist noch eine Folgerung bemerkenswert. Bei der Beobachtung der Abnahme im Verlaufe dieses größeren Zeitintervalles erweisen sich die dickeren Magnete als die besseren. Sie verhalten sich demnach gerade umgekehrt, als dies während der ersten drei Wochen der Fall war. Es sind

offenbar zwei Ursachen der Abnahme vorhanden. Eine, welche vornehmlich in der ersten Zeit nach der Magnetisierung auftritt und sozusagen auch als eine Art magnetischer Nachwirkung bezeichnet werden kann, indem die Molecularmagnete die Tendenz haben, sich noch weiter in dem Sinne zu bewegen, in welchem sie sich beim Aufhören der magnetisierenden Kraft bewegten. Diese Tendenz wird durch die entmagnetisierende Kraft der Enden begünstigt und ist daher bei den kurzen Magneten größer als bei den langen. Sie ist, wie die hier beobachteten Thatsachen lehren, bei den dicken Magneten größer als bei den dünnen. Die zweite Ursache der Abnahme liegt in den Temperaturschwankungen, welche im Verlaufe des Jahres vorkommen. Diese Ursache macht sich natürlich nur bei länger dauernden Beobachtungen bemerkbar und da wieder bei dicken Magneten weniger stark als bei dünnen, was leicht zu erklären sein dürfte.

Die mittlere Abnahme pro Magnet in 15 Monaten ergibt sich bei den einzelnen Marken wie folgt:

	$V = 25$	$V = 10$
Marke »UI«	1·37	3·33
» »00«	1·65	3·84
» »0«	1·58	3·80
» »45«	1·35	2·95
» »43«	1·51	3·21

Es resultiert daher in diesem Falle die Reihenfolge

»45«, »UI«, »43«, »0«, »00«

für die Güte der untersuchten Marken.

Daraus geht hervor, dass es nicht erlaubt ist, aus Beobachtungen, welche sich über einen kurzen Zeitraum erstrecken, schon ein definitives Urtheil über irgend eine Stahlsorte zu fällen. Marke »UI« z. B. erweist sich schließlich weitaus besser, als man das aus den Beobachtungen nach den ersten drei Wochen vermuthet hätte.

Die Ergebnisse der Beobachtungen mit den übrigen Magneten sind in den nachfolgenden Tabellen niedergelegt.

Tabelle IX.

Die Magnete von Marchal »M«.

Abnahme in Procenten.

Zeitintervall	$L = 15\,cm$ $S = 6\,mm$ $V = 25$	$L = 10\,cm$ $S = 4\,mm$ $V = 25$	$L = 6\,cm$ $S = 6\,mm$ $V = 10$	$L = 4\,cm$ $S = 4\,mm$ $V = 10$
13./VII. bis 15./X. 1898	1·70	1·26	3·21	3·77
15./X. bis 29./XII. 1898	0·44	0·65	1·84	1·17
29./XII. bis 21./III. 1899	0·30	0·19	0·40	0·94
21./III. bis 29./VII. 1899	0·91	0·81	1·45	2·00
Summe......	3·35	2·91	6·90	7·88

Die Beobachtungen wurden im Juli abgebrochen, da schon aus den vorliegenden Daten zu ersehen war, dass die Abnahme des Momentes weitaus größer ist, als bei anderen untersuchten Magneten. Die Magnete von Marchal kamen zwar magnetisiert an, sie hatten aber offenbar während des Transportes an Moment verloren, wie sich das aus einer Bestimmung des spec. Magnetismus ergab. Um nun die Beobachtungsdaten mit den anderen vergleichbar zu machen, mussten sie frisch magnetisiert werden; dies geschah am 4./VI. 1898.

Tabelle X.

Die Magnete von Zellweger »Z«.

Abnahme in Procenten.

Zeitintervall	$L = 10\,cm$ $S = 10\,mm$ $V = 10$	$L = 10\,cm$ $S = 10\,mm$ $V = 10$	Zeitintervall	$L = 10\,cm$ $D = 8\,mm$ $V = 12·5$
13./VII.–16./X. 98	1·98	1·81	12./II.–23./III. 99	4·43
16./X.–29./XII. 98	0·78	0·52	23./III.–29./VII. 99	3·22
29./XII.–21./III. 99	0·52	0 76	29./VII.–23./X. 99	1·04
21./III.–29./VII. 99	0·92			
29./VII.–23./X. 99	0·29			
Summe......	3·49			8·69

Alle drei Magnete kamen magnetisiert an. Die beiden Stücke vom Dimensionsverhältnisse $V = 10$ hatten einen spec. Magnetismus von 17·5, respective 16·5 abs. E. Sie waren also entweder nicht bis zum Maximum magnetisiert worden, oder sie hatten unterwegs viel an Moment verloren, denn als ich sie am 11./VI. 1898 neuerdings magnetisierte, nahmen sie die spec. Momente von 22·3, respective 22·0 an. Den runden, mit Z_r bezeichneten Magnetstab erhielt ich erst im Winter 1898/99; er wurde mir von Zellweger als besonders gut bezeichnet. Ich habe ihn sodann nicht neuerdings magnetisiert, sondern mit ihm im Februar die Beobachtungen angefangen; dieselben sprechen nicht für eine besondere Güte des Magnetes. Von den beiden gleichen Stücken Z_{10} wurde ein Magnet im Juni 1899 zu anderen Beobachtungen herangezogen.

Tabelle XI.

Die Magnete von Remy »R«.

Abnahme in Procenten.

Zeitintervall	$L = 15\,cm$ $D = 6{\cdot}2\,mm$ $V = 24$	$L = 15\,cm$ $D = 6{\cdot}5\,mm$ $V = 23$	$L = 6\,cm$ $D = 6{\cdot}3\,mm$ $V = 9{\cdot}5$	$L = 6\,cm$ $D = 6{\cdot}2\,mm$ $V = 9{\cdot}7$
13./VII. bis 16./X. 1898	1·03	0·88	2·10	2·15
16./X. bis 29./XII. 1898	0·37	0·42	0·62	0·45
29./XII. bis 22./III. 1899	0·08	0·06	0·41	0·29
22./III. bis 29./VII. 1899	0·68	0·67	1·09	1·05
29./VII. bis 23./X. 1899	0·21	0·25	0·45	0·48
Summe......	2·37	2·28	4·67	4·42

Die Magnete kamen zwar magnetisiert an, wurden jedoch am 11./VI. 1898 frisch magnetisiert.

Tabelle XII.

Die Magnete von Berg »B«.

Abnahme in Procenten.

Zeitintervall	$L = 15\,cm$ $S = 9 \cdot 4\,mm$ $V = 16$	$L = 10\,cm$ $S = 9 \cdot 3\,mm$ $V = 11$
16./VII. bis 16./X. 1898	0·79	1·94
16./X. bis 29./XII. 1898	0·38	0·32
29./XII. bis 22./III. 1899	0·12	0·75
22./III. bis 29./VII. 1899	0·29	0·55
29./VII. bis 24./X. 1899	0·90	0·82
Summe......	2·24	4·38

Die von Berg bezogenen Magnete kamen magnetisiert an, hatten aber ein sehr niederes spec. Moment, wie aus Tabelle II hervorgeht. Sie hatten also jedenfalls durch den Transport viel verloren oder waren überhaupt ursprünglich nicht sehr hoch hinauf magnetisiert worden. Ich beließ sie in diesem Zustande und untersuchte sie, ohne sie nochmals magnetisiert zu haben.

Vergleich der untersuchten Magnetsorten hinsichtlich der Abnahme des Momentes.

Zur Beurtheilung der Güte der einzelnen Stahlsorten vom Gesichtspunkte der Abnahme des Momentes in 15 Monaten mache ich folgende Zusammenstellung, wobei ich von den Böhler-Magneten nur die zwei besten Marken heranziehe.

Es ergibt sich eine mittlere Abnahme des Momentes in Procenten pro Magnet für die einzelnen Sorten und die verzeichneten Dimensionsverhältnisse wie folgt:

	Abnahme in Procenten in 15 Monaten pro Magnet beim Dimensionsverhältnisse			
	$V = 25$	$V = 15$	$V = 12\cdot5$	$V = 10$
Marke »45«	1·35	—	—	2·95
» »UI«	1·37	—	—	3·33
» »M«	3·13	—	—	7·39
» »Z«	—	—	8·69[1]	3·49
» »R«	2·33	—	—	4·55
» »B«	—	2·24	—	4·38

Wenn man die hier gegebenen Daten betrachtet, so folgt ohneweiters, dass vom Gesichtspunkte der größten Constanz des Momentes unter jenen Bedingungen, welche hier eingehalten wurden, die Böhler'schen Marken »45« und »UI« als die besten bezeichnet werden müssen. Diesen zunächst kommt eine Magnetstahlsorte von Zellweger, dann würden »B«, »R« und »M« folgen. Am wenigsten bewährt hat sich ein runder Magnet von Zellweger mit dem Dimensionsverhältnisse 12·5.

Die Normalmagnete.

Die beiden als »Normalmagnete« bestimmten Stäbe Nr. 5 und Nr. 12 waren, wie schon erwähnt, aus steirischem Wolframstahl und hatten die Dimensionsverhältnisse 24·2, respective 11·2 bei 6·3, respective 5·4 *mm* Seitenlänge. Beide Magnete waren schon im Jahre 1896 magnetisiert, Nr. 12 überdies in demselben Jahre nach dem Verfahren von Strouhal und Barus behandelt worden; ich glaubte also von diesen Stücken

[1] In acht Monaten. Es sei hier noch bemerkt, dass ich bei den runden Magneten das Dimensionsverhältnis gleich Länge durch Durchmesser genommen habe. Dieses ist dem bei den quadratischen Magneten angegebenen Dimensionsverhältnisse nicht ganz gleichwertig. Schließlich sei erwähnt, dass die Böhler'schen Magnete schon anfangs Mai, die übrigen erst anfangs Juni magnetisiert wurden, dass also hier ein Umstand vorliegt, der die Versuchsbedingungen etwas zu Gunsten der Böhler'schen Magnete zu gestalten scheint. Anderseits war z. B. »Z_{10}« von Zellweger wegen seiner Dicke wieder gegen die dünneren Magnete im Vortheile, wie das aus den Beobachtungen hervorgeht. Alle die kleineren Umstände haben jedoch kaum einen solchen Einfluss um die Reihenfolge in der Gütescala zu ändern.

annehmen zu können, dass sie ein recht constantes Moment aufweisen würden.

Für diese und die noch weiter zu beschreibenden Beobachtungen war die Messung der Temperatur des Magnetes nothwendig. Als solche wurde die Temperatur genommen, welche an einem neben dem Ablenkungsgestelle liegenden Thermometer abgelesen wurde. Die Beobachtungen wurden sodann auf 18° mittelst eines Temperaturcoefficienten reduciert, der allerdings nicht an diesen, sondern an ähnlichen von der gleichen Stahlsorte verfertigten Stücken beobachtet wurde. Für Nr. 5 wurde der Temperaturcoefficient $\mu = 0 \cdot 00018$ und für Nr. 12 $\mu = 0 \cdot 00044$ genommen.

Es ist selbstverständlich, dass bei diesen und den nachfolgenden Beobachtungen auch stets auf die sich ändernde elektromotorische Kraft des Clark'schen Elementes *R* Rücksicht genommen wurde. In der Tabelle XIII sind direct die an der Scala abgelesenen Ablenkungen eingetragen, und zwar sind dieselben auf eine constante Horizontalcomponente, bei welcher der Strom einen Scalenausschlag von 894 Scalentheilen (doppelt), (Temperatur des Elementes 18°) bewirkte, und auf die Temperatur der Magnete von 18° reduciert.

Tabelle XIII.

Datum	Nr. 5	Nr. 12
26./IV. 1898	—	575·2
16./VII. 1898	910·7	574·7
11./X. 1898	910·3	575·4
25./XII. 1898	909·9	575·9
23./III. 1899	910·8	577·0
19./VII. 1899	907·7	575·6
7./VIII. 1899	906·8	575·4
3./X. 1899	906·0	575·5

Nr. 12 blieb in der Zeit vom 26./IV. 1898 bis 3./X. 1899 sehr nahe constant, denn die beiden Endwerte differieren kaum um $0 \cdot 05\%$. Es ist dies ein Zeichen, dass auch die Widerstände und die elektromotorische Kraft des Clark'schen Elementes constant blieben, respective dass ihre Änderung im Verlaufe der Zeit richtig in Anschlag gebracht wurde. Die Constanz von Nr. 12 bedeutet aber auch, dass die Aufstellung des ersten Ablenkungsstativs unverrückt blieb. Allerdings kommen unter den einzelnen Beobachtungen bei Nr. 12 Abweichungen vor, die weit über die Beobachtungsfehler hinausgehen. Namentlich der Wert vom März ist auffallend groß und weicht vom Mittelwert um $0 \cdot 2\%$ ab; ebenso ist der Wert vom Juli 1898 auffallend klein und zeigt ebenfalls eine Abweichung von $0 \cdot 2\%$ nach der anderen Seite, während alle anderen Werte unter sich auf $0 \cdot 1\%$ übereinstimmen. Der hohe Wert vom März tritt übrigens bei allen in diesem Monate gemachten Beobachtungen auf und wir werden auf diesen Umstand noch zurückkommen.

Nr. 5 bleibt zunächst constant und nimmt vom Juli 1899 langsam ab. Die beiden Endwerte zeigen eine Differenz $0 \cdot 5\%$. Wir haben es hier wirklich mit einer Abnahme des Momentes zu thun, nicht aber etwa damit, dass am betreffenden Ablenkungsstativ eine Veränderung vorgefallen wäre. Dies geht aus den weiter unten angeführten Beobachtungen deutlich hervor.

Magnete behandelt nach dem Verfahren von Strouhal und Barus.

Im October 1898 wurde ein Theil der Böhler'schen Magnete, und zwar die in Tabelle I mit $\underline{UI}_{15}$, $\underline{00}_{15}$, $\underline{0}_{15}$, $\underline{45}_{15}$, $\underline{43}_{15}$ ($V = 25$, $S = 6\,mm$) nach dem Verfahren von Strouhal und Barus behandelt und dann der Beobachtung unter gleichen Umständen, wie die früheren, unterworfen. Auch bei diesen Magneten musste, ähnlich wie bei den Normalmagneten, auf die Temperatur Rücksicht genommen werden. Der Temperaturcoefficient wurde den Beobachtungen mit ähnlichen Stäben aus derselben Stahlsorte entnommen. Die Ablenkungen der Magnetometernadel geschahen von dem weiter entfernten Gestelle aus, wie beim Normalmagnet Nr. 5. In der nachfolgenden

Tabelle sind direct die Ablenkungen der Magnetometernadel, ausgedrückt in Scalentheilen, eingetragen. Die Ausschläge beziehen sich wieder, wie bei den Normalmagneten, auf die Temperatur von 18° für das Clark-Element und für die Magnete und auf einen Wert der Horizontalcomponente, bei welchem der Strom einen Ausschlag von 894 Scalentheilen hervorbrachte.

Tabelle XIV.

Datum	UI_{15}	00_{15}	0_{15}	45_{15}	43_{15}
28./X. 1898	929·6	923·2	966·9	877·7	867·6
11./XI. 1898	927·8	922·3	965·4	876·6	866·6
29./XII. 1898	927·5	921·6	966·3	877·0	866·4
14./III. 1899	929·2	923·2	967·7	878·9	868·3
19./VII. 1899	927·6	922·1	965·0	876·8	866·4
3./X. 1899	927·3	922·0	965·1	876·6	866·4

Der erste Wert vom October 1898 wurde gleich nach dem letzten Auskochen beobachtet. Er erscheint bei allen fünf Magneten etwas größer wie die späteren Werte und es hat den Anschein, als ob die Molecularmagnete trotz des Auskochens noch einige Tage unter dem nachwirkenden Einflusse der vorhergegangenen Magnetisierung stehen würden. Ferner sind wieder alle Werte vom März auffallend groß. Die Constanz dieser Magnete muss aber doch als außerordentlich befriedigend angesehen werden, denn es ergeben sich zwischen den Endwerten der Reihe folgenden Differenzen Δ:

	UI_{15}	00_{15}	0_{15}	45_{15}	43_{15}
$\Delta^0/_0$	0·25	0·13	0·19	0·12	0·14

Diese Differenzen wären wahrscheinlich noch kleiner ausgefallen, wenn ich die Beobachtung des ersten Wertes etwa 14 Tage nach dem Auskochen gemacht hätte. Sieht man von den im März beobachteten Werten ab, so geben die oben

angeführten Differenzen überhaupt die größten Abweichungen an, die in den einzelnen Reihen vorkommen.

In Hinsicht der im März beobachteten Anomalie, muss zunächst constatiert werden, dass sich dieselbe bei allen Magneten auch bei den früher angeführten Beobachtungen mit den unausgekochten Magneten vorfindet. Die Beobachtungen im März erstrecken sich auf die Tage vom 14. bis 22. Am 8. März wurde das Element R mit H verglichen und dieser Wert den Reductionen der Märzbeobachtungen zu Grunde gelegt. Das zu dieser Zeit beobachtete Verhältnis zwischen R und H passt ganz gut in den allgemeinen Verlauf desselben in der Zeit vom Juli 1898 bis October 1899 und zeigt keine auffallende Abweichung. Es sei noch bemerkt, dass auch die Temperaturen im März keine abnorme waren und in das gewöhnliche Intervall zwischen 15° und 18° fielen.

Die Ursache der auffallend hohen Märzwerte wäre also entweder darin zu suchen, dass um diese Zeit in der That alle Magnete ein höheres Moment hatten, oder dass die elektromotorische Kraft des Clark'schen Elementes in Wirklichkeit kleiner war, als sie der Rechnung zugrundegelegt wurde. Eine weitere Erklärung dieses Verhaltens wäre auch die, dass vielleicht durch die Lockerung irgend einer Verbindungsstelle vorübergehend der Widerstand des Leitungskreises gesteigert wurde. Ich glaube, dass es immerhin näher liegt, die hohen Werte des März auf diese Weise als durch die Annahme zu erklären, dass alle Magnete in dieser Zeit wirklich ein so viel größeres Moment besessen hatten. Erklärt man aber die Abweichung in dieser Art, so muss man die Märzwerte ausschalten.

Es folgt dann aus vorliegenden Beobachtungen, dass es möglich ist, bei passender Wahl der Stahlsorte Magnetstäbe vom Dimensionsverhältnisse 25, wenn sie nach dem Verfahren von Strouhal und Barus behandelt werden, sogar im Verlaufe des ersten auf die Magnetisierung folgenden Jahres bis auf $0 \cdot 1\%$ constant zu erhalten.

Ein überraschendes Resultat ergibt sich aber, wenn man aus der vorigen Tabelle XIV die Werte vom October, welche 12 Stunden nach dem letzten Auskochen erhalten wurden, und

jene vom März, welche höchstwahrscheinlich mit einem constanten Fehler behaftet sind, auslässt. Es bleiben mir dann nur noch vier Werte für jeden Magnet, die aber doch noch 11 Monate umfassen. Unter diesen Umständen bekommt man die nachstehend verzeichnete Tabelle XIV*a*. Am Schlusse derselben ist unter Δ die größte vorkommende Differenz in Procenten je zweier Beobachtungen eingetragen.

Tabelle XIV*a*.

Datum	UI_{15}	00_{15}	0_{15}	45_{15}	43_{15}
11./XI. 1898	927·8	922·3	965·4	876·6	866·6
29./XII. 1898	927·5	921·6	966·3	877·0	866·4
19./VII. 1899	927·6	922·1	965·1	876·8	866·4
3./X. 1899	927·3	922·0	965·1	876·6	866·4
Δ%	0·054	0·076	0·134	0·045	0·025

Nur bei einem Magnete beträgt die Differenz etwas mehr als 0·1%, sonst bleibt sie weit unter diesem Werte.

Aus diesen Beobachtungen folgt mit großer Wahrscheinlichkeit, dass es möglich ist, bei Magneten eine Constanz des Momentes zu erreichen, wie sie derzeit bei der elektromotorischen Kraft der Normalelemente erreicht worden ist.

Anhang.

Zum Schlusse möchte ich noch einige Bemerkungen über die Güte der untersuchten Stahlsorten anfügen. Die Eigenschaften, welche für die Beurtheilung derselben maßgebend sind, wurden bereits eingangs zusammengestellt. Da steht an erster Stelle die Constanz des Momentes. Es wurde bereits hervorgehoben, dass man im allgemeinen die verschiedenen Verhältnisse unterscheiden muss, unter welchen die Magnete

beim Gebrauche stehen und bei welchen sie möglichst constant erhalten werden sollen. Es sind insbesondere zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder wünscht man, dass die Magnete trotz wiederholter starker mechanischer Erschütterung, oder dass sie bei ruhigem Lagern ihr Moment möglichst unverändert behalten. Der erste Fall wird besonders bei den Apparaten der Technik, der zweite bei physikalischen und erdmagnetischen Instrumenten eintreten. In der vorstehenden Abhandlung sind die Magnete von dem letzteren Gesichtspunkte aus der Beobachtung unterworfen worden und es haben sich von allen untersuchten Magnetstahlsorten zwei Marken »45« und »UI« der Firma Böhler & Cie. als die besten erwiesen. Ihnen sehr nahe steht Marke »43« derselben Firma, dann käme ein Magnet von Zellweger, während eine andere Stahlsorte dieser Fabrik sich als sehr minderwertig erwies.

Zu gleicher Zeit wurde das Verhalten derselben Stahlsorten auch von meinem Schüler, Herrn Carl Krüse,[1] aber unter dem ersten der vorerwähnten beiden Gesichtspunkte geprüft. Er setzte die einzelnen Magnete mehrfachen, jedoch stets den gleichen Erschütterungen aus und beobachtete die hiebei auftretende Abnahme des Momentes; auch brachte er die Magnete vielfach mit Eisenstäben und Eisenplatten in Berührung und untersuchte den Einfluss dieses Vorganges auf die Größe des Momentes. Schließlich bestimmte er die Magnetisierungscurven einiger der untersuchten Stäbe, berechnete hieraus die Coercitivkraft und prüfte darnach den Zusammenhang zwischen der Coercitivkraft und der Abnahme des Momentes unter den geschilderten Umständen. Er bekam als Resultat, dass die Abnahme des Momentes nach Erschütterungen umso größer ausfällt, je kleiner die Coercitivkraft ist. Für eine Reihe von Böhler'schen Magneten war z. B.:

	Magnet				
	0_{15}	00_{15}	UI_{15}	43_{15}	45_{15}
Coercitivkraft	84	76	63	59	57
Abnahme	3·5%	5·4%	5·5%	5·9%	6·7%

[1] Diese Sitzungsber., Abth. IIa., Bd. 109, Jahrg. 1900.

Versuche mit den Magneten 0_{10}, 00_{10}, UI_{10}, 45_{10} ergaben ein ganz gleiches Resultat.

Weniger ausgeprägt ist der Zusammenhang zwischen der Coercitivkraft und der Abnahme des Momentes durch Berührung mit Eisen und Abziehen von einer Eisenplatte.

Will man also die Güte einer Stahlsorte nach der Abnahme des Momentes bei Erschütterungen beurtheilen, so ergibt sich aus den Beobachtungen Krüses für die Böhler'schen Marken die Reihenfolge

»0«, »00«, »UI«, »43«, »45«, .

während meine Beobachtungen für die Güte der Stahlsorten bei ruhigem Lagern die Reihe

»45«, »UI«, »43«, »0«, »00«

ergeben.

Die beiden Reihen laufen zwar nicht ganz entgegengesetzt, jedoch folgt aus ihnen ganz deutlich, dass Magnete, welche sich bei Erschütterungen als besonders gut erweisen, bei ruhiger Lagerung durch längere Zeit die geringste Constanz des Momentes erwarten lassen, was durch das Verhalten des Magnetes Z_r (rund) noch mehr bekräftigt wird. Als weitere Folgerung lässt sich der Satz aussprechen, dass bei ruhiger Lagerung Magnete mit kleiner Coercitivkraft bessere Resultate ergeben, als solche mit großer.

Die größte Constanz des Momentes bei Erschütterungen zeigte nach den Beobachtungen des Herrn Krüse ein auch in dieser Abhandlung mit Z_r (rund) bezeichneter Magnet aus der Fabrik des Herrn Zellweger in Uster bei Zürich. Gerade dieser Magnet aber gab bei meinen Beobachtungen die schlechtesten Resultate.

Bei der Auswahl einer Magnetstahlsorte wird man daher immer die äußeren Umstände berücksichtigen müssen, denen der Magnet beim Gebrauche unterworfen werden soll.

Zu der Beurtheilung der Güte einer Stahlsorte wären schließlich noch die weiteren drei Eigenschaften, welche ich eingangs erwähnt habe, heranzuziehen. Hinsichtlich des specifischen Momentes kamen bei den einzelnen untersuchten

Stücken keine so nennenswerten Unterschiede vor, dass irgend eine Stahlsorte als besonders ausgezeichnet im Verhältnis zu den anderen bezeichnet werden müsste. In Hinsicht des Temperatur- und des Inductionscoefficienten wäre ein Urtheil nur nach weiteren Untersuchungen möglich und ich beschränke mich daher auf die Angabe der Thatsache, dass sich insbesondere die Böhler'schen Magnete Marke »00« bei dem ihnen von der Firma ertheilten Härtegrade durch einen besonders kleinen Temperaturcoefficienten auszeichnen.

Über eine neue Methode zur Bestimmung von Geschossgeschwindigkeiten

von

Dr. **Michael Radaković.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1900.)

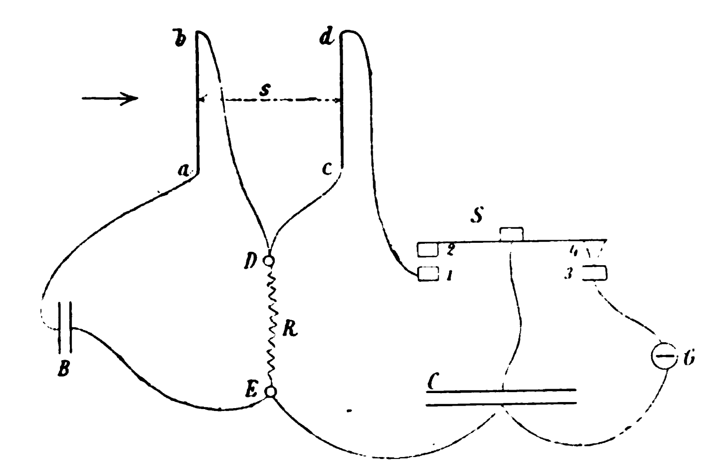
Die Entladung eines Condensators durch einen inductionsfreien Leiter verläuft nach einem gut bekannten Gesetze. Bezeichnet q_0 die Ladung des Condensators in dem Augenblicke des Beginnes der Entladung und q die nach Verlauf der Zeit t noch in dem Condensator enthaltene Elektricitätsmenge, nennt man ferner R den Widerstand der Leitung und C die Capacität des Condensators, so ist der Verlauf der Entladung durch das Gesetz

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{1}$$

gegeben.

Auf Grund dieser Formel hat man mehrfach die Entladung eines Condensators zur Messung kleiner Zeitintervalle benützt. In der That eignet sich dieser Vorgang sehr gut zur Zeitbestimmung in allen jenen Fällen, in welchen es möglich ist, Anfang und Ende des zu messenden Zeitintervalles mit Schließen und Öffnen des Leitungskreises genau in Übereinstimmung zu bringen. Diese Bedingung lässt sich leicht erfüllen, wenn es sich um die Messung der Zeit handelt, welche eine Gewehrkugel zum Durcheilen eines kleinen Weges benöthigt. Ich habe daher versucht, durch Vergleich mit Condensatorentladungen diese Zeit und damit die mittlere Geschwindigkeit des Geschosses auf einer kleinen Strecke seiner Bahn zu bestimmen.

Diese Methode ist, wie ich während der Ausführung der Versuche in Erfahrung brachte, bereits von R. Sabine (Phil. Mag., 5, v. 1, p. 337) in dem Jahre 1876 erwähnt worden. Sabine bestimmte nach derselben die Geschwindigkeit der Kugel einer kleinen Taschenpistole; doch sind die mitgetheilten 16 Beobachtungen untereinander nicht in guter Übereinstimmung. Der größte Unterschied zweier beobachteter Werte beträgt 53 % und die mittlere Abweichung aller Beobachtungen von ihrem Mittelwerte rund 8 % des letzteren. Sabine suchte auch einen Beweis dafür zu erbringen, dass die aus der Formel (1) berechneten Zeitwerte mit den wahren Werten



übereinstimmen, und ließ zu diesem Zwecke Schließen und Öffnen des Entladungskreises durch ein Uhrwerk vollführen, so dass er die aus der Abnahme der Condensatorladung bestimmten Zeiten mit den vom Chronoskope angegebenen vergleichen konnte. Eine derartige Prüfung der Formel erscheint heute nicht mehr nothwendig, da sie vielfach, namentlich bei den Untersuchungen an dem Hiecke'schen Fallapparate, sich bewährt hat.

Man kann zur Bestimmung der Geschossgeschwindigkeit sich der in vorstehender Zeichnung gegebenen Anordnung bedienen. Es bedeuten in derselben *B* das Element, *R* einen größeren bifilar gewickelten Widerstand, *C* den Condensator und *G* ein empfindliches ballistisches Galvanometer. *ab* und *cd*

sind jene Strecken der Leitung, innerhalb welcher die in dem Sinne des Pfeiles fliegende Kugel die Leitungen zerreißen soll. Natürlich empfiehlt es sich, $\overline{ab}$, sowie $\overline{cd}$ durch Gitter zu ersetzen, welche in einer verticalen Ebene je nach dem Caliber des Geschosses so enge gewickelt sind, dass die Kugel mindestens einen Draht sicher durchreißen und damit zwischen $\overline{ab}$, beziehungsweise $\overline{cd}$ die Leitung unterbrechen muss. S endlich ist ein Schlüssel. Drückt man denselben nieder, so dass die Contacte 1 und 2 sich berühren, 3 und 4 aber sich trennen, so liegt der Condensator an dem Elemente und ladet sich zu jenem Potentiale, welches die Enden D und E des Widerstandes R besitzen. Lässt man sodann den Schlüssel S zurückschnellen, so legt sich durch die Berührung der Contacte 3 und 4 der Condensator an das Galvanometer G, und man kann die Anfangsladung q_0 aus der Ausweichung des letzteren bestimmen. Nach diesem Vorversuche drückt man wieder den Schlüssel S nieder und legt den Condensator an die Enden des Widerstandes R an. Nun erfolge der Schuss. Sobald die Kugel die Strecke $\overline{ab}$ durchtrennt, ist das Element von dem Condensator entfernt, und die Entladung verläuft durch R hindurch so lange, bis sie durch Durchreißen des Drahtes auf der Strecke $\overline{cd}$ gehemmt wird. Man lässt sodann den Schlüssel in seine Ruhelage zurückfallen und verbindet hiedurch den Condensator mit dem Galvanometer, dessen Ausschlag die Restladung q misst. Aus den Werten von q_0 und q kann man nun die Zeit t, welche das Geschoss zum Durcheilen der Distanz s der Gitter benöthigte, nach der Formel (1) berechnen und erhält die mittlere Geschwindigkeit des Geschosses auf dem Wege s durch den Quotienten

$$v = \frac{s}{t}.$$

In erster Linie hat man natürlich für eine möglichst vollständige Isolation der Leitungsdrähte zu sorgen, um einen Verlust der Ladungen des Condensators zu verhindern. Aus demselben Grunde empfiehlt sich die Wahl einer schwachen elektromotorischen Kraft und daher die Anwendung eines sehr empfindlichen Galvanometers. Hat man eine bestimmte Distanz s

der beiden Gitter gewählt, so ist damit bei gegebener Geschwindigkeit des Geschosses eine bestimmte zu messende Zeit t festgelegt. Es bleibt nun noch die Wahl der Capacität C und des Widerstandes R übrig. Die erstere ist durch die Empfindlichkeit des Galvanometers mitbestimmt, und man kann immer noch die Größe des Widerstandes derart regeln, dass bei gegebenen Werten der Gitterdistanz und Geschossgeschwindigkeit die Ladung des Condensators in einem vorgegebenen Verhältnisse abnimmt.

Nimmt man an, dass bei der Beobachtung der Werte von Anfangs- und Restladung derselbe Fehler begangen wird, und zwar beidemale in solchem Sinne, dass der Fehler dt in der Bestimmung der Schusszeit t vermehrt wird, dann findet man leicht, dass der procentische Fehler in der Zeitbestimmung $\frac{dt}{t}$ für die Wahl

$$\frac{q}{q_0} = 0\cdot278\ldots$$

ein Minimum wird. Die günstigste Wahl des Widerstandes ist demnach eine solche, dass die Restladung etwas mehr als den vierten Theil der anfänglichen Ladung beträgt.

Die Versuche zur Erprobung der Methode führte ich auf dem Militärschießstande des Berg Isel aus. Ich konnte dies nur dank der gütigen Unterstützung der Herren Prof. Dr. I. Klemenčič und Oberst v. Minarelli thun, welchen ich hiefür aufrichtig verpflichtet bin.

Die Schüsse wurden aus einem gewöhnlichen Infanteriegewehre (Caliber 8 *mm*) abgegeben. Zunächst wurde die Geschossgeschwindigkeit in einer Entfernung von beiläufig 10 *m* von der Mündung des Gewehres bei sieben Schüssen unter verschiedenen Gitterdistanzen bestimmt. Bei den beiden größeren Gitterdistanzen $s = 48\cdot4$ *cm* und $s = 28\cdot6$ *cm* diente als Element ein Accumulator und war die Capacität des Condensators gleich 1·1 Mikrofarad. Bei den beiden kleineren Gitterdistanzen $s = 8\cdot85$ *cm* und $s = 8\cdot5$ *cm* wurde ein Accumulator und zwei Leclanché-Elemente als Batterie verwendet und war die Capacität $C = 0\cdot2$ Mikrofarad. In allen

Fällen war der Widerstand $R = 1354$ Ohm. Es ergaben sich die folgenden Werte der Geschossgeschwindigkeit:

Distanz der Gitter $s = 48 \cdot 4\, cm$	Distanz der Gitter $s = 28 \cdot 6\, cm$	Distanz der Gitter $s = 8 \cdot 85\, cm$, $s = 8 \cdot 5\, cm$
$v = 611 \cdot 2 \frac{m}{sec}$	$v = 598 \cdot 9 \frac{m}{sec}$	$v = 599 \cdot 3 \frac{m}{sec}$
$v = 607 \cdot 6 \frac{m}{sec}$	$v = 633 \cdot 5 \frac{m}{sec}$	$v = 631 \cdot 0 \frac{m}{sec}$
$v = 631 \cdot 4 \frac{m}{sec}$		
Mittelwert	Mittelwert	Mittelwert
$v = 616 \cdot 7 \frac{m}{sec}$	$v = 616 \cdot 2 \frac{m}{sec}$	$v = 615 \cdot 1 \frac{m}{sec}$

Die größte Abweichung zweier beobachteter Werte voneinander beträgt $5 \cdot 6\%_0$ und die mittlere Abweichung der sieben Werte von ihrem Mittelwerte $2 \cdot 2\%_0$. Die Schüsse waren mit gewöhnlichen Patronen abgegeben worden, deren Pulverladung bis zu $2 \cdot 5\%_0$ variiert. Das erste Gitter $\overline{ab}$ war aus $0 \cdot 8\, mm$ dickem Kupferdrahte verfertigt. Es handelte sich nun zunächst darum, die durch die verschiedene Pulvermenge hervorgerufene Ungleichheit der einzelnen Schüsse zu eliminieren und nebenbei zu untersuchen, ob das Durchschlagen des ersten Gitters einen merklichen Geschwindigkeitsverlust des Geschosses bedingt.

Es wurde daher eine zweite Reihe von zehn Schüssen abgegeben, wobei die Pulverladungen der Patronen auf $2 \cdot 75\, g$ abgeglichen wurden. Bei fünf Schüssen war das Gitter $\overline{ab}$ aus $0 \cdot 8\, mm$ dickem, bei den fünf folgenden Schüssen aus $0 \cdot 2\, mm$ dickem Kupferdrahte. Die Distanz der Gitter war im Mittel $29 \cdot 3\, cm$, die Capacität C betrug 1·1 Mikrofarad, der Widerstand R war 594·18 Ohm, und die Batterie bestand aus zwei Accumulatoren. Es ergaben sich die folgenden Werte der Geschossgeschwindigkeit:

	Gitter aus dickem Drahte		Gitter aus dünnem Drahte
1.	$v = 616 \cdot 7 \frac{m}{sec}$	6.	$v = 607 \cdot 8 \frac{m}{sec}$
2.	$v = 616 \cdot 4$ »	7.	$v = 610 \cdot 9$ »
3.	$v = 912 \cdot 2$ » ?	8.	$v = 621 \cdot 2$ »
4.	$v = 625 \cdot 3$ »	9.	$v = 624 \cdot 1$ »
5.	$v = 633 \cdot 7$ »	10.	—

Die Geschwindigkeiten waren an einer Stelle der Bahn des Geschosses, die beiläufig 10 *m* von der Mündung des Gewehres entfernt war, bestimmt.

Der Wert des dritten Schusses ist abnorm groß. Der Grund hiefür dürfte in einem Versuchsfehler zu suchen sein, und zwar wahrscheinlich in dem folgenden:

Es war bei diesem Schusse ein Draht des Gitters $\overline{ab}$ zerrissen und der Nachbardraht, welcher in 5 *mm* Entfernung sich befand, gestreift worden, so dass er an dieser Stelle seine Umspinnung verlor und blank war. Der durchrissene Draht wickelt sich schneckenförmig auf und wird dann, das eine Ende nach oben, das andere nach unten geschlagen. Es dürfte hiebei durch Berührung eines der zerrissenen Enden mit der blanken Stelle des Nachbardrahtes ein Contact stattgefunden haben, wodurch die Schusszeit scheinbar verkleinert, also die Geschwindigkeit vergrößert wurde. Der zehnte Schuss ließ keine Beobachtung zu, da das zweite Glied $\overline{cd}$ nicht durchschossen, sondern die etwas zu locker und zu weit gespannten Drähte von dem Geschosse nur ausgebogen wurden.

Eliminiert man den abnormen Wert des dritten Schusses, so wird der Mittelwert der vier ersten Schüsse $v = 623 \cdot 0 \frac{m}{sec}$ und der der vier letzten Schüsse $v = 616 \cdot 0 \frac{m}{sec}$. Eine Abnahme der Geschossgeschwindigkeit infolge des Durchreißens des dickeren Drahtes lässt sich nicht constatieren. Die größte

Differenz zweier Werte der acht zu zählenden Beobachtungen beträgt $4 \cdot 2\%$, die mittlere Abweichung aller Werte von ihrem Mittelwerte ist 1%.

Die Beobachtungen zeigen eine merkwürdige Eigenthümlichkeit, welche übrigens auch bei den Beobachtungen der ersten Reihe bereits angedeutet ist. Die Schüsse wurden in der bezeichneten Reihenfolge abgegeben und folgten ziemlich schnell aufeinander; nur zwischen dem fünften und sechsten Schusse verfloss eine erhebliche Zeit, welche zum Auswechseln der dicken Drähte des ersten Gitters gegen die dünnen benöthigt war. Es steigt nun die Geschwindigkeit des Geschosses mit den abgegebenen Schüssen; sie fällt sodann nach der längeren Pause wieder ab, um neuerdings in ähnlichem Maße wieder zu steigen. Leider versagte der zehnte Schuss. Vergleicht man die vier ersten Schüsse vor der Pause mit den vier ersten Schüssen nach der Pause, so erkennt man ein Ansteigen der Geschwindigkeit in dem ersten Falle um $1 \cdot 3\%$, in dem zweiten um $2 \cdot 5\%$.

Vielleicht kann man den Grund dieser Erscheinung in der Erwärmung des Gewehrlaufes und der hiedurch bewirkten Abnahme der Reibung suchen.

Die dargelegte Methode dürfte durch die folgenden Vorzüge besonders ausgezeichnet sein. Es wird die Bewegung des Geschosses auf einem kleinen Wegstücke gemessen durch die Entladung eines Condensators, so dass keinerlei träge Massen, weder mechanische, noch magnetische, bei dem als Vergleich dienenden Vorgange bewegt werden. Die Bestimmung der Anfangs- und Endladung geschieht getrennt hievon vor und nach dem Schusse. Die außerordentliche Schnelligkeit des elektrischen Vorganges ermöglicht es, die Distanz der Gitter sehr klein zu wählen. Ich bin bis $8 \cdot 5$ *cm* herabgegangen.

Es dürfte überflüssig sein, die mittlere Geschwindigkeit des Geschosses auf einem noch kleineren Stücke seiner Bahn zu bestimmen, obwohl einem solchen Versuche theoretisch nichts im Wege steht; man hat dann nur für eine sehr exacte Messung der Gitterdistanz zu sorgen. Endlich liegt ein Vortheil der Methode darin, dass man in der Capacität und dem

Widerstande zwei Größen zur Verfügung hat, deren Wahl es ermöglicht, sich den durch die Gitterdistanz und die Geschossgeschwindigkeit gegebenen Bedingungen in der günstigsten Weise anzupassen.

Nachtrag.

Die mitgetheilten Beobachtungen sind ohne jede Correction berechnet und daher nur relativ zu einander, nicht aber ihrer absoluten Größe nach richtig. Die Fortführung der Versuche, über welche ich noch ausführlicher mittheilen zu können hoffe, beschäftigten sich mit der Untersuchung der Geschossgeschwindigkeiten in der Umgebung der Mündung des Gewehres. Sie ergaben neuerdings die Verwendbarkeit der Methode.

In einer Entfernung von 10·5 *m* vom Gewehre ist nach einer Reihe von zehn Beobachtungen bei einer Gitterdistanz von 98·3 *cm* und unter Berücksichtigung aller Correctionen (Reduction der Ausschläge auf die Scalendistanz, Aichung des Condensators in absolutem Maße u. s. w.) die Geschwindigkeit gleich $598\cdot4\ \frac{m}{\text{sec.}}$. Das Mittel aus den Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von ihrem Mittelwerte ist hiebei $4\cdot35\ \frac{m}{\text{sec.}}$ oder rund $0\cdot7\%$.

Über Atommagnetismus und Molecularmagnetismus

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. März 1900.)

Im Anschlusse an die unlängst veröffentlichten Bestimmungen der Magnetisierungszahlen anorganischer Verbindungen[1] habe ich nunmehr noch specielle Untersuchungen für Kupferverbindungen durchgeführt. Sie waren erforderlich, weil, wie ich schon damals hervorhob,[2] beim Kupfer die Verhältnisse nicht ganz klargestellt erschienen und wenn auch spurenweise Beimengungen, insbesondere von Nickel, sich spectrisch fast in allen Verbindungen des Kupfers nachweisen lassen dürften, es doch schwer fällt, diese allein zur Erklärung des auffälligen paramagnetischen Charakters vieler Kupferverbindungen heranzuziehen. Dazu kommt noch, dass schon G. Wiedemann die Ansicht vertreten hatte, dass Cupro- und Cuprisalze sich in ihrem magnetischen Wesen unterscheiden,[3] was sich allerdings, wie ich im folgenden zeigen werde, nicht allgemein bestätigt hat.

In der oben citierten Abhandlung habe ich bereits darauf hingewiesen,[4] dass bei einzelnen diamagnetischen Verbindungen

---

[1] Diese Sitzungsber., 108 (II. a), S. 861.

[2] L. c. S. 880.

[3] G. Wiedemann, Pogg. Ann., 126, S. 1 (1865) und 135, S. 177 (1868); auch Herr J. Königsberger hat hierauf neuerdings Ann. d. Phys., I, S. 175 (1900) aufmerksam gemacht.

[4] L. c. S. 882.

der Molecularmagnetismus eine größere Diamagnetisierungszahl liefert, als der Summe der Atommagnetismen entspricht, und zwar dann, wenn in der Verbindung eine erhebliche Volumdilatation eintritt, wie bei AgJ, HgJ_2, PbJ_2. Es lag nahe, zu untersuchen, ob sich diese Verhältnisse auch umkehren, das heißt welchen Einfluss Volumcontractionen bei der Verbindung haben, wozu sich die Salze des Kupfers mit seinem besonders kleinen Susceptibilitätscoëfficienten besonders eignen.

In der folgenden Tabelle sind zunächst die Magnetisierungszahlen und Hilfsgrößen, nach der von mir für Pulver bisher benützten Methode bestimmt,[1] in der früher angewendeten Bezeichnung angeführt. Die Substanzen sind alle, wo nichts anderes bemerkt ist, aus dem nahezu absolut reinen Kupfer, das ich der Freundlichkeit des Herrn E. Murmann verdanke und das derselbe zur Atomgewichtsbestimmung verwendet hatte, gewonnen. Sie wurden zum Theile von Herrn A. Nabl im hiesigen III. chemischen Laboratorium in bereitwilligster Weise mit ganz besonderer Sorgfalt hergestellt und danke ich demselben an dieser Stelle bestens für seine Bemühungen. Mit Rücksicht auf die geringen mir zur Verfügung stehenden Mengen der Substanzen sind die Angaben des k für Cu_2Br_2 und Cu_2J_2 etwas weniger genau als die der anderen Salze, ohne dass dadurch der allgemeine Überblick über ihr magnetisches Wesen leidet. Die Messungen sind alle bei 17° bis 18° C. gemacht. Einige Salze, die an der Luft basisch werden, wurden in mit einem Stöpsel verschlossenen Gläschen untersucht.[2]

[1] Diese Sitzungsber., 108 (II.a), S. 172.

[2] Vergl. l. c., 108 (II.a), S. 865.

Tabelle 1.

Substanz	μ	g	a	g. m.	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$
$CuCl_2$	134·6	0·538	891	6·7	+0·2891	+1·015	+0·153
$CuBr_2$ (Merck)	223·5	2·624	2509	11·2	+0·204	+6·13	+0·546
Cu_2Br_2.......	287·2	0·373	1505	5·2	—0·0049	—0·250	—0·048
Cu_2J_2........	381	0·167	675	1·8	—0·0035	—0·180	—0·102
CuO (Merck)..	79·6	0·981	934	11·7	+0·0986	+2·90	+0·247
Cu_2O (Merck) .	143·2	1·733	1650	11·5	+0·0416	+1·21	+0·105
CuS.........	95·3	0·3107	599	6·3	—0·0025	—0·091	—0·015
Cu_2S	159·3	2·935	2665	16·7	—0·0115	—0·388	—0·023
Cu_6P_2 [1]......	442	1·341	3100	7	—0·009	—0·40	—0·057
$CuSO_4$.......	159·7	0·374	672	4·2	+0·184	+6·72	+1·60
Cu_2Se	206·3	3·393	3082	14·5	—0·0135	—0·450	—0·031

Man ersieht aus diesen Zahlen, dass an einem principiellen Unterschiede zwischen Cupro- und Cupriverbindungen im Sinne G. Wiedemanns nicht festgehalten werden kann, da CuS (dasselbe war frei von Cu_2S und von S) und Cu_2S gleicherweise diamagnetisch sind. Hingegen ist bei der Art der Darstellung aus gleichem absolut reinen Materiale nicht daran zu denken, dass der Paramagnetismus hier überall von Verunreinigungen herrühren könnte.

Um Einblick in den Zusammenhang mit dem Molecular-, beziehungsweise Atomvolumen zu erhalten, habe ich ähnlich, wie dies in der oben erwähnten Abhandlung geschehen ist, die Atom-,[2] beziehungsweise Molecularmagnetismen mit diesen Größen zusammengestellt. In der Tabelle 2 bedeuten μ das Moleculargewicht, γ die Dichte, α das Molecularvolumen der Verbindung, $\Sigma\alpha_e$ die Summe der Atomvolumina, Σk_e die Summe der Atommagnetismen der die Verbindung bildenden Elemente und k den direct gefundenen Wert der Molecularsusceptibilität.

---

[1] Dieses Kupferphosphid wurde l. c. S. 869 irrthümlich als Cu_3P_2 angenommen, die Angaben für p und somit auch k sind hier wegen zu geringer Menge nicht sehr genau.

[2] L. c. S. 883.

Dabei sind für die Atommagnetismen der Elemente diejenigen Zahlen zugrunde gelegt, die ich in der Tabelle der citierten Abhandlung S. 986 zusammengestellt habe.

Das ≷-Zeichen vor dem Werte von $\Sigma\alpha_e$ deutet Volumcontraction, beziehungsweise Dilatation bei der Verbindung an; wo die Unterschiede gering sind, habe ich außerdem noch ein Gleichheitszeichen beigefügt.

Tabelle 2.

Substanz	μ	γ	α	$\Sigma\alpha_e$	$k.10^6$	$\Sigma k_e.10^6$
$CuCl_2$	134·6	3·05	44·1	$<$ 48·9	+0·153	$>$ −0·046
$CuBr_2$	223·5	—	—	$<$ 60·9	+0·546	$>$ −0·072
Cu_2Br_2	287·2	4·72	60·9	$<$ 64·2	−0·048	$>$ −0·078
Cu_2J_2	381	4·41	86·2	$>$ 65·4	−0·102	$<$ −0·092
CuO	79·6	6·40	12·4	$<$ 15·1	+0·247	—
Cu_2O	143·2	5·88	24·4	≧ 22·2	+0·105	—
CuS	95·6	3·98	24·0	≧ 22·3	−0·015	≧ −0·017
Cu_2S	159·2	5·58	28·5	≦ 29·4	−0·023	= −0·023
Cu_6P_2	442	6·6	67·0	≦ 69·6	−0 057	≦ −0·050
$CuSO_4$	159·7	3·58	44·6	$<$ 87·1	+1·60	$>$ —
Cu_2Se	206·3	6·49	31·8	≧ 30·6	−0·031	≧ −0·037

Vor den Zahlen für Σk_e habe ich gleichfalls noch Ungleichheitszeichen angebracht, die anzeigen, ob der Molecularmagnetismus der Verbindung gegenüber der Summe der Atommagnetismen wächst oder abnimmt.

Es lässt sich unmittelbar daraus entnehmen, dass überall, wo erhebliche Volumcontraction eintritt, der Molecularmagnetismus vergrößert wird, so weit, dass sogar Paramagnetismus entstehen kann, wo hingegen Dilatation eintritt, die Diamagnetisierungszahl steigt. Wo die Unterschiede zwischen $\Sigma\alpha_e$ und α klein sind, da sind auch diejenigen von Σk_e und k so gering, dass sie als innerhalb der Fehlergrenzen liegend betrachtet werden müssen.

Es ist beachtenswert, dass, wie in letzter Zeit wieder von Herrn J. Königsberger und den Herren A. P. Wills und

O. Liebknecht gezeigt wurde, auch in Lösungen der paramagnetische Charakter paramagnetischer Kupfersalze erhalten bleibt, was darauf schließen lässt, dass der Binnendruck der Verbindung hier trotz der Dissociation weiter besteht.

Gleichwohl ist es vorläufig wenigstens durchaus noch nicht möglich, aus den an Lösungen gewonnenen Resultaten direct auf die Susceptibilität trockener Salze[1] oder diejenige der enthaltenen Elemente zu schließen, und es scheinen die Herren H. du Bois und O. Liebknecht den Zweck meiner bisherigen Untersuchungen völlig missverstanden zu haben, wenn sie in ihren letzten Mittheilungen[2] ihre Methode der unmagnetischen Lösungen für erheblich einfacher, leichter ausführbar und genauer gegenüber der Methode mittels der Wage empfehlen. Mir handelte es sich ja eben darum, den Magnetismus der trockenen Substanzen direct zu bestimmen, da der Einfluss eines Lösungsmittels noch nicht genau festgestellt ist. Außerdem ist die Methode des Herrn du Bois nur auf relativ stark paramagnetische Lösungen beschränkt und auf schwach paramagnetische oder diamagnetische Körper nicht in einfacher Weise anwendbar, was bei einer einheitlichen Untersuchung der verschiedensten Substanzen diese Methode ausschließt.

Auch der Fußnote der zuletzt genannten Herren,[3] dass eine einzige diamagnetische Bestimmung eines Metalles seine Stellung entscheidet, kann ich nicht unbedingt zustimmen. Es wäre nach der constatierten Abhängigkeit der Susceptibilität vom Volumen ganz wohl denkbar, dass schwach magnetische Elemente das einemal krystallisiert, das anderemal amorph, auch qualitativ verschiedene Resultate ergeben könnten. Insbesondere möchte ich daher das von mir früher an sehr reinen Magnesiumkrystallen gewonnene Resultat noch nicht als ausschlaggebend für Magnesium überhaupt ansehen. Auch deuten die auffallenden Resultate der Herren Howard und Seckelson an elektrolytisch niedergeschlagenen Metallen, worauf Herr

---

[1] Im großen und ganzen hat sich bisher allerdings in dieser Hinsicht Übereinstimmung ergeben.

[2] H. du Bois und O. Liebknecht, Ann. d. Phys., I, S. 198 und Verh. der deutschen phys. Gesellsch., 2, S. 19 (1900).

[3] Ann. d. Phys., I, S. 196 (1900).

Königsberger kürzlich aufmerksam gemacht hat,[1] und ebenso die Existenz der Faraday'schen Magnetkrystallkraft auf den außerordentlich großen Einfluss der Structur der Substanz.

In erster Linie empfiehlt es sich jedenfalls, um eine wohldefinierte Zahl für die Atomsusceptibilität zu erhalten, an isotropem Materiale, und zwar an den Elementen selbst Messungen zu machen.

Bezüglich der Bestimmbarkeit von Atommagnetismen aus Molecularmagnetismen kann man nach meinen Ergebnissen unsere Kenntnis in die folgenden Sätze zusammenfassen:

Wo in Verbindungen Volumcontraction eintritt, steigt der paramagnetische, wo Dilatation entsteht, der diamagnetische Charakter der Substanz.

Rückschlüsse auf das magnetische Wesen der Elemente können daher nur aus solchen Verbindungen gezogen werden, deren Molecularvolumen sich additiv aus den Atomvolumen zusammensetzt, insolange eine präcise Formulierung der Abhängigkeit der Susceptibilität von Binnendruck und Volumen nicht gefunden ist.

[1] J. Königsberger, Ann. d. Phys., I, S. 177 (1900).



SITZUNGSBERICHTE

DER

AISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

THÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XII. SITZUNG VOM 3. MAI 1900.

Erschienen: Denkschriften, 68. Band (1900). — Monatshefte für Chemie. Bd. 20, Register (1899); Bd. 21, Heft III (März 1900).

Von dem am 9. April d. J. in Innsbruck erfolgten Ableben des wirklichen Mitgliedes der philosophisch-historischen Classe, Herrn Hofrathes Dr. Friedrich Maassen, wurde bereits in der Gesammtsitzung vom 26. April Mittheilung gemacht und dem Beileide der Akademiker Ausdruck gegeben.

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt eine Arbeit von Herrn Prof. Hans Gallasch in Prag vor, betitelt: »Die Construction der Isophoten an Kegelflächen zweiten Grades«.

Herr J. v. Pallich, Assistent am physikalischen Institute in Graz, übersendet folgende Mittheilung über eine einfache Modification des Wehnelt'schen Unterbrechers.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Zd. H. Skraup in Graz übersendet zwei im chemischen Institute der Universität Graz verfasste Abhandlungen:

1. »Über α- und β-Isocinchonin«, von Zd. H. Skraup und R. Zwerger.
2. »Zur Constitution des β-Isocinchonins«, von Zd. H. Skraup, mit experimentellen Beiträgen von H. Copony und G. Medanich.

Versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität sind eingelaufen:

I. Von Herrn Emil Pilous in Wien, mit der Aufschrift »Neue Elektricitätsgewinnung unmittelbar aus Wärme«;

II. von Herrn Raimund Nimmführ in Wien, mit der Aufschrift: »Theorie und Beschreibung der neuen Einmann-Flugmaschine ‚Aërocykles'«;

III. von Herrn Victor Lederer in Reichenberg, mit der Aufschrift: »Kalender-Reform«.

Der Secretär nimmt die Eröffnung eines am 14. Juli 1898 von Herrn Dr. Ludwig Mach, dz. in Berlin, behufs Wahrung der Priorität hinterlegten Schreibens vor, dessen Inhalt folgende zwei Mittheilungen bilden:

I. »Über die Herstellung von Gläsern mit besonderen optischen Eigenschaften im elektrischen Schmelzofen«, von Dr. Ludwig Mach.

II. »Über die Herstellung schlieren- und blasenfreier Glasflüsse im Siemens'schen Ofen«, von Dr. Ludwig Mach.

Das w. M. Herr Prof. G. Ritter v. Escherich legt vor Heft 2/3 des II. Bandes der von den Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebenen »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Wiesner legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Untersuchungen über den Lichtgenuss der Pflanzen im arktischen Gebiete« (Photometrische Untersuchungen auf pflanzenphysiologischem Gebiete. III.).

Das w. M. Herr Director Prof. F. Brauer legt folgende Mittheilung von stud. med. Josef Bischof vor, betitelt: »Vorläufige Charakteristik einiger neuen Gattungen von Muscarien«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Lieben legt eine Arbeit von den Herren Otto Bleier und Leopold Kohn aus dem II. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien vor, betitelt: »Über die Moleculargröße und Dampfdichte des Schwefels«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Baratta M., Materiali per un catalogo dei fenomeni sismici avvenuti in Italia, II (1800—1872). Roma, 1897. 8°.

Foveau de Courmelles, Dr., L'Électricité et ses applications. Avec 42 figures dans le texte. Paris, 1900. 8°.

Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin, Geschichte der königl. preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Im Auftrage der Akademie bearbeitet von Adolf Harnack. I. Band, 1. und 2. Hälfte, II. Band, III. Band. Berlin, 1900. Groß 8°.

University of California, The international competition for the Phoebe Hearst architectural plan for the university of California.

XIII. SITZUNG VOM 10. MAI 1900.

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt eine Abhandlung von Herrn k. u. k. Oberst d. R. Ludwig v. Roskiewicz in Wien vor, betitelt: »Das Wiener Becken».

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Über einen Satz von Dirichlet«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung des Herrn Dr. H. Mache vor: »Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricicität. V. (Beobachtungen in Indien und Oberägypten.)«

Das w. M. Herr k. u. k. Intendant Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung des Herrn Friedrich Siebenrock, Custos am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, betitelt: »Der Zungenbeinapparat und Kehlkopf sammt Luftröhre von *Testudo calcarata* Schneid.«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Prof. Dr. K. Natterer: »Chemische Untersuchung von Wasser- und Grundproben, welche Regierungsrath Prof. J. Luksch gesammelt hat«, als ein Ergebnis der in den Jahren 1897 und 1898 stattgefundenen Expedition S. M. Schiffes »Pola« in der südlichen Hälfte des Rothen Meeres.

XIV. SITZUNG VOM 17. MAI 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. I, Heft VIII bis X (October bis December 1899).

Das Ministère du Commerce, de l'Industrie, des Postes et des Télégraphes in Paris übersendet eine Mittheilung über die Verhandlungsgegenstände des in Paris am 1. bis 10. October 1900 stattfindenden Internationalen Congresses für Botanik, sowie die Einladung zur Theilnahme an demselben.

Das Curatorium der k. k. zoologischen Station in Triest dankt für die geschenkweise Überlassung einer Reihe von reclamierten fehlenden Bänden der Sitzungsberichte an die dortige Bibliothek.

Das c. M. Herr Prof. J. v. Hepperger in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1845 und 1846«.

Das c. M. Herr Hofrath A. Bauer übersendet zwei im Laboratorium für allgemeine Chemie der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeiten, und zwar:

I. »Zur Kenntnis der Überwallungsharze« (VI. Abhandlung), von Max Bamberger und Emil Vischner.
II. »Über das Vorkommen von freiem Erythrit in der *Trentepohlia Jolithus*«, eine vorläufige Mittheilung von Max Bamberger und A. Landsiedl.

Das w. M. Herr Director F. Brauer überreicht eine Abhandlung des c. M. Herrn Directors Theodor Fuchs: »Über

die bathymetrischen Verhältnisse der sogenannten Eggenburger und Gauderndorfer Schichten des Wiener Tertiärbeckens«.

Herr Prof. Dr. C. Diener überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn K. Bogdanowitsch in St. Petersburg verfasste Abhandlung: »Ein Beitrag zur Geologie der Westküste des Ochotskischen Meeres«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Arbeit des Herrn Dr. H. Benndorf vor: »Notiz über die photoelektrische Empfindlichkeit des Eises«.

Das w. M. Herr Director E. Weiß legt eine Abhandlung von Herrn Dr. A. Schobloch vor, welche den Titel führt: »Zur Statistik der Kometenbahnen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

K. k. Österreichisches General-Commissariat, Weltausstellung Paris 1900. Katalog der österreichischen Abtheilung. Hefte 1, 3, 4*a*, 4*b*, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Wien, 8°.

Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1845 und 1846

von

J. v. Hepperger,
c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Mai 1900.)

Das Interesse, welches die Astronomen der Wiederkehr des Biela'schen Kometen im Jahre 1845 entgegenbrachten, erfuhr eine wesentliche Steigerung durch die im Jänner 1846 gemachte Wahrnehmung von dem Vorhandensein zweier Kometen, deren Kerne im weiteren Verlaufe der Erscheinung höchst eigenthümliche Änderungen der Intensität ihres Lichtes aufwiesen und spiegelt sich auch in der großen Zahl von Beobachtungen, welche über Lage, Gestalt und Helligkeit dieser Gestirne gemacht worden sind. Bedeutungsvoll ist auch die Änderung, welche die Gestalt des Kometen, wahrscheinlich infolge der besonders geringen Stabilität seines Baues, von einer Wiederkehr zur anderen erlitt. Im Jahre 1805 war der Komet vollständig rund; trotz der großen Erdnähe konnte keine Spur eines Schweifes entdeckt werden. Im Jahre 1832 fiel nur die excentrische Stellung des Kernes in der Coma auf, von einem Schweife war auch nichts zu sehen. Im Jahre 1846 jedoch wurde nicht nur mit überlegenen optischen Hilfsmitteln, sondern auch mit denselben Instrumenten, welche bei der vorausgegangenen Erscheinung des Kometen in Verwendung standen, ganz deutlich an beiden Kometen je ein von der Sonne abgekehrter (am Hauptkometen überdies noch ein zweiter) Schweif wahrgenommen. Die Länge dieser Schweife wird sehr verschieden angegeben, scheint jedoch 45′ nicht viel überstiegen

zu haben. Die Figur des Kopfes des Hauptkometen erschien nicht mehr rund, sondern unregelmäßig geformt.

Hubbard hat in seiner schönen Arbeit über den Biela'schen Kometen die Erscheinung desselben im Zeitraume 1845 bis 1846 mit der folgenden im Jahre 1852 durch Berechnung der Störungen seitens aller damals bekannten großen Planeten in Verbindung gebracht und zwei Systeme von Elementen aufgestellt, welche sämmtlichen Beobachtungen in fast gleicher Weise genügen. Das eine hievon beruht auf der Hypothese, dass der im Jahre 1846 im allgemeinen viel hellere Komet B_I, welcher früher durch das Perihel gieng und durchwegs die größere Rectascension besaß, daher dem anderen B_{II} folgte, im Jahre 1852 vorangieng, während das zweite System die entgegengesetzte Identificierung der Componenten des Doppelkometen zur Voraussetzung hat. In dem Schlussartikel (Astron. Journal, Vol. VI, Nr. 20) lässt Hubbard beide Hypothesen als gleichberechtigt erscheinen, da die Helligkeitsverhältnisse zu Gunsten der zweiten Hypothese sprechen, wogegen in einem früheren Aufsatze (Vol. V, Nr. 24) die erste Hypothese mit Rücksicht auf die Änderungen der Distanz beider Kerne als wahrscheinlicher hingestellt wird. Glücklicherweise ist es für die Bildung der Normalörter ziemlich gleichgiltig, welches der beiden Elementensysteme der mit den Beobachtungen zu vergleichenden Ephemeride des Kometen zugrundegelegt wird.

Da ich zur Zeit, als ich die einschlägigen Rechnungen begann, nur Vol. VI zur Verfügung hatte, entschied ich mich für das der zweiten Hypothese entsprechende System, das, auf den Pariser Meridian bezogen, für B_I folgendermaßen lautet:

1846 Febr. 11·0 M. Z. Paris

$M = 0° \; 0' \; 0''382$

$\Pi = 109 \; 2 \; 54·11$
$\Omega = 245 \; 54 \; 20·93$ } mittleres Äquinox 1846·0
$i = 12 \; 34 \; 52·97$

$\varphi = 49 \; 10 \; 2·74$

$\mu = 537''49648.$

Die durch Mercur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus verursachten Störungen der Elemente (Osculationsepoche = 1846 Febr. 11·0) sind in der nächsten Tafel enthalten.

12h M. Z. P.	ΔM	Δμ	ΔΠ	ΔΩ	Δi	Δφ
1845 Dec. 17	—0°856	+0°0190	—2°07	+1°47	—0°11	—1°87
19	— 834	193	—2·19	1·35	— 6	—1·94
21	— 816	197	—2·28	1·24	— 1	—2·01
23	— 799	202	—2·35	1·14	+ 4	—2·07
25	— 782	207	—2·40	1·06	9	—2·13
27	— 765	212	—2·43	99	13	—2·18
29	— 746	217	—2·43	93	17	—2·23
31	— 724	221	—2·42	89	21	—2·27
1846 Jänner 2	— 696	225	—2·41	85	24	—2·31
4	— 663	228	—2·38	82	26	—2·33
6	— 625	229	—2·34	80	28	—2·33
8	— 582	229	—2·29	79	30	—2·32
10	— 534	227	—2·23	79	31	—2·29
12	— 484	224	—2·17	79	32	—2·26
14	— 432	220	—2·10	79	32	—2·21
16	— 378	214	—2·02	79	32	—2·14
18	— 324	206	—1·93	78	32	—2·06
20	— 270	196	—1·82	77	31	—1·96
22	— 218	186	—1·71	76	29	—1·85
24	— 169	174	—1·59	74	27	—1·72
26	— 124	160	—1·46	71	25	—1·58
28	— 83	145	—1·32	67	22	—1·42
30	— 47	129	—1·16	61	19	—1·25
Febr. 1	— 17	110	— 99	54	16	—1·07
3	+ 4	90	— 81	46	13	— 87
5	+ 16	68	— 61	36	10	— 66
7	+ 19	45	— 40	24	6	— 43
9	+ 12	+ 20	— 18	+ 11	+ 2	— 19
11	— 6	— 7	+ 6	— 4	— 1	+ 7
13	— 37	— 35	32	— 20	— 4	34
15	— 83	— 66	59	— 38	— 8	62
17	— 145	— 98	87	— 58	— 11	92
19	— 222	— 131	1·17	— 79	— 14	1·23
21	— 315	— 167	1·49	—1·02	— 17	1·55
23	— 426	— 204	1·83	—1·27	— 20	1·89

12h M. Z. P.	ΔM	Δμ	ΔΠ	ΔΩ	Δi	Δφ
1846 Febr. 25	—0°556	—0°0242	+2°18	—1°52	—0°23	+2°24
27	— 707	— 283	2·55	—1·79	— 25	2·60
März 1	— 878	— 325	2·94	—2·08	— 27	2·97
3	—1·071	— 368	3·35	—2·38	— 29	3·35
5	—1·287	— 413	3·78	—2·68	— 31	3·74
7	—1·524	— 458	4·22	—3·00	— 32	4·13
9	—1·782	— 505	4·69	—3·33	— 33	4·53
11	—2·059	— 552	5·17	—3·67	— 34	4·93
13	—2·360	— 599	5·68	—4·01	— 34	5·32
15	—2·683	— 646	6·20	—4·35	— 34	5·70
17	—3·022	— 692	6·74	—4·70	— 33	6·08
19	—3·376	— 737	7·29	—5·04	— 33	6·44
21	—3·741	— 781	7·84	—5·37	— 32	6·77
23	—4·110	— 822	8·40	—5·70	— 31	7·08
25	—4·482	— 860	8·96	—6·01	— 30	7·37
27	—4·855	— 895	9·51	—6·30	— 28	7·62
29	—5·228	— 928	10·04	—6·57	— 27	7·84
31	—5·598	— 957	10·56	—6·82	— 25	8·03
April 2	—5·962	— 984	11·06	—7·04	— 23	8·19
4	—6·320	— 1008	11·54	—7·25	— 22	8·34
6	—6·672	— 1030	11·99	—7·43	— 20	8·46
8	—7·019	— 1050	12·42	—7·59	— 18	8·56
10	—7·361	— 1068	12·82	—7·74	— 17	8·65
12	—7·700	— 1084	13·20	—7·88	— 15	8·73
14	—8·037	— 1100	13·56	—8·00	— 14	8·80
16	—8·372	— 1115	13·90	—8·10	— 12	8·87
18	—8·707	— 1129	14·21	—8·20	— 11	8·94
20	—9·041	— 1142	14·50	—8·28	— 10	9·00
22	—9·377	— 1155	14·78	—8·36	— 9	9·06
24	—9·715	—0·1167	+15·04	—8·43	—0·08	+9·12

Die oben angeführten Beträge sind aus Elementen gerechnet, welche unter Annahme einer Acceleration der täglichen Bewegung von 0°0564 per Umlauf und einer empirischen Correction von Π durch fortgesetzte Addition der Störungen aus dem Systeme I (»Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen«, diese Sitzungsber., Bd. CVII, Abth. II. a., März 1898) hervorgegangen sind und für 1846 einen zwischen den beiden Kometenkernen gelegenen Ort ergeben.

Sonnen-Coordinaten nach Leverrier.

Mittleres Äquinox 1846·0.

12h M. Z. P.			L			B	log R
1845	December	17.....	265°	59'	18"25	—0"75	9·9928695
		19.....	268	1	29·82	— 71	8159
		21.....	270	3	44·19	— 58	7722
		23.....	272	6	1·22	— 37	7372
		25.....	274	8	20·56	— 10	7103
		27.....	276	10	41·65	+ 15	6903
		29.....	278	13	3·67	31	6776
		31.....	280	15	25·61	34	6693
1846	Jänner	2.....	282	17	46·66	22	6689
		4.....	284	20	6·22	+ 1	6767
		6.....	286	22	23·94	— 22	6938
		8.....	288	24	39·79	— 46	7209
		10.....	290	26	53·71	— 65	7588
		12.....	292	29	5·81	— 75	8077
		14.....	294	31	16·16	— 76	8675
		16.....	296	33	24·86	— 70	9381
		18.....	298	35	31·95	— 53	9·9930188
		20.....	300	37	37·38	— 31	1088
		22.....	302	39	40·99	— 4	2071
		24.....	304	41	42·46	+ 20	3124
		26.....	306	43	41·13	33	4236
		28.....	308	45	36·10	32	5400
		30.....	310	47	26·44	+ 17	6618
	Februar	1.....	312	49	11·49	— 6	7896
		3.....	314	50	50·77	— 31	9243
		5.....	316	52	24·12	— 53	9·9940667
		7.....	318	53	51·46	— 68	2173
		9.....	320	55	12·90	— 75	3767
		11.....	322	56	28·50	— 73	5448
		13.....	324	57	38·48	— 62	7216
		15.....	326	58	43·01	— 42	9066
		17.....	328	59	42·27	— 18	9·9950990
		19.....	331	0	36·28	+ 6	2980
		21.....	333	1	25·03	26	5021
		23.....	335	2	8·07	34	7097
		25.....	337	2	44·82	28	9195
		27.....	339	3	14·47	+ 9	9·9961317

12h M. Z. P.			L	B	log R
1846	März	1.....	341° 3' 36"34	−0"17	9·9963458
		3.....	343 3 49·92	— 43	5627
		5.....	345 3 54·93	— 64	7832
		7.....	347 3 51·30	— 76	9·9970079
		9.....	349 3 39·17	— 80	2369
		11.....	351 3 18·68	— 76	4708
		13.....	353 2 50·07	— 61	7096
		15.....	355 2 13·75	— 40	9530
		17.....	357 1 30·10	— 15	9·9982007
		19.....	359 0 39·39	+ 6	4515
		21. ...	0 59 41·83	22	7042
		23.....	2 58 37·35	23	9573
		25.....	4 57 25·66	+ 12	9·9992093
		27.....	6 56 6·14	— 12	4594
		29.....	8 54 38·20	— 39	7074
		31.....	10 53 1·40	— 65	9536
	April	2.....	12 51 15·45	— 83	0·0001982
		4.....	14 49 20·27	— 94	4420
		6.....	16 47 15·99	— 95	6856
		8.....	18 45 2·77	— 87	9293
		10.....	20 42 40·98	— 69	0·0011735
		12.....	22 40 11·02	— 46	4184
		14.....	24 37 33·49	— 22	6637
		16.....	26 34 48·92	— 2	9087
		18.....	28 31 57·72	+ 8	0·0021522
		20.....	30 29 0·13	+ 5	3928
		22.....	32 25 56·13	— 11	6292
		24.....	34 22 45·41	−0·37	0·0028601

Aus diesen Sonnenörtern und den mit Berücksichtigung der Störungen gerechneten heliocentrischen Coordinaten des Kometen wurden nun die geocentrischen Coordinaten, zunächst Länge, Breite und Radiusvector, dann Rectascension und Declination abgeleitet und hierauf mit den v. Oppolzer's Tafeln entnommenen Constanten die Reduction auf das wahre Äquinoctium des Datums ausgeführt.

Ephemeride des Kometen B_{I}.

12ʰ M. Z. P.	α☌ app.			δ☌ app.			log r	log Δ	Aberr.-Zeit		Sternzeit im mittl. Mittag		
1845 Dec. 17	22ʰ	52ᵐ	46ˢ66	+1°	18'	13"9	0·08300	9·96145	7ᵐ	36ˢ3	17ʰ	43ᵐ	51ˢ9
18		54	32·62	1	12	50·9				34·8		47	48·5
19		56	21·12	1	7	37·9	0·07576	9·95856		33·3		51	45·0
20		58	12·18	1	2	34·7				31·7		55	41·6
21	23	0	5·78	0	57	40·8	0·06849	9·95541		30·0		59	38·2
22		2	1·94		52	55·9				28·3	18	3	34·7
23		4	0·65		48	19·7	0·06118	9·95199		26·5		7	31·3
24		6	1·91		43	51·8				24·6		11	27·8
25		8	5·73		39	31·8	0·05386	9·94829		22·7		15	24·4
26		10	12·12		35	19·3				20·7		19	20·9
27		12	21·06		31	13·8	0·04652	9·94428		18·6		23	17·5
28		14	32·57		27	14·8				16·5		27	14·0
29		16	46·63		23	21·8	0·03920	9·93997		14·3		31	10·6
30		19	3·27		19	34·4				12·0		35	7·1
31		21	22·46		15	51·9	0·03190	9·93534		9·7		39	3·7
1846 Jänn. 1		23	44·22		12	13·8				7·3		43	0·3
2		26	8·54		8	39·5	0·02464	9·93038		4·8		46	56·8
3		28	35·41		5	8·3				2·3		50	53·4
4		31	4·85	+0	1	39·7	0·01744	9·92507	6	59·6		54	49·9
5		33	36·84	—0	1	47·2				56·9		58	46·5
6		36	11·40		5	12·8	0·01033	9·91940		54·2	19	2	43·0
7		38	48·52		8	37·9				51·4		6	39·6
8		41	28·23		12	3·3	0·00332	9·91338		48·5		10	36·1
9		44	10·52		15	29·6				45·5		14	32·7
10		46	55·40		18	57·5	9·99646	9·90699		42·5		18	29·3
11		49	42·90		22	27·8				39·4		22	25·8
12		52	33·01		26	1·3	9·98976	9·90021		36·3		26	22·4
13		55	25·76		29	38·7				33·1		30	18·9
14		58	21·16		33	20·9	9·98326	9·89306		29·8		34	15·5
15	0	1	19·23		37	8·6				26·5		38	12·0
16		4	19·99		41	2·6	9·97699	9·88551		23·1		42	8·6
17		7	23·48		45	3·8				19·7		46	5·1

12^h M. Z. P.	α☄ app.	δ☄ app.	log r	log Δ	Aberr.-Zeit	Sternzeit im mittl. Mittag
1846 Jänn. 18	0^h 10^m 29^s69	—0° 49' 13"0	9·97098	9 87757	6^m 16^s2	19^h 50^m 1^s7
19	13 38·68	53 31·2			12·6	53 58·2
20	16 50·46	57 59·0	9·96528	9·86923	9·0	57 54·8
21	20 5·07	—1 2 37·4			5·3	20 1 51·4
22	23 22·55	7 27·2	9·95992	9·86049	1·6	5 47·9
23	26 42·93	12 29·5			5 57·9	9 44·5
24	30 6·25	17 45·2	9·95494	9·85134	54·1	13 41·0
25	33 32·55	23 15·1			50·3	17 37·6
26	37 1·88	29 0·1	9·95038	9·84179	46·4	21 34·1
27	40 34·29	35 1·3			42·5	25 30·7
28	44 9·80	41 19·7	9·94627	9 83183	38·6	29 27·2
29	47 48·49	47 56·2			34·6	33 23·8
30	51 30·40	54 51·7	9·94265	9·82147	30·6	37 20·3
31	55 15·59	—2 2 7·1			26·5	41 16·9
Febr. 1	59 4·11	9 43·4	9·93955	9·81071	22·5	45 13·5
2	1 2 56·04	17 41 6			18·4	49 10·0
3	6 51·46	26 2·4	9·93700	9·79958	14·3	53 6·6
4	10 50·44	34 46·6			10·2	57 3·1
5	14 53·09	43 55·1	9·93502	9·78808	6·1	21 0 59·7
6	18 59·50	53 28·5			2 0	4 56·2
7	23 9·79	—3 3 27·5	9·93364	9·77624	4 57·9	8 52·8
8	27 24·07	13 52·6			53·8	12 49·3
9	31 42·48	24 44·5	9·93287	9·76409	49·7	16 45·9
10	36 5·16	36 3·7			45·6	20 42·4
11	40 32·25	47 50·4	9·93272	9·75165	41·5	24 39·0
12	45 3·91	—4 0 5·0			37·4	28 35·6
13	49 40·32	12 47·8	9·93318	9·73897	33·4	32 32·1
14	54 21·65	25 58·8			29·4	36 28·7
15	59 8·12	39 38·0	9·93426	9·72609	25·4	40 25·2
16	2 3 59·93	53 45·4			21·5	44 21·8
17	8 57·29	—5 8 20·7	9·93594	9·71307	17·6	48 18·3
18	14 0·43	23 23·7			13·7	52 14·9
19	19 9·59	38 53·8	9·93821	9·69996	9·9	56 11·4

12h M. Z. P.	α☿ app.	δ☿ app.	log r	log Δ	Aberr.-Zeit	Sternzeit im mittl. Mittag
1846 Febr. 20	2h 24m 25s01	— 5° 54' 50"5			4m 6s1	22h 0m 8s0
21	29 46·94	— 6 11 13·1	9·94103	9·68684	2·5	4 4·5
22	35 15·64	28 0·6			3 58·8	8 1·1
23	40 51·37	45 12·2	9·94440	9·67380	55·3	11 57·7
24	46 34·39	— 7 2 46·5			51·8	15 54·2
25	52 24·94	20 42·2	9·94827	9·66091	48·4	19 50·8
26	58 23·28	38 57·7			45·1	23 47·3
27	3 4 29·64	57 31·2	9·95261	9·64829	41·9	27 43·9
28	10 44·24	— 8 16 20·5			38·7	31 40·4
März 1	17 7·30	35 23·3	9·95739	9·63606	35·7	35 37·0
2	23 39·00	54 37·0			32·8	39 33·5
3	30 19·49	— 9 13 58·6	9·96256	9·62436	30·0	43 30·1
4	37 8·89	33 25·0			27·3	47 26·6
5	44 7·30	52 52·5	9·96810	9·61334	24·7	51 23·2
6	51 14·77	—10 12 17·3			22·3	55 19·8
7	58 31·31	31 35·3	9·97395	9·60317	20·0	59 16·3
8	4 5 56·88	50 41·9			17·8	23 3 12·9
9	13 31·35	—11 9 32·6	9·98010	9·59401	15·8	7 9·4
10	21 14·53	28 2·4			13·9	11 6·0
11	29 6·15	46 6·4	9·98649	9·58606	12·2	15 2·5
12	37 5·89	—12 3 39·2			10·7	18 59·1
13	45 13·33	20 35·6	9·99309	9·57949	9·4	22 55·6
14	53 27·99	36 50·2			8·2	26 52·2
15	5 1 49·30	52 17·9	9·99988	9·57446	7·2	30 48·7
16	10 16·59	—13 6 53·7			6·4	34 45·3
17	18 49·14	20 33·1	0.00681	9·57113	5·8	38 41·9
18	27 26·12	33 11·7			5·3	42 38·4
19	36 6·66	44 45·7	0·01388	9·56962	5·1	46 35·0
20	44 49·83	55 11·6			5·1	50 31·5
21	53 34·67	—14 4 26·9	0·02103	9·57002	5·3	54 28·1
22	6 2 20·17	12 29·5			5·7	58 24·6
23	11 5·32	19 18·2	0·02826	9·57235	6·3	0 2 21·2
24	19 49·07	24 52·3			7·1	6 17·7

12^{h} M. Z. P.	α☄ app.	δ☄ app.	log r	log Δ	Aberr.-Zeit	Sternzeit im mittl. Mittag
1846 März 25	6^{h} 28^{m} $30^{s}41$	—14° 29' $12^{s}2$	0·03555	9·57662	3^{m} $8^{s}1$	0^{h} 10^{m} $14^{s}3$
26	37 8·33	32 18·9			9·4	14 10·8
27	45 41·87	34 13·9	0·04286	9·58277	10·8	18 7·4
28	54 10·11	34 59·4			12·4	22 4·0
29	7 2 32·20	34 38·1	0·05020	9·59070	14·3	26 0·5
30	10 47·34	33 13·4			16·4	29 57·1
31	18 54·82	30 48·9	0·05753	9·60029	18·7	33 53·6
April 1	26 54·02	27 28·8			21·1	37 50·2
2	34 44·39	23 17·2	0·06484	9·61136	23·8	41 46·7
3	42 25·46	18 18·5			26·6	45 43·3
4	49 56·85	12 37·0	0·07214	9·62375	29·7	49 39·8
5	57 18·23	6 17·3			32·9	53 36·4
6	8 4 29·39	—13 59 23·7	0·07939	9·63729	36·3	57 32·9
7	11 30·18	52 0·6			39·9	1 1 29·5
8	18 20·53	44 12·0	0·08660	9·65178	43·7	5 26·1
9	25 0·40	36 2·1			47·6	9 22·6
10	31 29·83	27 34·6	0·09376	9·66708	51·7	13 19·2
11	37 48·90	18 53·0			55·9	17 15·7
12	43 57·71	10 0·6	0·10086	9·68301	4 0·3	21 12·3
13	49 56·44	1 0·7			4·9	25 8·8
14	55 45·28	—12 51 56·0	0·10789	9·69944	9·6	29 5·4
15	9 1 24·46	42 49·1			14·4	33 1·9
16	6 54·20	33 42·3	0·11485	9·71623	19·4	36 58·5
17	12 14·78	24 38·0			24·6	40 55·0
18	17 26·45	15 37·9	0·12174	9·73329	29·8	44 51·6
19	22 29·49	6 44·0			35·2	48 48·2
20	27 24·19	—11 57 57·8	0·12855	9·75051	40·7	52 44·7
21	32 10·83	49 20·7			46·4	56 41·3
22	36 49·72	40 54·0	0·13528	9·76782	52·2	2 0 37·8
23	41 21·13	32 38·8			58·0	2 4 34·4
24	9 45 45·37	—11 24 35·9	0·14193	9·78514	5 4·0	2 8 30 9

Beobachtungen des Kometen B_I.

Da die Genauigkeit der Normalörter nicht so sehr von der Zahl als von der Güte der Beobachtungen abhängt, wurden aus dem vorliegenden Materiale alle jene Beobachtungen ausgeschieden, welche entweder auf uncontrolierbaren Sternpositionen beruhen, die ja in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts häufig sehr fehlerhaft angenommen worden sind, oder aus anderen Gründen minderwertig erscheinen. Ich habe die Liste Hubbard's, welcher von denselben Principien geleitet, Auswahl unter den Beobachtungen traf, nur um die Wiener und die von Bossert neu reducierten Pariser Beobachtungen vergrößert. Die drei vereinzelten, wohl durchwegs auf Kreisablesungen beruhenden Berliner Beobachtnngen von November 28, 29, December 2, deren erste überdies eine sehr starke Abweichung zeigt, habe ich nicht aufgeführt, da der hierauf zu basierende Normalort zu unverlässlich wäre.

Die in folgender Zusammenstellung mit »Corr.« überschriebene Columne enthält die Correctionen, welche an die von den Beobachtern ohne Angabe der Differenz ☌—* (Komet—Stern) veröffentlichten Rectascensionen und Declinationen des Kometen infolge geänderter Sternörter angebracht worden sind. Die Abkürzung »Red.« bedeutet die Reduction der Sternposition vom mittleren Äquinox 1846·0 auf das scheinbare Äquinox der Beobachtungszeit.

Da in der Publication der Sternwarte Genf die Differenzen ☌—* vom Einflusse der Parallaxe bereits befreit sind und die in Kapstadt gemachten Beobachtungen ebenfalls auf den Erdmittelpunkt bezogen sind, habe ich der Gleichförmigkeit wegen in den der Darstellung $B-R$ unmittelbar vorausgehenden Spalten nur geocentrische Rectascensionen und Declinationen angesetzt.

Berlin.

1845 1846	M. Z. Paris —Aberr.	Rectascension Corr.	Rectascension Par.	Declination Corr.	Declination Par.	α ☄	δ ☄	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
Decemb. 21	5h 45m 42s6	—0s21	+0s16	—16"4	+ 7"6	22h 59m 36s36	+ 0° 58' 59"5	+0s35	+ 3"2	5
Jänner 27	7 18 23·1	— 7	44	—	—	0 39 52·43	—	—0·08	—	30, 31
27	7 34 32·9	— 7	46	+ 1·7	10·2	0 39 54·89	— 1 33 50·9	—0·01	+ 2·5	30, 31
28	7 3 28·2	+ 45	43	— 1·1	10·3	0 43 24·45	— 1 40 1·0	—0·71	— 0·7	36
Februar 6	7 44 6·7	+ 55	53	+ 1·8	11·6	1 18 15·19	— 2 51 44·5	—0·24	+ 0·3	44
18	6 21 26·8	+ 12	47	— 7·5	14·3	2 12 28·44	— 5 19 55·0	—0·19	— 6·1	59
24	6 39 27·8	— 6	54	+ 0·3	15·8	2 45 17·40	— 6 58 45·9	+0·01	+ 4·0	67, 68
26	7 3 44·8	+ 32	61	+ 3 0	16·2	2 57 9·03	— 7 35 14·8	+0·12	— 4·0	75
März 2	7 24 25·1	— 27	67	— 1·0	17·2	3 22 23·54	— 8 52 13·2	+0·18	(—77·7)	79
4	8 6 42·0	+ 18	77	— 0·9	17·4	3 36 1·75	— 9 30 17·8	—0·20	— 2·0	85
7	7 58 38·3	+ 6	76	— 0·8	18·3	3 57 17·17	—10 28 33·6	—0·34	—11·7	97
10	7 8 15·1	+ 66	63	+ 1·8	19·5	4 19 39·62	—11 24 21·0	—0·38	— 1·5	103
12	7 59 39·4	— 18	76	+ 0·6	19·5	4 35 45·38	—12 0 42·8	+0·11	+ 3·1	110
20	8 37 19 3	+ 9	79	— 3·7	20·2	5 43 36·18	—13 53 50·5	+0·11	— 2·8	126
21	7 31 34·4	— 17	57	0	21·0	5 51 57·16	—14 2 46·0	+0·41	+ 2·8	129
April 1	9 22 59·0	+ 5	71	+ 0·6	18·8	7 26 3·59	—14 28 4·4	+1·40	—11·2	162
24	10 27 23·9	— 20	+0·49	— 3·5	+12·2	9 45 29·61	—11 24 44·1	+1·02	+22·5	174

Cambridge E.

1845 1846		M. Z. Paris —Aberr.	Rectascension		Declination		α☌	δ☌	B—R		Stern
			Corr.	Par.	Corr.	Par.			Δα	Δδ	
Decemb.	19	6ʰ 6ᵐ 18ˢ9	+0ˢ01	+0ˢ11	—	—	22ʰ 55ᵐ 54ˢ31	—	+0ˢ08	—	5
	19	6 43 54·2	—	—	— 1"1	+ 7"5	—	+ 1° 9' 4"7	—	+18"9	5
	19	6 46 10·9	+ 9	17	—	—	55 57·39	—	+0·13	—	6
	19	6 56 31·9	+ 5	19	—	—	55 58·15	—	+0·11	—	5, 6
	19	7 21 3·3	—	—	— 0·8	7·5	—	8 54·6	—	+16·9	5, 6
	23	7 50 54·8	+ 10	24	—	—	23 3 39·74	—	—0·19	—	8
	23	8 6 30·2	—	—	— 1·9	7·7	—	+ 0 49 13·1	—	+ 9·2	8
	30	6 35 45·2	+ 4	19	—	—	23 18 31·43	—	—0·85	—	9
	30	8 20 55·3	—	—	— 1·6	8·0	—	+ 0 20 11·2	—	+ 2·5	9
Jänner	1	6 30 22·3	—	—	— 1·5	8·0	—	+ 0 13 8·6	—	+ 5·2	11
	1	8 52 59·2	—	—	— 1·8	8·1	—	+ 0 12 44·8	—	+ 2·9	10, 11
	1	9 8 41·2	+ 6	39	— 2·2	8·1	23 23 27·06	+ 0 12 56·3	—0·16	+16·8	10
	15	6 56 15·2	+ 7	29	— 1·8	9·0	0 0 41·45	— 0 36 18·7	+0·01	+ 1·4	14
	23	7 4 40·5	+ 7	33	— 0·7	9·7	0 26 1·47	— 1 11 23·3	—0·30	+ 3·1	26
	24	7 6 24·9	+ 7	34	— 0·7	9·8	0 29 24·34	— 1 16 36·2	—0·38	+ 3·5	26
	27	6 27 17·6	+ 12	28	—	—	0 39 44·85	—	—0·09	—	32

1845 1846		M. Z. Paris —Aberr.	Rectascension		Declination		α ☄	δ ☄	B—R		Stern
			Corr.	Par.	Corr.	Par.			Δα	Δδ	
Jänner	27	6h 34m 38ˢ2	—	—	— 2″0	+10″2	—	— 1° 33′ 38″3	—	— 0″1	32
	28	6 22 49·0	+0ˢ06	+0ˢ28	— 1·4	10·3	0h 43m 18ˢ77	— 1 39 44·5	—0ˢ28	+ 5·0	36
	29	7 10 37·0	+ 6	37	— 1·4	10·5	0 47 3·68	— 1 46 30·3	—0·61	+ 4·7	36
Februar	11	7 47 24·3	+ 29	50	—	—	1 39 44·43	—	—0·64	—	48
	11	8 0 13·1	—	—	— 0·7	12·6	—	— 3 45 41·9	—	+ 8·9	48
	12	7 25 17·3	—	—	— 2·3	12·8	—	— 3 57 35·9	—	+ 6·8	50
	13	8 34 33·8	0	59	— 2·6	12·9	1 49 0·18	— 4 10 52·5	—0·41	+ 4·8	52
	24	8 3 52·1	— 39	62	— 2·8	15·6	2 45 37·67	— 6 59 48·5	+0·04	+ 3·6	67
	24	8 43 41·0	— 18	69	— 0·3	15·4	2 45 47·16	— 7 0 17·3	—0·03	+ 4·2	66
	25	7 56 10·1	+ 18	60	—	—	2 51 24·87	—	—0·17	—	71
	25	7 57 13·0	—	—	— 9·3	15·9	—	— 7 17 39·1	—	+ 0·3	71
	27	8 6 59·2	0	64	+ 0·1	16·4	3 3 29·67	— 7 54 35·9	—0·13	— 6·0	76
	27	8 58 34·4	+ 9	74	— 0·3	16·1	3 3 42·79	— 7 55 6·8	—0·24	+ 3·2	74
	28	7 39 44·8	— 51	58	— 6·3	16·8	3 9 36·17	— 8 13 1·4	+0·25	— 6·1	78
März	2	8 14 22·0	— 27	67	+ 0·5	17·2	3 22 37·06	— 8 51 34·7	+0·01	+ 0·9	81
	5	7 43 23·2	— 29	59	+ 3·5	18·2	3 42 51·88	— 9 49 26·0	—0·20	— 1·5	93
	10	7 14 26·3	+ 62	48	— 3·8	19·8	4 19 41·20	—11 24 25·3	0·80	— 1·1	105

März	10	7ʰ 36ᵐ 36ˢ0	+0ˢ59	+0ˢ55	—		4ʰ 19ᵐ 48ˢ03		—0ˢ23	—	103
	10	7 36 46·8	—	—	+ 1″8	+19″6	—	−11° 24′ 40″9	—	+ 0″4	103
	20	9 14 6·5	— 8	75	−− 0·5	20·4	5 43 49·49	−13 54 2·2	+0·03	+ 0·8	128, 129
	24	8 12 23·4	— 7	48	—	—	6 18 26·47	—	+0·05	- -	142
	24	8 29 3·4	—	—	+ 1·7	20·9	—	−14 24 4·6	—	+ 3·4	142
	25	7 53 21·9	+ 5	39	—	—	6 27 1·02	—	−0·32	—	145
	25	8 10 8·6	—	—	— 0·9	21·0	—	−14 28 28·9	—	+ 6·7	145
	25	9 17 50·6	— 12	69	+ 0·7	20·3	6 27 31·70	−14 28 47·7	−0·15	— 1·1	146, 148
	27	8 50 36·0	—	—	+ 3·9	20·4	—	−14 33 38·9	—	+23·9	150
	27	9 26 11·4	+ 5	64	—	—	6 44 45·65	—	−1·61	—	150
	29	8 22 52·9	—	—	— 1·6	20·3	—	−14 34 38·4	—	+ 7·1	154
	29	8 28 56·6	+ 29	44	—	—	7 1 19·66	—	+0·64	—	154
April	1	9 40 42·4	—	—	+ 2·9	19·1	—	−14 28 5·2	—	−14·7	161
	1	9 51 37·2	— 10	65	—	—	7 26 11·12	—	−0·53	—	161
	13	8 59 18·1	+ 22	30	—	—	8 49 12·52	—	+0·55	—	171
	13	9 9 55·5	—	—	−10·7	16·6	—	−13 1 30·0	—	+34·6	171
	13	9 18 9·5	—	—	— 6·9	+16·6	—	−13 1 29·6	—	+32·1	169, 170, 171
	13	9 26 13·4	— 24	+0·39	—	—	8 49 21·00	—	+2·39	—	

Genf.

1845 1846		M. Z. Paris —Aberr.	α☿ — α* +Par.	Red.	δ☿ — δ* +Par.	Red.	α☿	δ☿	B—R $\Delta\alpha$	B—R $\Delta\delta$	Stern
Decbr.	26	5h 57m 20·7	+1m 55·05	+0·31	+ 8' 4·3	+ 5·6	23h 9m 41·20	+ 0° 36' 26·7	+1·15	+ 4·5	8
	27	6 28 57·4	+4 5·76	30	+ 3 55·9	5·5	11 51·90	+ 0 32 18·2	+0·71	+ 8·6	8
	29	5 46 9·5	—2 51·12	34	— 0 24·5	5·1	16 11·54	+ 0 24 28·1	—0·04	+ 6·4	9
	31	6 35 55·2	—1 12·00	33	— 2 4·6	+ 4·8	23 20 51·22	+ 0 16 56·4	+0·31	+14·8	11
Februar	3	7 17 54·7	+2 43·25	48	—18 45·0	— 1·4	1 6 5·19	— 2 24 25·6	+0·12	— 3·1	39
	5	6 55 54·0	+0 2·67	51	+ 5 37·5	— 2·2	1 14 1·13	— 2 42 44·3	0·41	(— 47·1)	42
	10	6 38 10·9	+2 8·97	53	— 9 20·4	— 3·3	1 35 6·97	— 3 33 32·0	+0·89	— 2·5	46
	11	7 2 30·0	—0 7·91	55	— 4 25·8	— 3·7	1 39 36·83	— 3 45 22·6	+0·13	— 0·5	48
	12	7 17 15·0	+4 55·03	53	— 4 18·9	— 3·8	1 44 11·02	— 3 57 35·4	+0·82	+ 3·1	47
	17	7 0 4·0	—4 1·98	61	— 1 42·7	— 5·7	2 7 55·36	— 5 5 14·2	+0·48	+ 1·4	57
	18	6 55 42·2	+0 58·55	60	—16 41·2	— 5·7	2 12 55·88	— 5 20 12·7	0·00	— 2·1	57
	19	6 54 0·9	—4 41·97	63	+ 7 44·5	— 6·4	2 18 3·47	— 5 35 30·9	+0·09	+ 3·0	60
	20	7 5 31·5	+0 34·36	61	— 8 17·3	— 6·4	2 23 19·78	— 5 51 32·7	—0·20	0·0	60
	22	7 2 5·9	—2 14·03	64	+15 36·7	— 7·4	2 34 7·67	— 6 24 29·5	+0·60	+ 0·6	64
	26	7 25 19·1	+5 12·19	65	+12 28·4	— 8·5	2 57 14·73	— 7 35 27·1	+0·42	+ 0·2	70
März	3	7 53 52·1	—2 12·77	75	— 9 39·1	—10·8	3 29 10·47	— 9 10 38·3	+0·06	+ 1·3	84
	13	8 11 14·3	—0 35·63	92	— 5 3·6	—15·2	4 43 55·68	—12 18 5·3	+0·28	— 8·5	112
	16	8 14 39·0	+2 48·79	98	+ 3 23·4	—16·5	5 8 57·14	—13 4 35·1	+0·32	+ 5·2	116
	19	7 32 35·9	+2 41·46	1·07	— 3 56·4	—17·8	5 34 29·98	—13 42 41·7	+0·21	+ 0·2	123
	21	7 44 48·4	+2 37·77	1·13	+ 9 27·6	—18·7	5 52 2·45	—14 2 52·4	+0·87	+ 1·3	129
	22	7 57 29·6	1 17·21	1·19	— 8 6·7	—19·2	6 0 52·33	—14 11 6·0	+0·66	+ 7·4	138
	30	8 2 21·0	0 37·83	1·45	+ 1 31·5	—21·6	7 9 27·43	—14 33 31·5	+1·30	+ 0·1	158

Greenwich.

1845 1846	M. Z. Paris -Aberr.	α☄ — α*	Red.	Par.	δ☄ — δ*	Red.	Par.	α☄	δ☄	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
Dec. 23	6h 39m 22s2	—	—	—	— 1' 5"1	+ 6"0	+ 7"6	—	+ 0°49' 12"7	—	— 7"8	7
24	6 30 37 8	+0m 19s25	+0s32	+0s17	—	—	—	23h 5m 33s50	—	0s45	—	7
30	6 25 39·6	—0 31·33	33	18	—	—	—	23 18 31·50	—	+0·18	—	9
Jänn. 20	7 6 59·4	—2 32·84	42	33	— 3 4·4	+ 1·3	9·3	0 16 11·51	0 57 5·2	+0·30	— 1·5	21
31	6 31 48·4	+1 25·69	47	31	—	—	—	0 54 24·06	—	+0·08	—	38
31	6 34 21·2	—	—	—	— 9 23·5	— 0·9	10·7	—	— 2 0 23·9	—	+ 3·0	38
Febr. 7	7 21 3·0	+2 9·45	51	44	—	—	—	1 22 21·36	—	+0·36	—	44
7	7 25 32·9	—	—	—	—11 45·0	— 2·5	11·7	—	— 3 1 42·8	—	—11·5	44
9	7 5 58·9	—2 9·57	54	42	—	—	—	1 30 48·86	—	—0·51	—	46
9	7 8 46·1	—	—	—	+ 1 31·5	— 3·3	12·1	—	— 3 22 28·0	—	+ 2·4	46
28	7 14 52·3	—0 31·01	70	52	—	—	—	3 9 28·09	—	—1·31	—	77
März 2	8 19 46·1	—0 57·35	73	69	—	—	—	3 22 37·95	—	—0·58	—	80
5	8 18 39·7	+3 48·86	75	70	—	—	—	3 43 2·64	—	+0·24	—	88
5	8 18 43·4	—	—	—	+ 5 36·6	—11·5	17·8	—	— 9 49 48·1	—	+ 5·1	88
23	8 9 53·3	—1 55·67	1·23	50	—	—	—	6 9 41·17	—	—0·30	—	140
23	8 13 5·5	—	—	—	+ 0 1·8	—19·6	20·9	—	—14 18 10·8	—	+ 7·9	140
24	7 56 3·2	—	—	—	+ 6 57·3	—20·0	21·0	—	—14 24 1·1	—	— 0·2	144
27	8 34 9·9	+0 38·50	1·34	51	—	—	—	6 44 26·84	—	—1·93	—	150
27	8 34 24·4	—	—	—	0 0·0	—20·9	20·4	—	—14 33 58·0	—	+ 3·8	150
29	8 52 11·6	—	—	—	— 3 48·2	—21·4	+20·0	—	—14 35 1·2	—	—16·7	155
29	8 55 4·7	—1 52·19	1·43	+0·54	—	—	—	7 1 29·93	—	+1·84	—	155

Königsberg.

1846	M. Z. Paris − Aberr.	α☄ − α*	Red.	Par.	δ☄ − δ*	Red.	Par.	α☄	δ☄	B−R Δα	B−R Δδ	Stern
Jänn. 14	5ʰ 39ᵐ 31ˢ2	0ᵐ 40ˢ39	+0·38	+0ˢ27	+11′ 40″2	+ 2″3	+ 9″2	23ʰ 57ᵐ 34ˢ98	− 0°32′17″5	+0ˢ42	+ 4″2	14
15	5 35 45·5	+2 16·42	37	27	+ 7 50·3	+ 2·2	9·2	0 0 31·78	0 36 7·5	+0·32	− 0·2	14
17	5 45 52·3	−0 21·47	39	29	+25 21·2	+ 1·7	9·3	0 6 35 87	− 0 44 0·8	+0·32	− 0·4	17
26	5 39 41·5	+1 21·97	44	32	16 15·5	+ 0·2	10·4	0 36 6·64	1 27 32·2	−0·11	− 4·8	29
27	6 9 9·5	−0 45·93	46	37	13 57·5	− 0·1	10·5	0 39 42·48	− 1 33 34·5	+0·23	2·7	32
28	5 55 54·3	−1 54·01	46	35	+18 57·6	0·5	10·6	0 43 15·19	1 39 46·8	+0·18	− 4·4	36
29	6 7 48·3	+1 45·93	45	38	+12 24·7	0·6	10·8	0 46 55·15	− 1 46 19·6	+0·44	− 2·1	36
Febr. 14	7 22 7·7	+0 57·85	57	57	−16 41·7	− 4·5	13·4	1 53 27·51	− 4 23 35·0	+0·54	11·0	52
März 11	6 37 8·3	−0 7·91	+0·88	+0·58	+15 23·1	−14·5	+20·1	4 27 19·68	11 42 6·9	0·01	1·0	106

Paris.

1846	M. Z. Paris —Aberr.	α☄ — α*	Red.	Par.	δ☄ — δ*	Red.	Par.	α☄	δ☄	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
Febr. 6	7ʰ 43ᵐ 34ˢ4	— 1ᵐ 55ˢ43	+0ˢ52	+0ˢ52	— 1′ 48″1	— 2″5	+11″1	1ʰ 18ᵐ 16ˢ57	— 2° 51′ 46″5	+1ˢ23	— 2″0	44
10	7 27 50·9	+ 2 16·90	53	52	—10 4·5	— 3·3	11·8	1 35 15·42	— 3 34 4·3	+0·24	—11·1	46
19	7 0 43·3	— 4 40·67	63	51	+ 7 20·5	— 6·4	13·9	2 18 5·28	— 5 35 41·0	+0·45	— 2·7	60
20	7 22 53·2	+ 0 38·35	62	57	— 8 44·5	— 6·5	14·1	2 23 24·35	— 5 51 45·9	+0·54	— 1·5	60
21	7 25 48·9	+ 2 16·80	61	58	+10 42·6	— 6·8	14·3	2 28 45·11	— 6 8 7·3	—0·02	— 3·2	61
28	7 57 15·3	— 6 7·14	73	69	+ 6 56·4	— 9·9	16·0	3 9 40·96	— 8 13 14·2	+0·45	— 5·1	78
März 1	7 27 12·9	+ 0 6·19	71	61	—11 37·9	— 9·9	16·5	3 15 54·19	— 8 31 48·0	+0·11	— 2·1	78
2	7 12 6·0	+ 4 4·33	70	57	— 5 30·6	—10·1	16·8	3 22 20·60	8 50 49·8	+0·61	— 4·2	79
16	8 11 30·6	+ 2 46·76	98	69	+ 3 13·2	—16·6	19·8	5 8 55·80	—13 4 25·6	+0·09	+12·8	116
25	8 30 7·7	—12 35·31	+1·36	+0·60	—12 51·1	—20·6	+20·1	6 27 16·31	—14 28 45·8	+1·69	— 6·9	148

Philadelphia.

1846	M. Z. Paris —Aberr.	Rectasc. Corr.	Declination Corr.	α☄	δ☄	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
Jänner 19	13ʰ 16ᵐ 13ˢ9	—0ˢ02	0″0	0ʰ 13ᵐ 48ˢ53	-0° 53′ 46″8	—0ˢ23	—1″7	21
22	13 36 11·5	+0 06	0·6	0 23 36·07	-1 7 52·0	+0·23	—5·0	22
24	12 35 3·8	—0·04	0·5	0 30 11·41	-1 17 56·7	+0·19	—3·6	28
28	12 12 19·5	+0·03	+1·0	0 44 11·62	-1 41 31·9	0·04	—8·9	31

Washington.

1846	M. Z. Paris —Aberr.	α☄ — α*	Red.	Par.	δ☄ - δ*	Red.	Par.	α☄	δ☄	B-R Δα	B-R Δδ	Stern
Jänn. 12	12ʰ 51ᵐ 37ˢ3	-1ᵐ 35ˢ03	+0ˢ38	+0ˢ43	+ 0' 2"1	+ 2"7	+ 6"9	23ʰ 52ᵐ 38ˢ62	—0° 26' 20"9	-0ˢ54	— 11"9	12
13	11 28 46·1	+1 8·44	37	28	— 3 5·6	2·6	7·0	23 55 21·93	—0 29 28·6	—0·05	+ 5·3	12
13	12 2 42·0	+1 12·15	37	35	— 3 15·8	2·7	7·0	25·71	38·7	—0·37	+ 0·4	12
13	12 2 42·0	+1 7·09	37	35	— 6 44·7	2·7	7·0	25·72	37·2	—0·36	+ 1·9	13
14	11 43 21·4	—0 57·42	38	31	— 2 11·0	2·4	7·1	23 58 18·56	—0 33 6·9	—0·56	+ 11·4	15
14	11 47 51·2	-5 59·09	41	32	+ 1 26·0	2·4	7·1	18·58	14·1	—1·09	+ 4·9	16
14	12 20 6·5	—5 53·99	41	39	+ 1 45·1	2·4	7·1	23·75	32 55·0	+0·12	+ 29·0	16
14	12 25 6·6	—0 52·52	38	40	— 2 10·2	2·4	7·1	23·55	33 6·1	—0·69	+ 18·7	15
14	12 30 6·8	—5 53·98	41	41	+ 3 19·1	2·4	7·1	23·78	31 21·0	—1·08	(+124·6)	16
18	11 44 7·1	—2 8·00	41	33	— 5 56·9	1·7	7·4	0 10 28·85	0 49 27·8	+1·23	— 17·6	19
18	11 53 13·3	—0 30·40	40	35	— 2 26·7	1·7	7·4	29·20	21·2	+0·39	— 9·4	18
18	11 56 57·9	—3 29·57	42	36	+ 2 5·0	1·6	7·4	29·19	19·9	—0·10	— 7·4	20
18	13 25 15·7	—0 18·51	40	52	— 2 35·6	1·7	7·3	41·26	30·2	+0·46	— 2·2	18
18	13 25 15·7	—3 17·20	42	52	+ 1 50·0	1·6	7·3	41·72	35·0	+0·92	— 7·0	20
19	11 37 34·0	—0 24·05	41	33	— 2 2·0	1·5	7·5	0 13 34·67	0 53 26·9	—1·04	+ 0·2	20
19	11 37 34·0	5 9·35	43	33	+ 0 35·8	1·3	7·5	35·01	26·8	—0·70	+ 0·3	21

Jänn. 19	12h 12m 7·8	− 0m 19·15	+0·41	+0·40	2' 7·2	+ 1·5	+ 7·5	0h 13m 30·64	−0° 53' 32·1	0·64	+ 1·3	20
19	12 12 7·8	−5 4·40	43	40	+ 0 30·4	1·3	7·5	40 03	32·2	−0·25	+ 1·2	21
22	12 8 2·2	−2 25·49	43	41	+ 4 26·5	0·8	7·7	0 23 24·79	−1 7 30·9	+1·13	− 2·1	24
22	12 8 2·2	−6 19·97	45	41	+ 2 52·4	0·7	7·7	23·37	24·1	−0·29	+ 4·7	27
22	12 13 54·5	+1 26·25	41	42	+ 2 42·3	1·0	7·7	24·82	34·9	+0·35	− 4·8	22
22	12 24 13·4	−3 39·92	44	44	+ 7 3·3	0·8	7·7	25·90	37·2	0·00	− 5·0	25
23	11 53 41·2	+1 44·51	42	38	+ 5 11·2	0·7	7·8	0 26 41·96	−1 12 25·4	−0·09	+ 2·7	23
23	11 53 41·2	+0 51·20	42	38	− 0 27·4	0·7	7·8	41·44	24·8	−0·61	+ 3·3	24
23	11 53 41·2	−0 57·99	43	38	+ 8 33·2	0·6	7·8	41·59	28·0	−0·46	+ 0·1	26
23	11 53 41·2	−3 31·61	44	38	+ 8 30·3	0·6	7·8	41·49	26·2	−0·56	+ 1·9	28
23	12 50 16·2	+1 52·36	42	49	+ 5 2·0	0·7	7·8	49·92	34·6	−0·03	+ 5·7	23
23	12 50 16·2	+0 59·60	42	49	− 0 36·7	0·7	7·8	49·95	34·1	0·00	+ 6·2	24
23	12 50 16·2	−3 23·54	44	49	+ 8 20·0	0·6	7·8	49·67	36·5	−0·28	+ 3·8	28
23	12 55 43·0	−0 49·28	43	50	+ 8 29·3	0·6	7·8	50·42	31·9	−0·29	+ 9·5	26
24	12 20 26·9	+2 29·50	42	44	+ 3 26·7	0·6	7·9	0 30 9·13	−1 17 34·4	−0·02	+ 15·4	26
24	12 33 59·0	−0 1·99	43	47	+ 3 2·0	+0·5	7·9	11·19	54·5	+0·13	− 1·7	28
26	11 32 2·9	−3 33·71	46	35	− 9 13·1	0·0	8·1	0 36 54·68	−1 28 52·4	−3·12	+ 0·8	32
26	11 32 2·9	−6 30·01	48	35	− 6 30·1	−0·1	8·1	54·87	50·3	−2·93	+ 2·9	34
26	12 4 8·7	+6 50·25	41	42	− 8 7·2	+0·4	8·1	37 3·36	29 3·6	+0·88	− 2·5	28
28	11 55 48·4	+6 5·22	42	41	− 2 45·7	−0·1	8·3	0 44 8·88	−1 41 24·8	−0·29	− 6·2	30
28	11 55 48·4	+5 26·95	43	41	− 0 51·3	−0·1	8·3	9·26	24·5	+0·09	− 5·9	31

1846	M. Z. Paris —Aberr.	α☿—α*	Red.	Par.	δ☿—δ*	Red.	Par.	α☿	δ☿	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
Jänn. 28	11ʰ 58ᵐ 35ˢ4	—1ᵐ 21ˢ57	+0ˢ46	+0ˢ42	— 4' 46"0	—0"3	+8"3	0ʰ 44ᵐ 9ˢ91	— 1°41'23"3	+ 0ˢ32	— 4"0	37
Febr. 4	12 14 14·1	+7 28·02	46	50	+13 29·2	—1·7	9·2	1 10 53·07	— 2 34 48·1	+ 0·25	+ 3·8	40
4	12 14 14·1	+5 21·99	47	50	—	—	—	52·97	—	+ 0·15	—	41
5	12 1 30·7	+0 54·53	50	47	+ 4 31·2	2·2	9·3	1 14 53·45	— 2 43 41·3	+ 0·10	+14·4	42
5	12 1 30·7	+0 31·67	50	47	— 1 29·9	—2·2	9·3	53·14	45·3	— 0·21	+10·4	43
9	12 0 56·2	—0 7·88	54	49	— 6 44·4	—3·2	10·0	1 31 42·03	— 3 24 43·5	— 0·62	+ 1·4	45
9	12 2 43·0	—1 16·45	54	50	— 0 46·5	—3·3	10·0	42·06	48·1	— 0·91	— 2·3	46
11	13 17 30·9	+1 0·62	55	55	— 7 44·7	—3·7	10·3	1 40 45·91	— 3 48 31·2	— 0·85	— 2·0	48
18	12 7 58·0	—	—	—	— 2 52·6	—5·9	11·7	—	— 5 23 32·5	—	— 3·7	58
18	12 15 12·4	—3 21·85	62	59	+ 3 3·4	—6·1	11·7	2 14 3·49	38·3	— 0·17	— 4·9	59
18	12 17 18·3	+0 27·10	60	59	—	—	—	4·41	—	+ 0·30	—	58
21	12 36 16·3	+2 2·35	61	67	+ 8 55·5	— 6·9	12·3	2 29 56·33	— 6 11 44·8	+ 1·19	— 6·6	62
21	12 44 33·2	+3 28·81	61	69	+ 7 1·9	— 6·8	12·3	57·23	50·0	+ 0·22	— 6·1	61
22	12 14 58·3	+2 50·51	62	60	7 41·0	— 7·1	12·6	2 35 18·74	— 6 28 17·0	0·36	— 5·8	63
26	12 24 27·2	+3 28·15	66	61		—	—	2 58 29·94	—	+ 0·51	—	72
26	12 24 27·2	+2 35·46	66	61	—		—	30·07	—	+ 0·64	—	73
26	12 27 14·6	—		—	— 2 45·8	— 8·6	12·8	—	— 7 30 31·3	—	12·7	72
26	12 27 11·6	—	—		+ 5 6·8	8·6	12·8		20·0	·	10·4	73

März 3	13h 57m 34·4	+2m 20·97	+0·73	+0·95	— 4' 46″2	— 10″7	+14″2	3h 30m 52·99	— 9°15'47″2	+ 0·11	—13″5	83
3	14 1 59·2	+5 45·59	71	96	— 8 36·4	—10·5	14·2	43·46	44·5	(—10·36)	— 7·2	82
4	14 6 43·5	—0 47·67	76	98		—	—	3 37 45.50	—	+ 0·15	—	87
4	14 9 37·8	—	—	—	— 4 8·1	—11·2	14·3	—	— 9 35 13·1	—	— 3·0	86
4	14 11 11·5	—	—	—	5 36.6	—11·2	14·3	—	10·6	—	+ 0·8	87
4	14 12 42·9	0 4·86	75	99	—	—		47·21	—	+ 0·14	—	86
5	13 33 53·6	+2 21·11	76	89	+ 1 56·5	—11·6	14·9	3 44 35·11	— 9 54 15·6	+ 0·22	— 7·0	90
5	13 33 53·6	—2 38·02	78	89	+ 4 23·7	—11·8	14·9	35·40	14·8	+ 0·51	— 6·2	93
8	13 21 26·4	+0 10·06	82	82	— 5 3·9	—13·0	15·3	4 6 22·24	— 10 51 59·8	— 0·10	—13·5	100
10	13 55 36·8	—	—	—	— 5 39·1	—14·0	15·9	—	—11 29 38·6	—	— 8·1	105
10	13 58 54·3	+0 12·14	86	97	—	—	—	4 21 52·49	—	— 0·67	—	105
10	14 1 4·4	—		—	— 1 21·1	—13·9	15·9	—	42·2	—	— 7·6	103
10	14 2 9·5	—	—	—	+ 1 35·4	—14·0	15·9	—	43·6	—	— 8·2	104
10	14 3 30·8	+1 19·98	85	98	—	—	—	53·74	—	0·91	—	103
10	14 3 30·8	+1 8·43	85	98	—	—	—	53·81	—	— 0·84	—	104
14	13 28 41·1	+1 10·39	94	84	+ 8 14·0	15·8	17·1	4 53 58·73	—12 37 52·9	+ 0·06	— 4·2	113
17	13 57 4·1	—0 21·09	1·03	91	— 4 14·8	—17·2	17·3	5 19 31·29	—13 21 38·2	+ 0·27	— 1·1	119
17	14 2 42·5	+0 57·49	1·03	93	— 5 31·1	—17·2	17·2	33·10	46·7	+ 0·07	— 6·5	118
21	13 31 24·3	—	—	—	+ 6 19·0	—18·8	18·0	—	—14 4 59·9	—	— 0·2	132
21	13 37 54·0	—3 24·01	1·17	74	— 3 25·5	—19·0	17·9	5 54 11·40	5 9·1	+ 1·01	— 7·1	135

1846	M. Z. Paris —Aberr.	α☄—α*	Red.	Par.	δ☄—δ*	Red.	Par.	α☄	δ☄	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
März 21	13ʰ 44ᵐ 44ˢ4	+0ᵐ 56ˢ27	+1ˢ15	+0ˢ78	—	—	—	5ʰ 54ᵐ 12ˢ23	—	—0ˢ65	—	132
21	13 44 44·4	—3 0·32	1·17	78	— 0' 8"4	—19"0	+17"9	13·10	—14° 5' 9"5	+0·22	— 5"0	134
21	13 44 44·4	—3 40·87	1·17	78	—	—	—	12·88	—	+0·47	—	136
21	13 47 1·2	—	—	—	+ 1 43·1	—19·0	17·8	—	5 11·2	—	— 5·9	136
21	14 20 51·8	+4 59·47	1·12	93	+ 6 38·3	—18·7	17·4	25·07	5 24·3	—0·99	— 7·0	129
30	15 26 26·5	+3 48·42	1·43	96	12 14·8	—21·5	16·1	7 11 57·09	—14 33 5·1	—0·62	— 8·8	156
30	15 26 26·5	+2 52·51	1·44	96	—	—	—	57·84	—	+0·13	—	157
30	15 26 57·7	—	—	—	—18 17·5	—21·5	16·1	—	32 57·4	—	— 1·2	157
30	15 30 48·0	+1 52·35	1·44	97	—	—	—	58·57	—	—0·63	—	158
30	15 22 4·6	—	—	—	+ 1 48·7	21·6	16·1	—	32 58·2	—	— 1·6	158
31	15 31 7·8	+1 56·61	1·47	95	+ 4 34·4	—21·9	15·9	7 20 3·57	—14 30 36·6	—2·04	—13 7	160
April 3	15 3 8·1	+4 56·85	1·55	78	+ 1 22·7	—22·3	15·8	7 43 22·81	—14 17 43·8	—0·60	— 6·5	164
3	15 3 8·1	+4 32·97	1·55	78	— 6 0·2	—22·3	15·8	26·71	43·7	+3·30	— 6·4	166
15	13 58 29·6	+1 54·50	1·86	31	+ 0 1·8	—23·0	13·3	9 1 51·27	—12 41 38·9	—0·68	+25·2	172
19	15 37 40·0	+0 46·37	1·93	58	— 0 54·7	—22·9	+11·6	9 23 12·70	—12 4 53·1	—1·86	+30·8	173

Wien.

1845 1846	M. Z. Paris —Aberr.	Rectascension		Declination		α☄	δ☄	B—R		Stern
		Corr.	Par.	Corr.	Par.			Δα	Δδ	
Decemb. 17	5h 45m 51·9	−0·06	+0·18	+2·1	+ 7·0	22h 52m 20·42	+ 1° 19' 39·5	+0·87	+ 2·7	4
Jänner 28	6 34 1·9	−0·02	44	+1·4	9·7	0 43 21·14	− 1 39 56·0	+0·40	− 3·5	35
Februar 18	6 35 10·0	+0·13	58	−1·2	13·4	2 12 51·29	− 5 19 56·9	−0·24	+ 0·7	57
21	6 14 37·9	−0·23	55	−2·0	14·2	2 28 29·05	− 6 7 13·5	−0·07	+ 1·6	60
22	6 24 3·1	−0·11	58	−6·0	14·4	2 33 57·94	− 6 24 4·8	−0·39	− 1·4	65
März 5	6 37 25·4	−0·12	64	−2·4	17·4	3 42 32·82	− 9 48 30·3	+0·04	+ 0·8	87, 89
20	6 41 14·4	+0·08	50	−3·4	20·4	5 42 54·66	−13 53 0·8	+0·82	− 1·7	126, 127
22	7 3 43·5	+0·26	55	+0·2	20·3	6 0 32·82	−14 10 58·8	+0·78	− 1·6	136, 137
24	7 9 33·7	0·00	53	+1·9	20·2	6 18 3·56	−14 23 40·9	−0·04	+10·0	141, 142
27	8 3 42·5	+0·04	67	+2·1	19·5	6 44 18·48	−14 33 49·2	+0·54	+10·7	149, 150
30	7 39 6·6	0·00	52	−4·8	19·3	7 9 19·51	−14 33 34·7	+1·33	− 1·4	158
31	7 52 3·9	+0·14	+0·54	−2·7	+19·0	7 17 32·64	−14 31 19·9	+1·18	− 2·0	160

Die Publication der Sternwarte in Kapstadt (Astr. Nachrichten, XXX) gibt Beobachtungszeit, geocentrische Rectascension, Declination des Kometen, Zahl der Theilbeobachtungen und den angenommenen mittleren Sternort. Die mit gleichen Anhaltssternen gemachten Beobachtungen liegen zumeist zeitlich so weit auseinander, dass das Mittel der Beobachtungszeiten dem Mittel der Coordinaten nicht mehr hinreichend genau entspricht. Ich habe daher jede einzelne Beobachtung mit der Ephemeride verglichen und gebe im Folgenden die Resultate der Vergleichung, ohne — der großen Zahl von Beobachtungen halber — Rectascension, Declination und Correction noch besonders anzuführen.

Kapstadt.

1846	M. Z. Paris —Aberr.	B—R		Stern
		Δα	Δδ	
Februar 18	7h 31m 56s7	+0s01	—	57
	7 49 49·9	—	+ 1"0	57
19	7 18 33·2	+0·13	—	59
	7 34 17·1	—	— 3·2	59
	7 56 48·7	+0·21	—	59
20	6 58 53·2	+0·20	—	60
	7 16 10·6	—	— 4·8	60
25	7 26 56·5	—0·43	—	69
	8 9 57·3	—	—46·1	69
26	7 30 11·0	—0·40	—	75
	7 50 57·4	—	—15·0	75
	8 7 56·2	- 0·35	—	75
März 1	8 42 3·2	+0·26	—	78
	8 42 6·5	—	+ 3·1	78
4	7 13 58·2	+0·69	— 7·8	87
	7 15 24·7	+0·93	— 7·4	85
	8 6 45·9	+0·54	—11·5	85
	8 6 45·9	—0·10	— 7·0	87
	9 2 53·2	- 0·28	— 0·7	85
	9 2 53·2	—0·20	+ 2·5	87
5	7 48 5·8	+0·26	—	88
	7 48 5·8	+0·30	—	89

1846		M. Z. Paris —Aberr.	B—R		Stern
			Δα	Δδ	
März	5	7h 48m 5s8	+1s34	—	91
		8 6 24·7	—1·19	—	88
		8 6 24·7	—2·09	—	89
		8 35 8·6	—0·39	+20·3	91
		9 2 10·0	—0·20	+ 6·6	91
		9 2 10·0	—0·60	— 5·6	92
	6	6 44 49·8	+1·76	— 5·7	94
		7 18 53·7	—	—20·0	95
		8 11 48·6	—0·17	—	95
		8 35 2·7	—	— 5·3	95
		8 35 53·8	—0·47	—	95
		8 41 32·8	—	— 9·7	95
		9 8 33·3	—	+13·4	95
		9 9 10·6	—0·68	—	95
		9 23 33·6	—	+15·2	95
	7	6 44 16·8	+0·13	—	96
		6 45 42·4	—0·76	—	98
		7 16 15·6	—	+ 9·0	98
		7 24 31·0	—0·17	—	98
		8 37 21·3	(+3·19)	—	96
		8 47 12·8	—0·19	— 0·4	98
	8	6 51 33·5	—1·35	— 6·4	99
		7 28 15·1	—1·17	+ 1·3	99
		7 28 15·1	—1·06	— 0·1	100
		8 7 32·0	—0·27	— 4·8	99
		8 7 32·0	—0·28	— 0·6	100
		8 42 52·1	—1·07	+11·3	99
		8 42 58·4	—0·17	(+68·9)	100
		9 13 9·3	—1·32	—	99
		9 34 56·2	—	+ 8·8	99
	9	6 34 9·2	—0·37	—	101
		6 46 22·7	—	— 8·7	101
		7 2 14·0	—0·30	—	101
		7 38 52·6	—	+11·3	101
		7 50 15·6	+0·12	—	101
		8 3 16·8	—	+12·7	101
		8 22 22·1	+0·42	—	101
		8 35 44·5	—	+ 6·5	101
		8 49 32·6	+0·57	—	101
	10	7 2 52·2	+1·61	—	102

1846		M. Z. Paris —Aberr.			B—R		Stern
					Δα	Δδ	
März	10	7h	2m	52s2	+1s09	—	103
		7	34	45·9	+0·67	+ 2"6	102
		7	40	42·1	—0·01	+ 4·1	103
		8	21	21·8	—0·49	—	102
		8	21	21·8	—0·67	—	103
		8	23	23·6	—	— 2·7	102
		8	23	23·6	—	— 2·9	103
		9	16	57·0	—1·41	+ 3·3	103
	11	7	10	32·0	—0·45	—	107
		7	14	4·5	—0·31	+ 4·2	107
		7	57	19·4	+0·17	+ 1·6	107
		8	54	7·8	—0·34	— 2·6	108
		9	27	49·3	—	— 2·2	107
	12	7	5	20·3	+0·60	—	109
		7	25	33·1	—	— 4·3	109
		7	26	41·8	—0·03	—	109
		8	19	57·2	—0·08	— 3·2	109
		8	53	54·6	+0·06	— 6·1	109
	13	6	53	15·3	+0·23	— 2·4	111
		6	53	15·3	—0·09	— 2·7	112
		7	44	41·1	+0·27	— 3·3	111
		7	44	41·1	+0·01	— 3·8	112
		8	27	49·1	—0·09	— 1·2	111
		8	27	49·1	—0·38	— 1·4	112
	14	7	32	56·0	—1·08	—13·9	113
		8	1	13·7	—0·20	— 6·7	113
		8	39	54·4	—0·49	— 2·0	113
	15	6	44	23·1	—	+27·2	115
		6	44	26·2	+0·11	—	115
		7	16	56·9	+0·92	+19·5	115
		7	51	22·0	—0·19	—	115
		7	53	38·7	+0·03	—	114
		8	0	39·8	+1·14	—	114
		8	0	39·8	+0·67	—	115
		8	20	15·4	—	— 3·4	115
		8	31	53·9	+0·22	—	115
		8	39	50·7	—	— 9·7	115
		8	48	17·6	+0·07	—	115
	17	7	0	24·2	+0·29	—	118
		7	3	59·0	—	— 7·4	118

1846		M. Z. Paris —Aberr.	B—R		Stern
			Δα	Δδ	
März	17	7ʰ 22ᵐ 46ˢ4	+0ˢ17	+ 1"5	117
		7 22 46·4	+0·56	— 1·8	118
		7 53 18·8	+0·23	— 7·8	118
		8 34 37·0	+0·24	+ 1·1	118
		9 5 54·4	—0·12	— 2·8	118
	18	6 41 31·5	+0·26	—	120
		6 51 20·6	—	— 1·9	120
		7 3 9·0	+0·20	—	120
		7 27 48·5	—0·33	— 3·0	120
		7 27 48·5	—0·41	0·0	122
		8 7 24·7	+0·24	— 0·6	122
		8 38 8·1	—0·33	+ 3·5	121
		8 59 56·0	—0·01	— 0·5	122
	19	6 35 6·4	+0·42	+ 0·2	124
		7 14 26·9	+0·26	+ 4·1	124
		8 34 4·1	+0·35	+ 1·9	124
	20	7 24 38·1	+0·47	— 9·7	125
		7 24 38·1	+0·55	— 2·1	126
		8 36 0·1	—0·46	— 5·3	125
		8 36 0·1	—0·34	— 3·8	126
	21	7 12 47·1	+0·53	— 2·8	130
		7 34 29·8	—	+ 1·0	131
		7 40 44·0	+1·33	—	131
		7 59 35·9	+0·58	+ 3·3	133
		8 30 24·5	+0·52	+ 2·6	131
		8 30 24·5	+0·69	+ 2·8	133
		9 15 2·5	+0·22	+ 0·2	131
		9 15 2·5	+0·17	— 2·5	133
	23	7 1 24·9	—0·34	— 7·6	139
		7 1 24·9	—0·02	— 9·0	140
		7 1 25·4	+0·38	+ 0·2	139
		7 59 13·4	+0·37	— 7·2	139
		7 59 13·4	+0·18	— 5·2	140
		9 1 19·9	—1·03	— 5·9	139
		9 1 19·9	—0·79	— 4·8	140
	24	7 30 22·0	—0·86	—	142
		7 30 22·0	—0·74	—	143
		7 41 40·9	—	+ 3·9	143
		7 48 18·5	—	+ 9·8	142
		8 12 45·6	+0·58	—	142

1846		M. Z. Paris —Aberr.			B—R		Stern
					Δα	Δδ	
März	24	8ʰ	15ᵐ	40ˢ2	—	+ 7"0	142
		8	29	22·8	+0·58	+ 1·2	143
		8	58	29·3	+0·35	+ 7·8	142
		9	25	43·8	+0 41	— 3·3	142
		9	45	43·2	—0·18	+ 6·1	143
	26	7	23	14·5	—0·21	—	147
		7	52	10·8	—0·66	—	147
		8	25	29·9	—0·01	—	147
	27	7	7	13·2	+0·87	—	150
		7	22	42·5	—	+ 6·4	150
		7	58	37·6	+0·21	—	150
		8	27	29·2	—	+15·5	150
		9	5	18·1	+1·06	+ 6·5	150
		9	5	18·1	+1·37	+ 4·9	151
	28	6	54	19·8	+0·03	+ 7·9	152
		8	6	26·3	—	+ 3·2	152
		8	9	11·4	+0·91	—	152
		8	14	52·9	—	+ 3·2	153
		8	17	30·1	+0·36	—	153
		9	17	59·7	—0·53	+ 5·1	152
		9	17	59·7	—1·10	+14·9	153
	29	7	48	0·3	+0·37	+10·1	154
		7	48	0·3	+0·35	+ 9·0	155
		9	0	20·5	—1·93	+ 5·2	154
		9	0	20·5	—1·74	— 0·7	155
	31	7	28	28·1	—0·07	+ 9·9	160
		8	8	6·0	+0·53	+12·6	160
		8	24	47·7	+1·97	—	159
		8	24	47·7	+2·03	—	160
		8	29	46·1	+0·45	—	159
		8	29	46·1	+0·46	—	160
		8	44	1·8	—	+17·4	159
		8	58	16·1	—	+ 5·5	160
		9	10	40·9	—0·01	—	159
		9	10	40·9	—0·46	—	160
		9	23	29·3	—	+11·3	159
April	2	6	54	52·1	—1·66	—	163
		7	51	16·5	+1·16	—	163
		8	16	21·9	—	+12·4	163
		8	29	26·6	+2·14	—	163

1846	M. Z. Paris —Aberr.	B—R		Stern
		Δα	Δδ	
April 3	6h 40m 53s9	—0s19	—	167
	6 40 53·9	—0·27	—	168
	7 1 51·7	—	—25"7	167
	7 1 51·7	—	—26·9	168
	7 11 49·3	+0·64	—	167
	7 11 49·3	+0·78	—	168
	7 35 15·5	+0·71	—	167
	7 35 15·5	+1·00	—	168
	7 45 51·9	+2·17	—	167
	7 45 51·9	+2·41	—	168
	8 11 2·3	+2·03	+33·6	167
	8 11 2·3	+2·33	+32·2	168

Die meisten Vergleichsterne sind in Pulkowa (1854 bis 1855) oder Washington (Yarnall), viele an beiden Orten beobachtet worden; die Positionen der gemeinsamen Sterne befinden sich mit wenigen Ausnahmen in schöner Übereinstimmung. Cambridge (England), Kapstadt und Königsberg haben ihre Sterne selbst bestimmt. Eine stattliche Anzahl von Sternen enthält der Katalog von Schjellerup und Bd. VI der B. D., im folgenden mit »Bonn« bezeichnet. Wertvolle Beiträge lieferten auch die v. Kuffner'sche Sternwarte in Wien, Ottakring, und die Sternwarten in Nicolajew und Cambridge (Amerika). Ich erfülle eine angenehme Pflicht, indem ich den Directoren dieser Institute hiefür meinen besten Dank abstatte.

Da die neuesten Zonenbeobachtungen auf dem Fundamentalkataloge der astronomischen Gesellschaft beruhen, so habe ich die Auwers'schen Correctionen (Astr. Nachr. B. 134, 143) für die Kataloge Yarnall, Paris, Glasgow, Radcliffe und auch für die Pulkowaer Beobachtungen in Anwendung gebracht, in der Voraussetzung, dass sie dasselbe Verhalten zeigen, wie die Positionen Pulkowa 1855.

Die in Cambridge E. und Kapstadt bestimmten Sterne weisen, mit den Beobachtungen in Pulkowa und Washington verglichen, nicht unbeträchtliche systematische Abweichungen

auf, welche jedoch ziemlich sicher ermittelt werden konnten und in Rechnung gezogen worden sind.

Die Gewichte sind, soweit es möglich war, nach Auwers Tafeln (Astr. Nachr., B. 151) angenommen worden.

Vergleichsterne.

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
1	6	22ʰ 22ᵐ 10ˢ81	3	+ 3° 39' 2"7	5	Pulkowa
		10·77	9	1·6	3	Yarnall
		10·78		2·3		
2	6	22 31 1·88	2	+ 3 43 51·9	2	Cambridge E.
		1·82	3	51·2	5	Pulkowa
		1·90	4	51·2	2	Yarnall
		1·87		51·3		
3	8	22 36 0·26	3	+ 3 4 3·0	5	Pulkowa
		0·28	4	4·5	2	Yarnall
		0·21	3	4·8	3	Schjellerup
		0·25		3·8		
4	9	22 52 58·20	0	+ 0 59 12·1	1	Pulkowa
		59·39	1	11·7	1	Albany
		59·39		11·9		
5	8	22 57 35·28	2	+ 0 56 10·3	3	Cambridge E.
		35·20	4	10·9	7	Pulkowa
		35·19	4	10·7	3	Yarnall
		35·21		10·8		
6	6	23 0 47·78	3	+ 1 17 24·8	3	Cambridge E.
		47·70	3	26·6	5	Pulkowa
		47·83	9	26·3	3	Yarnall
		47·79		26·0		
7	9	23 5 13·76		+ 0 50 4·2		Pulkowa

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
8	7	23h 7m 45s·82	2	+ 0° 28' 17"·0	2	Cambridge E.
		45·80	3	16·9	5	Pulkowa
		45·89	4	16·5	3	Yarnall
		45·84		16·8		
9	5	23 19 2·32		+ 0 24 47·5		Fund.-Kat.
10	7	23 19 21·54	2	+ 0 16 38·6	2	Cambridge E.
		21·47	3	38·2	5	Pulkowa
		21·54	11	37·9	3	Yarnall
		21·57	3	38·6	3	Schjellerup
		21·53		38·3		
11	8	23 22 2·97	2	+ 0 18 55·8	2	Cambridge E.
		2·80	3	55·8	5	Pulkowa
		2·93	4	56·4	3	Yarnall
		2·88	3	56·8	3	Schjellerup
		2·89		56·2		
12	9	23 54 12·79	3	— 0 26 32·9	5	Pulkowa
		12·85	9	32·9	3	Yarnall
		12·88	3	31·7	3	Schjellerup
		12·84		32·6		
13	9	23 54 17·91		— 0 23 2·2		Bonn
14	8	23 58 14·70	3	— 0 44 9·4	3	Königsberg
		14·72	2	9·3	2	Cambridge E.
		14·68	3	9·7	5	Pulkowa
		14·75	4	8·6	2	Yarnall
		14·73	3	8·7	3	Schjellerup
		14·72		9·2		
15	9	23 59 15·31	1	— 0 31 5·2	1	Pulkowa
		15·27	1	5·7	1	Nicolajew
		15·29		5·4		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
16	9	0h 4m 16s94		— 0° 34' 49"6		Bonn
17	8	0 6 56·68	1	— 1 9 33·1	1	Königsberg
		56·62	1	32·7	1	Pulkowa
		56·67	1	33·1	1	Nicolajew
		56·66		33·0		
18	9	0 10 58·85	1	— 0 47 3·6	1	Bonn
		59·15	0	3·5	1	München 1880
		58·85		3·6		
19	9	0 12 36·11		— 0 43 40·0		Bonn
20	9	0 13 57·93	3	— 0 51 34·7	5	Pulkowa
		58·00	6	32·7	3	Yarnall
		57·98		33·9		
21	6	0 18 43·58	1	— 0 54 11·8	1	Pulkowa
		43·62	1	11·0	1	Nicolajew
		43·60		11·4		
22	8	0 21 57·68	3	— 1 10 26·2	5	Pulkowa
		57·76	6	26·4	5	Yarnall
		57·77	3	24·4	3	Schjellerup
		57·74		25·9		
23	9	0 24 56·57	3	— 1 17 45·2	5	Pulkowa
		56·62	6	45·5	2	Yarnall
		56·78	3	45·5	3	Schjellerup
		56·65		45·1		
24	8	0 25 49·59	1	— 1 12 5·5	1	Bonn
		49·27	1	6·2	1	Paris 1860
		49·42	1	6·5	1	Paris 1875
		49·32	1	7·8	1	Göttingen
		49·58	1	3·6	1	München 1880
		49·44		5·9		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
25	10	0^{h} 27^{m} $4^{s}94$		— 1° 14' 49"0		Bonn
26	7	0 27 38·77	2	— 1 21 10·8	2	Cambridge E.
		38·69	3	9·1	5	Pulkowa
		38·80	10	9·7	7	Yarnall
		38·77		9·6		
27	9	0 29 42·48		— 1 10 23·1	1	Bonn
		42·—		26·8	1	Göttingen
		42·48		24·9		
28	6	0 30 12·28		— 1 21 4·9		Fund.-Kat.
29	9	0 34 43·81	1	— 1 11 28·8	1	Königsberg
		44·01	1	25·8	1	Pulkowa
		43·91		27·3		
30	9	0 38 2·71	3	— 1 38 48·5	5	Pulkowa
		3·00	5	47·7	2	Yarnall
		2·74	6	45·8	5	Nicolajew
		2·83		47·3		
31	9	0 38 41·42	4	— 1 40 41·4	7	Pulkowa
		41·52	4	41·4	2	Yarnall
		41·47		41·4		
32	8	0 40 27·65	3	— 1 19 48·0	3	Königsberg
		27·53	2	47·3	2	Cambridge E.
		27·61	3	47·1	5	Pulkowa
		27·54	6	47·4	5	Yarnall
		27·58		47·4		
33	7	0 42 2·05	2	— 1 3 50·9	2	Cambridge E.
		1·86	3	52·4	3	Yarnall
		2·00	3	51·1	3	Nicolajew
		1·96		51·5		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
34	8	0h 43m 24s08	1	— 1° 22' 28"4	1	Yarnall
		24·02	1	27·9	1	Nicolajew
		24·05		28·2		
35	8	0 43 45·70	1	— 1 19 32·4	1	Pulkowa
		45·61	1	32·7	1	Nicolajew
		45·66		32·5		
36	5	0 45 8·46	3	— 1 58 55·1	3	Königsberg
		8·40	2	55·0	2	Cambridge E.
		8·39	6	54·5	7	Pulkowa
		8·35	7	54·5	20	Yarnall
		8·39		54·5		
37	9	0 45 30·65	1	— 1 36 44·3	1	Yarnall
		30·55	1	45·7	1	Nicolajew
		30·60		45·0		
38	9	0 52 57·56	1	— 1 51 10·8	1	Pulkowa
		57·63	1	9·5	1	Nicolajew
		57·59		10·2		
39	8	1 3 21·51	1	— 2 5 38·5	1	Paris 1845
		21·37	1	37·9	1	Bonn
		21·38	1	40·8	1	Santini
		21·65	1	38·5	1	Paris 1860
		21·44	1	38·0	1	Berlin 1862
		21·43	1	41·4	1	Paris 1875
		21·46		39·2		
40	9	1 3 24·09	1	— 2 48 24·9	2	Yarnall
		24·43	0	24·6	1	München 1880
		24·09		24·8		
41	8	1 5 30·01		— 2 40 38·0		Yarnall

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
42	9	1h 13m 57s89	3	— 2° 48' 19"5	5	Pulkowa
		57·98	6	19·8	3	Yarnall
		57·95		19·6		
43	9	1 14 20·50	2	— 2 42 16·7	0	Yarnall
		20·49	1	22·5	1	Santini
		20·50		22·5		
44	7	1 20 10·95	3	— 2 50 6·7	5	Pulkowa
		10·97	6	7·7	2	Gould
		10·96		7·0		
45	9	1 31 48·88	1	— 3 18 6·5	2	Yarnall
		48·87	4	5·5	3	Paris 1860
		48·92	1	5·3	2	Paris 1875
		48·88		5·9		
46	8	1 32 57·41	3	— 3 24 7·9	5	Pulkowa
		57·49	6	8·5	4	Yarnall
		57·49	3	8·8	3	Schjellerup
		57·47		8·3		
47	8	1 39 15·43	2	— 3 53 12·1	2	Yarnall
		15·51	1	13·8	1	Wien 1875
		15·46		12·7		
48	8	1 39 43·97	2	— 3 40 54·3	2	Cambridge E.
		44·14	3	52·4	5	Pulkowa
		44·27	8	53·5	3	Yarnall
		44·19		53·1		
49	9	1 39 50·94		— 4 0 49·4		Yarnall
50	8	1 43 47·35	2	— 3 24 5·6	2	Cambridge E.
		47·29	3	6·0	5	Pulkowa
		47·46	4	6·4	2	Yarnall
		47·33		6·0		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
51	9	1h 44m 59s01	3	— 3° 52' 51"7	5	Pulkowa
		59·02	6	51·5	2	Yarnall
		59·22	3	50·8	3	Schjellerup
		59·07		51·4		
52	8	1 52 28·59	3	— 4 7 3·6	3	Königsberg
		28·58	2	1·5	2	Cambridge E.
		28·49	6	1·9	7	Pulkowa
		28·48	9	2·1	4	Yarnall
		28·58	3	2·5	3	Schjellerup
		28·52		2·2		
53	8	1 59 17·52	3	— 4 57 12·8	5	Pulkowa
		17·60	6	13·1	2	Yarnall
		17·68	3	12·1	3	Schjellerup
		17·60		12·7		
54	9	2 8 11·21	1	— 4 48 44·5	3	Yarnall
		11·63	1	45·5	2	Schjellerup
		11·42		44·9		
55	8	2 10 30·71		— 4 48 47·8		Yarnall
56	8	2 11 34·36		— 4 50 22·6		Yarnall
57	7	2 11 56·77	2	— 5 3 26·1	2	Cambridge E.
		56·68	6	24·5	2	Yarnall
		56·78	4	26·9	2	Gould
		56·73		25·8		
58	9	2 13 36·12		— 5 20 45·7		Bonn
59	8	2 17 24·27	2	— 5 26 49·8	2	Cambridge E.
		24·22	6	46·3	7	Pulkowa
		24·18	4	47·7	3	Yarnall
		24·22		47·3		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
60	8	2h 22m 44s79	2	— 5° 43' 8"5	2	Cambridge E.
		44·78	3	9·2	4	Pulkowa
		44·86	2	5·4	0	Schjellerup
		44·81		9·0		
61	7	2 26 27 15	6	— 6 18 58·0	7	Pulkowa
		27·08	4	59·1	1	Yarnall
		27·12	5	56·1	5	Ottakring
		27·12		57·4		
62	9	2 27 52·74	1	— 6 20 45·7	3	Bonn
		52·69	1	50·3	0	Yarnall
		52·70	2	45·7	4	Ottakring
		52·70		45·7		
63	9	2 32 27·05	1	— 6 20 42·4	1	Yarnall
		26·98	1	40·7	1	Ottakring
		27·01		41·5		
64	8	2 36 21·04	1	— 6 39 60·0	1	Pulkowa
		21·08	1	57·6	1	Schjellerup
		21·06		58·8		
65	9	2 39 34·55	1	— 6 25 4·5	1	Pulkowa
		34·39	2	2·2	2	Ottakring
		34·44		3·0		
66	8	2 42 44·14	2	— 7 26 46 9	2	Cambridge E.
		44·11	1	47·4	2	Pulkowa
		44·11	7	47·4	3	Yarnall
		43·84	0	48·6	0	Schjellerup
		44·12		47·3		
67	9	2 48 59·37	1	— 6 52 41·5	1	Cambridge E.
		59·32	1	42·9	1	Glasgow 1870
		59·26	3	40·8	2	Ottakring
		59·29		41·5		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
68	9	2h 49m 46s94		— 6° 57′ 0″2		Bonn
69	8	2 51 55·89		— 7 13 53·1		Ottakring
70	7	2 52 1·89		— 7 47 47·0		Ottakring
71	6	2 54 32·50	2	— 7 5 59·0	2	Cambridge E.
		32·51	1	59·5	2	Pulkowa
		32·57	4	59·6	3	Yarnall
		32·54		59·4		
72	9	2 55 0·47	1	— 7 36 49·0	1	Bonn
		0·54	2	50·0	2	Ottakring
		0·52		49·7		
73	9	2 55 53·40	1	— 7 44 40·1	1	Pulkowa
		53·27	1	39·9	1	Bonn
		53·34		40·0		
74	6	2 56 42·96	1	— 8 12 25·2	1	Cambridge E.
		42·97	1	23·6	1	Schjellerup
		42·97		24·4		
75	9	2 56 48·10	1	— 7 27 61·8	1	Kapstadt
		48·20	2	58·4	2	Ottakring
		48·17		59·5		
76	8	3 5 1·61	2	— 8 13 53·7	2	Cambridge E.
		1·55	3	54·7	5	Pulkowa
		1·58	4	54·5	2	Yarnall
		1·58		54·4		
77	9	3 9 57·92	1	— 8 12 27·0		Pulkowa
		57·86	2	22·6		Ottakring
		57·88		—		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
78	7	3ʰ 15ᵐ 46ˢ81	2	— 8° 20' 16"4	2	Cambridge E.
		46·61	2	15·2	2	Kapstadt
		46·67	3	16·8	5	Pulkowa
		46·66	4	18·4	2	Yarnall
		46·68		16·7		
79	8	3 18 15·08	1	— 8 45 24·8	1	Pulkowa
		14·88	1	27·1	1	Schjellerup
		14·98		25·9		
80	9	3 23 33·80	1	— 8 38 20·3	1	Pulkowa
		33·92	2	20·7	2	Ottakring
		33·88		20·6		
81	7	3 24 32·58	2	— 8 22 1·3	2	Cambridge E.
		32·51	1	1·5	2	Pulkowa
		32·62	4	1·6	2	Yarnall
		32·59		1·5		
82	7	3 24 56·19	1	— 9 7 12·9	2	Pulkowa
		56·20	6	10·8	2	Yarnall
		56·20		11·8		
83	9	3 28 30·09	1	— 9 11 25·4	0	Bonn
		30·02	2	4·5	1	Ottakring
		30·04		4·5		
84	7	3 31 22·48	2	— 9 0 46·4	1	Paris 1845
		22·53	2	50·0	3	Paris 1860
		22·31	1	47·0	2	Schjellerup
		22·53	1	48·4	2	Paris 1875
		22·51	4	48·3	4	Ottakring
		22·49		48·4		
85	8	3 32 44·22	1	— 9 32 31·5	1	Kapstadt
		44·36	2	31·7	2	Pulkowa
		44·31		31·6		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
86	9	3h 37m 50s40	1	— 9° 31' 8"2	1	Bonn
		50·30	2	8·1	2	Ottakring
		50·33		8·1		
87	8	3 38 31·48	2	— 9 29 37·1	2	Kapstadt
		31·39	3	37·3	5	Pulkowa
		31·—		36·4	2	Yarnall
		31·43		37·1		
88	9	3 39 12·24	1	— 9 55 30·2	1	Kapstadt
		12·38	2	31·4	2	Pulkowa
		12·33		31·0		
89	9	3 39 26·69	1	— 9 52 5·2	1	Kapstadt
		26·48	1	7·2	1	Paris 1875
		26·59	1	6·6	1	San Fernando 1892
		26·39	1	7·9	1	San Fernando 1893
		26·61	3	7·5	3	Ottakring
		26·57		7·1		
90	9	3 42 12·45	1	— 9 56 15·5	1	Bonn
		12·30	2	15·4	2	Ottakring
		12·35		15·4		
91	10	3 42 53·68		— 9 43 7·6		Kapstadt
92	9	3 46 29·77	1	— 9 42 57·0	1	Bonn
		29·66	1	56·4	1	San Fernando 1892
		29·78	1	58·5	1	San Fernando 1893
		29·79	3	59·2	4	Ottakring
		29·76		58·4		
93	8	3 47 11·76	2	— 9 58 42·5	2	Cambridge E.
		11·69	3	41·5	5	Pulkowa
		11·78	4	41·2	3	Yarnall
		11·75		41·6		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
94	8	3h 49m 15s05	2	—10° 12' 10"8	2	Cambridge E.
		14·99	2	9·7	2	Kapstadt
		15·11	1	15·7	0	Pulkowa
		15·17	4	10·7	3	Yarnall
		15·10		10·5		
95	8	3 50 15·70	1	—10 8 55·5	1	Kapstadt
		15·87	1	58·0	1	Santini
		15·78		56·7		
96	10	3 56 54·02		—10 27 24·7		Kapstadt
97	9	3 57 5·19	1	—10 39 36·6	1	Pulkowa
		5·22	1	35·9	1	Schjellerup
		5·20		36·3		
98	7	3 59 40·97	1	—10 24 44·5	1	Kapstadt
		40·67	1	46·1	1	Paris 1860
		40·87	1	48·2	1	Paris 1875
		40·88	1	43·3	1	Schjellerup
		40·70	1	50·3	1	Radcliffe 1890
		40·82		46·5		
99	9	4 4 51·06	1	—10 51 56·5	2	Kapstadt
		51·—		55·3	2	Paris 1860
		51·11	1	54·8	1	Santini
		51·09		55·7		
100	8	4 6 10·55	2	—10 46 57·7	2	Kapstadt
		10·57	3	57·7	5	Pulkowa
		10·52	4	59·2	2	Yarnall
		10·30	0	58·7	2	Schjellerup
		10·54		58·2		
101	8	4 12 16·05	1	—10 57 12·6	1	Kapstadt
		16·19	1	11·3	2	Santini
		16·16	2	—		Schjellerup
		16·14		11·7		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
102	9	4ʰ 18ᵐ 44ˢ08	1	—11° 31' 28″5	1	Kapstadt
		44·15	1	27·2	1	München 1880
		44·11		27·9		
103	7	4 20 31·94	2	—11 28 22·1	2	Cambridge E.
		31·87	2	24·7	2	Kapstadt
		31·93	3	23·5	5	Pulkowa
		31·94	6	22·0	3	Yarnall
		31·93		23·1		
104	8	4 20 43·56	1	—11 31 20·0	1	Bonn
		43·54	2	21·4	2	Cambridge A.
		43·55		20·9		
105	8	4 21 38·47	2	—11 24 0·3	2	Cambridge E.
		38·48	3	2·2	5	Pulkowa
		38·58	4	0·7	2	Yarnall
		38·52		1·4		
106	9	4 27 26·13	1	—11 57 35·6	1	Königsberg
		26·37	0	38·8	0	Santini
		26·13		35·6		
107	9	4 28 13·55	1	—11 53 41·1	1	Kapstadt
		13·71	0	41·3	1	Santini
		13·47	1	40·9	1	Schjellerup
		13·51		41·1		
108	9	4 29 9·63	1	—11 35 5·6	1	Kapstadt
		9·72	1	3·0	1	Santini
		9·60	2	6·7	2	Schjellerup
		9·64		5·4		
109	9	4 34 37·07	2	—12 0 39·4	2	Kapstadt
		37·23	1	38·8	1	Santini
		37·12		39·2		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
110	9	4h 34m 56s53	1	—11° 56′ 32″6	1	Pulkowa
		56·32	1	30·8	1	Cambridge A.
		56·43		31·7		
111	8	4 42 30·55	1	—12 18 54·2	1	Kapstadt
		30·39	1	55·6	1	Paris 1860
		30·59	1	54·4	1	Santini
		30·51		54·7		
112	8	4 44 30·45	2	—12 12 46·7	2	Kapstadt
		30·37	1	46·8	1	Santini
		30·31	1	45·9	1	München 1880
		30·39		46·5		
113	5	4 52 46·56		—12 46 8·2		Fund.-Kat.
114	7	5 0 15·05	1	—12 41 43·0	2	Kapstadt
		15·19	1	43·3	3	Yarnall
		15·44	1	48·0	0	Cambridge A.
		15·23		43·2		
115	8	5 0 41·89	1	—12 47 44·1	1	Kapstadt
		41·81	2	46·0	2	Yarnall
		41·85	2	46·9	2	Cambridge A.
		41·84		46·0		
116	5	5 6 7·40	1	—13 7 43·7	1	Pulkowa
		7·34	1	40·3	1	Cambridge A.
		7·37		42·0		
117	7	5 12 28·98	1	—13 20 26·4	1	Kapstadt
		28·84	2	24·5	2	Yarnall
		28·85	2	26·2	2	Cambridge A.
		28·87		25·6		
118	7	5 18 33·70	2	—13 16 15·1	2	Cambridge E.
		33·66	3	16·6	5	Pulkowa
		33·61	4	14·6	4	Yarnall
		33·65		15·6		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
119	9	5h 19m 50s40	0	—13° 17′ 23″3	1	Bonn
		50·44	1	23·7	1	Cambridge A.
		50·44		23·5		
120	8	5 25 16·35	1	—13 20 17·1	1	Kapstadt
		16·23	2	15·9	2	Yarnall
		16·40	2	17·9	2	Cambridge A.
		16·32		16·9		
121	9	5 26 35·99	1	—13 38 38·8	1	Kapstadt
		35·77	1	38·0	1	Santini
		35·79	2	36·6	2	Brüssel 1865
		35·84		37·5		
122	9	5 26 51·26	2	—13 24 3·0	2	Kapstadt
		50·95	1	3·1	1	Santini
		51·16		3·0		
123	8	5 31 47·43	1	—13 38 26·9	1	Yarnall
		47·47	1	28·1	1	Cambridge A.
		47·45		27·5		
124	8	5 33 42·10	1	—13 46 5·1	1	Kapstadt
		42·09	2	3·1	2	Yarnall
		42·09	2	3·4	2	Cambridge A.
		42·09		3·6		
125	8	5 41 26·57	1	—13 42 38·1	1	Kapstadt
		26·55	2	39·9	2	Yarnall
		26 53	2	37·2	2	Cambridge A.
		26·55		38·5		
126	8	5 44 32·75	2	—13 50 52·2	2	Kapstadt
		32·75	3	54·1	5	Pulkowa
		32·69	6	52·4	3	Yarnall
		32·72		53·2		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
127	9	5ʰ 44ᵐ 38ˢ78	1	—13° 56' 31"7	1	Pulkowa
		38·75	1	34·9	1	Cambridge A.
		38·77		33·3		
128	8	5 46 57·43	1	—14 9 50·0	1	Cambridge E.
		57·44	2	50·4	2	Yarnall
		57·47	2	49·3	1	Cambridge A.
		57·45		50·0		
129	4	5 49 23·55		—14 12 1·3		Fund.-Kat.
130	8	5 50 45·85	1	—14 13 53·5	1	Kapstadt
		45·81	2	53·8	1	Yarnall
		45·83	2	51·3	2	Cambridge A.
		45·83		52·7		
131	9	5 51 49·27	1	—14 13 27·4	1	Kapstadt
		49·21	2	26·3	2	Yarnall
		49·39	1	26·8	1	Paris 1860
		48·76	0	25·8	1	Santini
		49·17	1	26·2	1	Brüssel 1865
		49·30	1	23·8	1	München 1880
		49·26		26·1		
132	8	5 53 13·98	1	—14 11 29·8	0	Bonn
		14·06	2	18·1	1	Yarnall
		14·03		18·1		
133	9	5 53 20·36	1	—14 1 42·1	1	Kapstadt
		20·38	2	41·6	2	Yarnall
		20·46	2	40·6	2	Cambridge A.
		20·41		41·3		
134	7	5 57 11·41	1	—14 4 60·6	1	Yarnall
		11·53	1	59·5	1	Cambridge A.
		11·47		60·0		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
135	8	5h 57m 33s59	1	—14° 1' 42"5	1	Yarnall
		33·40	1	42·6	1	Cambridge A.
		33·50		42·5		
136	8	5 57 52·21	3	—14 6 53·8	5	Pulkowa
		52·31	4	51·9	3	Yarnall
		52·27		53·1		
137	9	6 0 53·12	2	—14 14 43·0	2	Pulkowa
		52·95	1	42·3	1	Santini
		52·66	0	40·3	1	Schjellerup
		53·02	2	42·6	2	Brüssel 1865
		52·91	1	38·6	1	München 1880
		53·02		42·0		
138	8	6 2 8·29	3	—14 2 40·5	4	Pulkowa
		8·38	6	39·4	2	Yarnall
		8·35		40·1		
139	9	6 8 56·50	1	—14 22 55·3	1	Kapstadt
		56·57	2	55·9	2	Yarnall
		56·55		55·7		
140	8	6 11 35·07	1	—14 18 14·7	1	Kapstadt
		35·12	1	14·4	1	Santini
		35·12	2	13·3	2	Yarnall
		35·11		13·9		
141	8	6 17 25·15		—14 45 22·0		Pulkowa
142	8	6 18 1·35	2	—14 25 20·6	2	Cambridge E.
		1·39	2	21·7	2	Kapstadt
		1·46	3	22·5	5	Pulkowa
		1·31	4	21·1	3	Yarnall
		1·37		21·8		
143	8	6 18 10·37		—14 20 3·9		Kapstadt

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
144	7	6h 19m 42s52	1	—14° 30' 59"3	1	Paris 1860
		42·57	1	58·2	1	Santini
		42·67	1	60·1	1	Paris 1875
		42·71	1	60·1	1	Radcliffe 1890
		42·62		59·4		
145	8	6 26 18·71	2	—14 42 8·1	2	Cambridge E.
		18·87	3	7·8	5	Pulkowa
		18·71	4	9·2	3	Yarnall
		18·76		8·3		
146	8	6 32 14·47	2	—14 0 44·8	2	Cambridge E.
		14·42	3	45·6	5	Pulkowa
		14·44	4	43·9	4	Yarnall
		14·44		44·8		
147	8	6 34 47·53	1	—14 19 —		Kapstadt
		47·53	2	52·4	1	Bonn
		47·59	1	52·0	1	Santini
		47·51	2	54·2	1	Yarnall
		47·53		52·9		
148	6	6 39 49·68	2	—14 15 54·6	2	Cambridge E.
		49·69	3	53·8	5	Pulkowa
		49·62	4	54·4	5	Yarnall
		49·66		54·2		
149	6	6 41 58·75	2	—14 58 31·5	1	Pulkowa
		58·83	1	32·6	1	Gould
		58·78		32·0		
150	8	6 43 46·41	2	—14 33 57·0	2	Cambridge E.
		46·54	2	57·8	2	Kapstadt
		46·46	3	57·3	5	Pulkowa
		46·52	7	58·0	3	Yarnall
		46·49		57·5		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
151	9	6h 46m 29·92	1	—24° 25' 5"2	1	Kapstadt
		29·80	2	2·8	3	Yarnall
		29·91	1	0·1	1	München 1880
		29·86		2·8		
152	9	6 51 0·73	1	—14 37 5·8	1	Kapstadt
		0·63	2	4·6	2	Yarnall
		0·30	1	2·5	1	Schjellerup
		0·57		4·4		
153	8	6 52 2·14	1	—14 45 21·9	1	Kapstadt
		2·20	2	22·8	2	Yarnall
		2·07	1	22·1	1	Santini
		2·15		22·4		
154	8	6 58 32·08	2	—14 38 31·8	2	Cambridge E.
		32·17	2	33·3	2	Kapstadt
		32·18	3	32·8	5	Pulkowa
		32·12	6	33·3	3	Yarnall
		32·14		32·9		
155	8	7 3 20·16	1	—14 31 13·2	1	Kapstadt
		20·14	2	11·4	2	Yarnall
		20·18	1	10·3	1	Santini
		20·15		11·6		
156	7	7 8 6·26	1	—14 20 44·0	1	Bonn
		6·30	2	45·3	2	Yarnall
		6·29		44·9		
157	7	7 9 2·93		—14 14 34·5		Bonn
158	7	7 10 3·81		—14 34 41·8	7	Pulkowa
		3·81		41·0	6	Yarnall
		3·81		41·4		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
159	8	7ʰ 17ᵐ 4ˢ83	2	—14° 26' 37"0	2	Kapstadt
		4·85	1	36·3	1	Yarnall
		4·92	1	33·9	1	Santini
		4·86		36·0		
160	8	7 18 4·59	2	—14 35 5·2	2	Kapstadt
		4·53	4	5·1	7	Pulkowa
		4·53	7	4·7	2	Yarnall
		4·54		5·0		
161	7	7 26 43·47	2	—14 11 42·5	2	Cambridge E.
		43·41	3	43·1	5	Pulkowa
		43·50	4	42·3	3	Yarnall
		43·46		42·7		
162	8	7 27 51·46		—14 36 57·9	7	Pulkowa
		51·46		58·2	3	Yarnall
		51·46		58·0		
163	9	7 33 28·24	1	—14 17 30·4	1	Kapstadt
		28·28	2	30·7	2	Yarnall
		28·27		30·6		
164	7	7 38 23·66	1	—14 18 60·0	1	Yarnall
		23·59	1	59·9	1	Gould
		23·63		59·9		
165	7	7 38 24·20	2	—14 19 14·8	2	Kapstadt
		24·18	4	14·1	7	Pulkowa
		24·12	6	14·7	5	Yarnall
		24·15		14·4		
166	4	7 38 51·41		—14 11 37·0		Fund.-Kat.
167	8	7 40 21·31	1	—14 24 28·2	1	Kapstadt
		21·45	2	25·2	2	Yarnall
		21·40		26·2		

Nr.	Größe	1846·0 α	Gewicht	1846·0 δ	Gewicht	Autorität
168	8	7h 41m 54s78	1	—14° 13' 61"3	1	Kapstadt
		54·72	2	56·9	0	Yarnall
		54·74		61·3		
169	8	8 48 26·97	2	—13 27 19·0	2	Cambridge E.
		26·94	3	20·5	5	Pulkowa
		26·86	4	19·5	4	Yarnall
		26·91		19·9		
170	8	8 48 55·46	2	—13 19 8·3	2	Cambridge E.
		55·34	4	7·4	7	Pulkowa
		55·41	10	7·2	5	Yarnall
		55·40		7·5		
171	9	8 49 34·97	2	—13 6 34·9	2	Cambridge E.
		35·17	3	32·3	5	Pulkowa
		34·97	4	33·0	2	Yarnall
		35·04		33·0		
172	7	8 59 54·56	1	—12 41 32·0	1	Yarnall
		54·64	1	30·0	1	Cambridge A.
		54·60		31·0		
173	9	9 22 23·74	4	—12 3 47·0	7	Pulkowa
		23·90	4	47·4	4	Yarnall
		23·82		47·1		
174	9	9 39 17·90	4	—11 13 43·1	7	Pulkowa
		17·83	4	44·1	2	Yarnall
		17·87		43·3		

Durch Zusammenfassung der an jedem Abende gemachten Theilbeobachtungen wurden für jede Sternwarte je nach der Zahl der Durchgänge oder Einstellungen des Kometen die Mittel aus den Differenzen *B—R* gebildet, welche in folgender Tafel nach der Zeit geordnet sind.

Darstellung der Beobachtungen.

Nr.	1845 1846	Δα	Δδ	Sternwarte
1	December 17·24	+0ˢ87	+ 2″7	Wien
2	19·28	+ 10	+18·2	Cambridge
3	21·24	+ 35	+ 3·2	Berlin
4	23·28	—	— 7·8	Greenwich
5	23·33	— 19	+ 9·2	Cambridge
6	24·27	— 45	—	Greenwich
7	26·25	(+1·15)	+ 4·5	Genf
8	27·27	+ 71	+ 8·6	»
9	29·24	— 4	+ 6·4	»
10	30·27	+ 18	—	Greenwich
11	30·31	— 85	+ 2·5	Cambridge
12	31·27	+ 31	+14·8	Genf
13	Jänner 1·36	— 16	+ 8·3	Cambridge
14	12·54	— 54	—11·9	Washington
15	13·49	— 14	+ 4·1	»
16	14·24	+ 42	+ 4·2	Königsberg
17	14·50	— 75	+ 9·7	Washington
18	15·23	+ 32	— 0·2	Königsberg
19	15·29	+ 1	+ 1·4	Cambridge
20	17·24	+ 32	— 0·4	Königsberg
21	18·51	+ 35	— 9·1	Washington
22	19·49	— 73	+ 0·6	»
23	19·55	— 23	— 1·7	Philadelphia
24	20·30	+ 30	— 1·5	Greenwich
25	22·51	+ 33	— 2·5	Washington
26	22·57	+ 23	— 5·0	Philadelphia
27	23·30	— 30	+ 3·1	Cambridge
28	23·51	— 32	+ 4·0	Washington
29	24·30	— 38	+ 3·5	Cambridge
30	24·52	+ 11	+ 0·4	Washington
31	24·52	+ 19	— 3·6	Philadelphia
32	26·24	+ 11	— 4·8	Königsberg

Nr.	1846		Δα	Δδ	Sternwarte
33	Jänner	26·49	—0ˢ42	— 1"0	Washington
34		27·26	+ 23	— 2·7	Königsberg
35		27·27	— 9	— 0·1	Cambridge
36		27·31	— 4	+ 2·5	Berlin
37		28·25	+ 18	— 4·4	Königsberg
38		28·27	— 28	+ 5·0	Cambridge
39		28·27	+ 40	— 3·5	Wien
40		28·29	— 71	— 0·7	Berlin
41		28·50	+ 13	— 4·9	Washington
42		28·51	— 4	— 8·9	Philadelphia
43		29·25	+ 44	— 2·1	Königsberg
44		29·30	— 61	+ 4·7	Cambridge
45		31·27	+ 8	+ 3·0	Greenwich
46	Februar	3·30	+ 12	— 3·1	Genf
47		4·51	+ 20	+ 3·8	Washington
48		5·29	— 41	(—47·1)	Genf
49		5·50	— 5	+12·4	Washington
50		6·32	+1·23	— 2·0	Paris
51		6·32	— 24	+ 0·3	Berlin
52		7·31	+ 36	—11·5	Greenwich
53		9·30	— 51	+ 2·4	»
54		9·50	— 77	— 0·7	Washington
55		10·28	+ 89	— 2·5	Genf
56		10·31	+ 24	—11·1	Paris
57		11·29	+ 13	— 0·5	Genf
58		11·33	— 64	+ 8·9	Cambridge
59		11·55	— 85	— 2·0	Washington
60		12·30	+ 82	+ 3·1	Genf
61		12·31	—	+ 6·8	Cambridge
62		13·36	— 41	+ 4·8	»
63		14·31	+ 54	—11·0	Königsberg
64		17·29	+ 48	+ 1·4	Genf
65		18·26	— 19	— 6·1	Berlin
66		18·27	— 24	+ 0·7	Wien

Nr.	1846	Δα	Δδ	Sternwarte
67	Februar 18·29	0ˢ00	— 2ʺ1	Genf
68	18·32	+ 1	+ 1·0	Kapstadt
69	18·51	+ 18	— 4·1	Washington
70	19·29	+ 9	+ 3·0	Genf
71	19·29	+ 45	— 2·7	Paris
72	19·32	+ 16	— 3·2	Kapstadt
73	20·30	— 20	0	Genf
74	20·30	+ 20	— 4·8	Kapstadt
75	20·31	+ 54	— 1·5	Paris
76	21·26	— 7	+ 1·6	Wien
77	21·31	— 2	— 3·2	Paris
78	21·54	+ 64	— 6·3	Washington
79	22·27	— 39	— 1·4	Wien
80	22·29	+ 60	+ 0·6	Genf
81	22·51	— 36	— 5·8	Washington
82	24·28	+ 1	+ 4·0	Berlin
83	24·35	σ	+ 3·9	Cambridge
84	25·31	— 43	(—46·1)	Kapstadt
85	25·33	— 17	+ 0·3	Cambridge
86	26·29	+ 12	— 4·0	Berlin
87	26·31	+ 42	+ 0·2	Genf
88	26·33	— 37	—15·0	Kapstadt
89	26·52	+ 57	—11·5	Washington
90	27·35	— 16	— 2·9	Cambridge
91	28·32	+ 25	— 6·1	»
92	28·33	+ 45	— 5·1	Paris
93	März 1·31	+ 11	— 2·1	»
94	1·36	+ 26	+ 3·1	Kapstadt
95	2·30	+ 61	— 4·2	Paris
96	2·31	+ 18	(—77·7)	Berlin
97	2·34	+ 1	+ 0·9	Cambridge
98	2·35	— 58	—	Greenwich
99	3·33	+ 6	+ 1·3	Genf
100	3·58	+ 11	— 9·3	Washington

Nr.	1846	Δα	Δδ	Sternwarte
101	März 4·34	—0ˢ20	— 2ʺ0	Berlin
102	4·34	+ 30	— 7·0	Kapstadt
103	4·59	+ 14	— 1·1	Washington
104	5·28	+ 4	+ 0·8	Wien
105	5·32	— 20	— 1·5	Cambridge
106	5·35	+ 24	+ 5·1	Greenwich
107	5·35	— 42	+13·7	Kapstadt
108	5·57	+ 37	— 6·6	Washington
109	6·35	— 11	— 5·7	Kapstadt
110	7·32	— 22	+ 5·2	»
111	7·33	— 34	—11·7	Berlin
112	8·34	— 93	+ 1·2	Kapstadt
113	8·56	— 10	—13·5	Washington
114	9·32	+ 10	+ 5·4	Kapstadt
115	10·30	— 38	— 1·5	Berlin
116	10·31	— 42	0	Cambridge
117	10·34	— 8	+ 0·3	Kapstadt
118	10·58	— 76	— 8·0	Washington
119	11·28	— 1	— 1·0	Königsberg
120	11·33	— 25	+ 1·1	Kapstadt
121	12·33	+ 11	+ 3·1	Berlin
122	12·34	+ 8	— 4·2	Kapstadt
123	13·32	0	— 2·5	»
124	13·34	+ 28	— 8·5	Genf
125	14·34	— 59	— 7·5	Kapstadt
126	14·56	+ 6	— 4·2	Washington
127	15·33	+ 28	+ 2·3	Kapstadt
128	16·34	+ 9	+12·8	Paris
129	16·34	+ 32	+ 5·2	Genf
130	17·34	+ 17	— 3·5	Kapstadt
131	17·58	+ 10	— 5·6	Washington
132	18·33	— 4	+ 0·1	Kapstadt
133	19·31	+ 35	+ 1·8	»
134	19·31	+ 21	+ 0·2	Genf

Nr.	1846		Δα	Δδ	Sternwarte
135	März	20·28	+ 0ˢ82	— 1″7	Wien
136		20·33	+ 6	— 5·2	Kapstadt
137		20·36	+ 11	— 2·8	Berlin
138		20·38	+ 3	+ 0·8	Cambridge
139		21·31	+ 41	+ 2·8	Berlin
140		21·32	+ 87	+ 1·3	Genf
141		21·35	+ 55	+ 0·5	Kapstadt
142		21·58	— 19	— 5·1	Washington
143		22·29	+ 78	— 1·6	Wien
144		22 33	+ 66	+ 7·4	Genf
145		23·34	— 25	— 5·7	Kapstadt
146		23·34	— 30	+ 7·9	Greenwich
147		24·30	— 4	+10·0	Wien
148		24·33	—	— 0·2	Greenwich
149		24·35	+ 5	+ 3·4	Cambridge
150		24·37	+ 15	+ 4·3	Kapstadt
151		25·35	— 26	+ 4·1	Cambridge
152		25·35	+1·69	— 6·9	Paris
153		26·33	— 35	—	Kapstadt
154		27·34	+ 54	+10·7	Wien
155		27·34	+ 76	+ 9·2	Kapstadt
156		27·36	—1·93	+ 3·8	Greenwich
157		27·38	—1·61	+23·9	Cambridge
158		28·35	+ 12	+ 6·3	Kapstadt
159		29·35	— 62	+ 6·3	»
160		29·35	+ 64	+ 7 1	Cambridge
161		29·37	+1·84	—16·7	Greenwich
162		30·32	+1·33	— 1·4	Wien
163		30·33	+1·30	+ 0·1	Genf
164		30·64	— 37	— 4·6	Washington
165		31·33	+1·18	— 2·0	Wien
166		31·35	+ 26	+11·3	Kapstadt
167		31·65	—2·04	—13·7	Washington
168	April	1·39	+1·40	—11·2	Berlin

Nr.	1846		Δα	Δδ	Sternwarte
169	April	1·41	—0ˢ53	—14″7	Cambridge
170		2·33	+ 96	+12·4	Kapstadt
171		3·31	+1·29	+ 3·3	»
172		3·63	— 60	— 6·5	Washington
173		13·38	+ 78	+34·0	Cambridge
174		15·58	— 68	+25·2	Washington
175		19·65	—1·86	+30·8	»
176		24·44	+1·02	+22·5	Berlin

Wenn auch nicht alle Beobachtungen von gleicher Güte sind, indem die Berliner und, wie es scheint, auch die Königsberger Beobachtungen etwas besser, die Kapstädter vielleicht etwas schlechter sind als die ziemlich gleichwertigen Beobachtungen der übrigen Sternwarten, so unterscheiden sie sich in Präcision doch nicht so sehr, dass mit Rücksicht auf das veränderliche Aussehen des Kernes und der damit verbundenen Unsicherheit in der Auffassung des zu fixierenden Punktes seitens der Beobachter eine verschiedene, den Mittelwert der Abweichungen von der Ephemeride für einen Normalort wesentlich beeinflussende Gewichtsbemessung erforderlich wäre.

Hubbard hat aus den Beobachtungen von 1845 December 19 bis 1846 April 3 zehn Normalörter gebildet, um Zeitmittel zu erhalten, auf welche auch die Beobachtungen des Kometen B_{II} bezogen werden können. Ich habe es vorgezogen, die Normalörter für B_{I} ohne Rücksicht auf B_{II} zu bilden, da ja auch für andere Zeiten der Ort von B_{I} unabhängig von den Normalörtern abgeleitet werden kann.

Die Abgrenzung des ersten Normalortes wird durch die elftägige Pause in den Beobachtungen bedingt; für die übrigen Beobachtungen scheinen mir fünf Normalörter vollständig ausreichend. Der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung wird in folgendem stets mit ε bezeichnet. In den Spalten $B—R$ sind die arithmetischen Mittel der Abweichungen von der Ephemeride angegeben.

	Nr.	M. Z. Paris	Rectascension				Declination			
			ε	$B-R$	n	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$	ε	$B-R$	n	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$
I	1— 13	1845 Dec. 25·5	±0ˢ49	+0ˢ076 = +1"14	11	± 2"2	± 6·9	+6"42	11	± 2"1
II	14— 45	1846 Jänner 23·5	±0·37	—0·045 = —0·67	32	± 1·0	± 4·6	— 0·71	32	± 0·8
III	46— 81	Februar 14·5	±0·48	+0·072 = +1·08	35	± 1·2	± 5·2	—1·00	35	± 0·9
IV	82—113	März 2·5	±0·34	0 000 = 0·00	32	± 0·9	± 6·3	—2·40	29	± 1·2
V	114—142	März 15·5	±0·36	+0·079 = +1·18	29	± 1·0	± 4·5	—0·81	29	± 0·9
VI	143—172	März 28·5	±1·01	+0·209 = +3·13	29	± 2·8	± 9·2	+1·60	29	± 1·7

Die letzten vier Beobachtungen 173 bis 176 erscheinen, wie auch aus Hubbard's Darstellung hervorgeht, zur Bildung eines Normalortes nicht geeignet.

	M. Z. Paris	Ephemeride 1846·0		Normalort 1846·0	
		α	δ	α_I	δ_I
I	1845 December 25·5	347° 1' 15"32	+ 0° 39' 25"71	347° 1' 16"46	+ 0° 39' 32"13
II	1846 Jänner 23·5	6 40 29·12	— 1 12 35·17	6 40 28·45	— 1 12 35·88
III	Februar 14·5	28 35 8·06	— 4 26 2·21	28 35 9·14	— 4 26 3·21
IV	März 2·5	50 54 27·66	— 8 54 37·07	50 54 27·66	— 8 54 39·47
V	März 15·5	75 27 1·88	—12 52 13·68	75 27 3·06	—12 52 14·49
VI	März 28·5	103 32 12·62	—14 34 50·75	103 32 15·75	—14 34 49·15

Ephemeride und Beobachtungen des Kometen B_{II}.

Der Komet B_{II}, welcher nach Hubbard schon am 29. December 1845 von Herrick und Bradley in New-Haven gesehen worden war, ist zum erstenmale am 14. Jänner 1846 von Maury in Washington beobachtet worden. Seine Helligkeit war damals noch sehr gering, wuchs jedoch in den folgenden Tagen ziemlich rasch. Ende Jänner zeigte sich eine sternartige Verdichtung des Lichtes im Inneren des Kometen, die bei wachsender Helligkeit des ganzen Kometen sich immer schärfer ausprägte. Gegen Mitte des Monates Februar, um die Zeit des Perihels, bot sich die seltsame Erscheinung einer so wechselnden Intensität des Lichtes beider Kometen dar, dass während des Zeitraumes von ungefähr einer Woche B_{II} bald viel heller, bald viel schwächer erschien als B_{I}. In der zweiten Hälfte des Februar nahm B_{II} an Helligkeit wieder beträchtlich ab, konnte aber bis gegen Ende März noch gesehen werden.

Was die Schweifentwicklung betrifft, so geht aus den Beobachtungen hervor, dass während des größten Theiles der Sichtbarkeit von B_{II} ein normaler Schweif wahrgenommen wurde, welcher ungefähr dieselbe Länge erreichte, wie der von B_{I}; Ende Jänner zeigten sich überdies Spuren eines zweiten Schweifes in der Richtung gegen B_{I}.

Die Ephemeride ist aus Hubbards Elementen

Epoche und Osculation
1846 Febr. 11·0 M. Z. Paris

$M =$	359°	59′	15″212
$\Pi =$	109	2	54·12
$\Omega =$	245	54	9·35
$i =$	12	34	57·46
$\varphi =$	49	10	13·67
$\mu =$	537″36498		

unter Benützung der Störungstafel auf S. 301 und der Ephemeride des Kometen B_{I} abgeleitet worden.

12^h M. Z. Paris 1846	$\alpha_{II}-\alpha_I$	$\delta_{II}-\delta_I$	12^h M. Z. Paris 1846	$\alpha_{II}-\alpha_I$	$\delta_{II}-\delta_I$
Jänner 14	— 67^{s}4	+ 84$''$0	Februar 20	—168^{s}2	+340$''$2
15	— 68·4	87·7	21	—176·0	350·8
16	— 69·4	91·6	22	—184·5	361·4
17	— 70·5	95·6	23	—193·5	372·1
18	— 71·6	99·7	24	—203·2	382·9
19	— 72·8	104·1	25	—213·6	393·8
20	— 73·9	108·5	26	—224·7	404·6
21	— 75·1	113·1	27	—236·5	415·4
22	— 76·3	117·9	28	—249·2	426·2
23	— 77·6	122·9	März 1	—262·7	436·8
24	— 78·9	128·0	2	—276·9	447·3
25	— 80·2	133·2	3	—292·0	457·5
26	— 81·6	138·7	4	—307·9	467·4
27	— 83·0	144·3	5	—324·6	477·0
28	— 84·5	150·2	6	—342·0	486·2
29	— 86·1	156·2	7	—360·1	494·9
30	— 87·8	162·4	8	—378·9	503·1
31	— 89·5	168·8	9	—398·3	510·6
Februar 1	— 91·4	175·4	10	—418·1	517·4
2	— 93·3	182·2	11	—438·4	523·4
3	— 95·4	189·2	12	—458·9	528·6
4	— 97·6	196·4	13	—479·6	532·9
5	—100·0	203·8	14	—500·3	536·2
6	—102·5	211·5	15	—520·9	538·5
7	—105·3	219·3	16	—541·2	539·7
8	—108·3	227·4	17	—561·1	539·8
9	—111·5	235·7	18	—580·3	538·8
10	—114·9	244·2	19	—598·9	536·6
11	—118·6	252·9	20	—616·5	533·4
12	—122·7	261·8	21	—633·1	529·0
13	—127·0	270·9	22	—648·4	523·5
14	—131·7	280·3	23	—662·4	517·0
15	—136·7	289·8	24	—675·0	509·5
16	—142·1	299·6	25	—686·0	501·1
17	—147·9	309·5	26	—695·4	491·9
18	—154·2	319·6	27	—703·0	482·0
19	—160·9	329·8			

Mit dieser Ephemeride, welche die Differenzen der wahren Örter der beiden Kometen gibt, sind die folgenden Beobachtungen verglichen worden, deren Zahl etwas größer ist, als bei Hubbard, da sechs Pariser Beobachtungen hinzugefügt wurden.

Nr.	1846 M. Z. Paris	$\alpha_{II}-\alpha_I$	$\delta_{II}-\delta_I$	B—R $\Delta(\alpha_{II}-\alpha_I)$	B—R $\Delta(\delta_{II}-\delta_I)$	Sternwarte
1	Jänner 14·50	— 60ˢ0	+ 69ˢ1	+ 7ˢ4	—14ˢ9	Washington
2	18·53	— 66·9	108·1	+ 4·7	+ 8·3	»
3	19·49	— 64·9	106·3	+ 7·9	+ 2·2	»
4	22·51	— 82·5	113·6	— 6·2	— 4·3	»
5	22·54	— 70·7	126·9	+ 5·7	+ 8·8	Philadelphia
6	23·30	— 77·7	123·3	— 0·4	+ 1·4	Cambridge
7	23·52	— 77·1	120·8	+ 0·5	— 2·2	Washington
8	24·29	— 76·6	127·3	+ 2·0	+ 0·4	Cambridge
9	24·52	— 82·3	123·9	— 3·4	— 4·2	Washington
10	24·52	— 78·1	130·8	+ 0·8	+ 2·7	Philadelphia
11	26·27	— 82·0	137·6	— 0·7	+ 0·2	Königsberg
12	26·50	— 82·2	140·7	— 0·6	+ 2·0	Washington
13	27·27	— 87·6	145·4	— 4·9	+ 2·4	Cambridge
14	27·28	— 83·9	143·0	— 1·2	— 0·1	Königsberg
15	27·31	— 85·0	146·1	— 2·3	+ 2·9	Berlin
16	28·26	— 84·0	146·6	+ 0·1	— 2·2	»
17	28·26	— 86·5	151·9	— 2·3	+ 3·1	Cambridge
18	28·50	— 89·9	153·5	— 5·4	+ 3·4	Philadelphia
19	28·51	— 84·7	147·3	— 0·2	— 2·9	Washington
20	29·31	— 81·6	155·3	+ 4·2	+ 0·3	Cambridge
21	30·24	— 87·0	160·8	+ 0·4	0·0	Berlin
22	Februar 2·28	— 91·8	182·2	+ 1·1	+ 1·5	»
23	4·25	— 98·0	195·4	— 1·0	+ 0·8	»
24	4·49	— 93·7	191·0	+ 3·9	— 5·3	Washington
25	4·54	—101·7	206·7	— 4·0	+10·0	Philadelphia
26	5·29	— 97·5	180·0	+ 2·0	(+22·2)	Genf
27	5·51	— 97·9	202·3	+ 2·1	— 1·6	Washington
28	6·30	—105·1	210·0	— 3·1	0·0	Berlin

Nr.	1846 M. Z. Paris	$\alpha_{II}-\alpha_I$	$\delta_{II}-\delta_I$	B—R $\Delta(\alpha_{II}-\alpha_I)$	B—R $\Delta(\delta_{II}-\delta_I)$	Sternwarte
29	Februar 6·32	—108ˢ4	+212ˢ8	— 6ˢ3	+ 2ˢ7	Paris
30	7·29	—102·1	217·4	+ 2·6	— 0·2	Berlin
31	7·30	—107·4	221·1	— 2·6	+ 3·3	Greenwich
32	8·32	—108·9	236·4	— 1·2	+10·5	London
33	9·28	— 86·0	233·0	(+24·8)	— 0·9	Königsberg
34	9·30	—110·0	229·1	+ 0·8	— 4·9	Greenwich
35	9·50	—111·6	242·4	— 0·1	+ 6·7	Washington
36	10·28	—112·5	247·3	+ 1·6	+ 5·0	Genf
37	10·28	—113·5	245·0	+ 0·6	+ 2·7	Berlin
38	10·31	—104·1	237·0	+10·1	— 5·6	Paris
39	11·31	—112·6	250·3	+ 5·3	— 0·9	Cambridge
40	11·55	—115·8	244·6	+ 3·0	— 8·7	Washington
41	12·30	—122·7	258·8	— 0·8	— 1·2	Genf
42	12·30	—118·3	253·9	+ 3·6	— 6·1	Cambridge
43	12·31	—122·5	260·4	— 0·6	+ 0·3	Paris
44	12·51	—119·8	270·6	+ 2·9	+ 8·7	Washington
45	13·20	—126·7	271·5	— 1·0	+ 3·3	Dorpat
46	13·32	—124·9	266·1	+ 1·3	— 3·1	Cambridge
47	13·52	—130·0	278·4	— 2·9	+ 7·3	Washington
48	14·29	—133·9	279·3	— 3·2	+ 0·9	Berlin
49	14·31	—134·6	281·8	— 3·8	+ 3·3	Königsberg
50	15·23	—137·0	295·8	— 1·7	+ 8·5	Dorpat
51	16·26	—144·3	313·2	— 3·5	+15·9	»
52	16·52	—144·1	305·4	— 1·9	+ 5·6	Washington
53	17·29	—144·6	303·2	+ 2·1	— 4·2	Genf
54	18·29	—149·7	318·1	+ 3·1	+ 0·6	»
55	18·32	—157·8	319·4	— 4·8	+ 1·6	Kapstadt
56	18·32	—143·9	316·3	+ 9·1	— 1·5	Berlin
57	18·53	—149·7	317·9	+ 4·7	— 2·0	Washington
58	19·23	—158·5	331·4	+ 0·5	+ 4·4	Pulkowa
59	19·29	—151·6	322·9	+ 7·8	— 4·7	Genf
60	19·29	—159·4	323·4	+ 0·1	— 4·3	Paris
61	19·32	—163·0	333·1	— 3·4	+ 5·2	Kapstadt

Nr.	1846 M. Z. Paris	$\alpha_{II}-\alpha_{I}$	$\delta_{II}-\delta_{I}$	B—R $\Delta(\alpha_{II}-\alpha_{I})$	B—R $\Delta(\delta_{II}-\delta_{I})$	Sternwarte
62	Februar 20·25	—158"6	+351"2	+ 7"8	+13"6	Königsberg
63	20·29	—165·0	334·0	+ 1·7	— 4·1	Genf
64	20·29	—163·2	342·1	+ 3·4	+ 3·9	Kapstadt
65	20·31	—166·0	334·9	+ 0·8	— 3·2	Paris
66	21·25	—177·6	351·1	— 3·6	+ 2·9	Pulkowa
67	21·31	—173·7	343·8	+ 0·8	— 5·0	Paris
68	21·53	—176·4	354·5	— 0·2	+ 3·4	Washington
69	22·29	—183·3	360·6	— 0·6	+ 1·4	Genf
70	22·52	—181 8	364·5	+ 2·8	+ 2·9	Washington
71	22·55	—191·4	353·1	— 6 4	— 8·9	Philadelphia
72	24·34	—203·8	380·7	— 2·1	— 0·6	Cambridge
73	25·30	—209·8	391·4	+ 1·7	— 0·3	»
74	26·28	—220·7	402·1	+ 1·5	— 0·2	Berlin
75	26·31	—219·4	395·3	+ 3·1	— 7·2	Genf
76	26 54	—222·6	410·1	+ 2·6	+ 5·0	Washington
77	27·28	—232·1	416·1	+ 1·7	+ 3·1	Berlin
78	27·34	—229·5	415·1	+ 5·1	+ 1·4	Cambridge
79	28·30	—249·7	—	— 3·1	—	Greenwich
80	28·32	—250·8	427·9	— 4·0	+ 3·7	Cambridge
81	28·33	—271·5	429·7	(—24·5)	+ 5·3	Paris
82	März 1·31	—262·2	440·2	— 2·1	+ 5·4	»
83	2·27	—264·6	447·8	+ 9·0	+ 2·9	Berlin
84	2·30	—273·4	450·3	+ 0·6	+ 5·1	Paris
85	2·35	—269·4	—	+ 5·3	—	Greenwich
86	2·34	—276·0	445·2	— 1·4	— 0·5	Cambridge
87	3·33	—273·6	456·5	+15·8	+ 0·7	Genf
88	3·59	—292·0	456·2	+ 1·4	— 2 2	Washington
89	4·23	—308·8	470·9	— 5·2	+ 6·1	Pulkowa
90	4·30	—302·2	466·4	+ 2·4	+ 1·0	Berlin
91	4·59	—309·9	491·9	— 0·5	(+23·6)	Washington
92	5·25	—319·7	461·8	+ 0·7	—12·8	Königsberg
93	5·32	—319·3	476·2	+ 2·4	+ 0·9	Cambridge
94	5·35	—314·3	—	+ 7·7	—	Greenwich

Nr.	1846 M. Z. Paris	$\alpha_{II}-\alpha_I$	$\delta_{II}-\delta_I$	$B-R$ $\Delta(\alpha_{II}-\alpha_I)$	$\Delta(\delta_{II}-\delta_I)$	Sternwarte
95	März 5·57	—337ʺ5	488ʺ0	—11ʺ7	+10ʺ3	Washington
96	7·31	—368·8	506·7	—12·1	+13·4	Berlin
97	8·56	—378·7	—	+ 1·4	—	Washington
98	10·56	—408·9	—	+10·5	—	»
99	14·57	—493·5	550·9	+ 8·3	+14·5	»
100	16·34	—534·6	526·4	+ 3·5	—13·2	Genf
101	19·31	—593·5	542·3	+ 2·0	+ 5·2	»
102	20·31	—622·9	533·8	— 9·7	— 0·3	Berlin
103	20·37	—617·8	548·0	— 3·4	+14·2	Cambrjdge
104	21·32	—629·6	522·9	+ 0·7	— 6·9	Genf
105	21·58	—646·5	525·3	—12·1	— 3·3	Washington
106	22·33	—646·8	504·9	— 0·9	—19·6	Genf
107	23·28	—643 5	519·8	+15·9	+ 1·3	Pulkowa
108	24·27	—676·9	508·5	— 4·6	— 2·8	»
109	25·37	—693·9	507·1	— 9·2	+ 4·9	Cambridge
110	27·38	—710·5	+482·4	— 8·3	— 0·8	»

Unter den Beobachtungen von B_{II} weisen abermals die Berliner die beste Übereinstimmung auf und sollten daher mit einem etwas größeren Gewichte betheilt werden, als die übrigen. Die Änderungen, welche die Normalörter hiedurch erleiden würden, sind aber mit Rücksicht auf die mittleren Fehler derselben ohne Bedeutung. Auf den zweiten Normalort fallen sieben Berliner Beobachtungen; verleiht man diesen doppeltes Gewicht, so ergibt sich eine Änderung in Rectascension um +0ʺ10 und in Declination um —0ʺ06. Von größerem Belange ist die Frage der Ausschließung stark abweichender Beobachtungen. Ich habe außer der zeitlich zu isolierten, unvollständigen Beobachtung Nr. 98 nur zwei Rectascensionen und zwei Declinationen ausgeschlossen; es weisen aber noch einige andere Beobachtungen, vorzüglich Nr. 51 und Nr. 62 Differenzen von bedenklicher Größe auf. Mein Bestreben war, die Normalörter möglichst zwanglos zu bilden, da ja nach

Abschluss der Bahnbestimmung des Kometen leicht zu sehen ist, inwieweit die Fehler der Darstellung den Beobachtungen zur Last gelegt werden können.

Die mittleren Fehler der zu je einem Normalorte zusammengefassten Beobachtungen, das arithmetische Mittel der Differenzen und sein mittlerer Fehler sind:

	Nr.	1846 M. Z. Paris	Rectascension				Declination			
			ε	$B-R$	n	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$	ε	$B-R$	n	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$
I	1— 15	Jänner 23·5	±4ˢ3	+0ˢ62	15	±1ˢ1	±5ˢ5	+0ˢ37	15	±1ˢ4
II	16— 44	Febr. 6·5	±3·5	+0·60	28	±0·6	±4·8	+0·66	28	±0·9
III	45— 71	Febr. 18·5	±4·0	+0·33	27	±0·8	±5·7	+1·62	27	±1·1
IV	72— 97	März 2·5	±5·9	+0·81	25	±1·2	±5·5	+1·93	21	±1·2
V	99—110	März 21·5	±8·2	—1·48	12	±2·3	±9·9	—0·57	12	±2·9

Der Ort von B_I ist für Jänner 23·5, sowie März 2·5 bereits gegeben und für die übrigen Zeitpunkte durch Bestimmung des Mittelwertes gebildet worden, um welchen die durch die Zahl der Beobachtungen dividierte Summe der Abweichungen von der Ephemeride bei wachsender Zahl sich bewegt. Das Ergebnis ist Folgendes:

1846	$B-R$ Rectasc.	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$B-R$ Declin.	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$	Ephemeride 1846·0	
					α_I	δ_I
Febr. 6·5	+0ˢ4	±1ˢ3	—0ˢ8	±1ˢ0	19° 44' 36ˢ32	− 2°53'32ˢ95
Febr. 18·5	+0·9	±1·3	—1·0	±0·9	33 29 49·56	− 5 23 26·50
März 21·5	+3·4	±1·4	+0·4	±1·0	88 23 21·89	−14 4 20·58

Die Örter von B_I sind demnach:

Nr.	1846	α_I 1846·0	δ_I 1846·0
I	Jänner 23·5	6° 40' 28"45	— 1° 12' 35"88
II	Februar 6·5	19 44 36·72	— 2 53 33·75
III	Februar 18·5	33 29 50·46	— 5 23 27·50
IV	März 2·5	50 54 27·66	— 8 54 39·47
V	März 21·5	88 23 25·29	—14 4 20·18

Daraus erhält man in Verbindung mit der Ephemeride für B_{II}—B_I folgende Örter von B_{II} nebst ihren mittleren Fehlern:

Nr.	1846	Eph. (B_{II}—B_I)		α_{II} 1846·0	ε	δ_{II} 1846·0	ε
		Rectasc.	Declin.				
I	Jänner 23·5	— 1' 17"58	+2' 2"85	6° 39' 11"5	±1"5	— 1° 10' 32"7	±1"6
II	Februar 6·5	— 1 42·55	3 31·47	19 42 54·8	±1·5	— 2 50 1·6	±1·4
III	Februar 18·5	— 2 34·17	5 19·58	33 27 16·6	±1·5	— 5 18 6·3	±1·5
IV	März 2·5	— 4 36·97	7 27·25	50 49 51·5	±1·5	— 8 47 10·3	±1·8
V	März 21·5	—10 33·11	8 48·95	88 12 50·7	±2·7	—13 55 31·8	±3·0

Theilung des Kometen.

Sowohl der Lauf, als auch die in der Einleitung hervorgehobenen Eigenthümlichkeiten des Aussehens von B_I und B_{II} machen es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass beide Kometen durch Theilung des 1832 beobachteten und als einfach erkannten Kometen entstanden sind. Ob nur einmal eine Trennung in zwei Theile oder in mehrere Theile, oder aber mehrmals Theilungen stattgefunden haben, sind Fragen, welche nur durch genaue Bestimmung der Bahnen vor und nach der Theilung des Kometen gelöst werden können.

Nach Hubbards Elementen, welche keinen Durchschnittspunkt der Bahnen ergeben, waren die beiden Kometen einander am nächsten im November 1844 und ihr Abstand $= 0 \cdot 00062$, also ungefähr $\frac{1}{4}$ der Entfernung des Mondes von der Erde.

Soll nun der Annahme Rechnung getragen werden, dass beide Kometen von einem gemeinsamen Punkte ausgegangen sind, so müssen auch die Elemente diese Bedingung erfüllen und es ist klar, dass unter sonst gleichen Umständen die Darstellung der Beobachtungen schlechter wird, nachdem Hubbards Elemente eben so gewählt sind, dass sie die in den Jahren 1846 und 1852 gemachten Beobachtungen am besten darstellen.

Die Bedingung eines gemeinsamen Ausgangspunktes lässt sich bei der geringen Verschiedenheit der Elemente durch einfache Formeln ausdrücken, welche man erhält, indem man die Variationen der heliocentrischen Coordinaten dieses Punktes der Null gleichsetzt.

$$\delta r = 0 = a \operatorname{tg} \varphi \sin v \delta M - \frac{2}{3} \frac{r}{\mu \sin 1''} \delta\mu - a \cos \varphi \cos v \delta \varphi,$$

$$\delta u = -\cos i \delta \Omega = \delta\omega + \delta v =$$

$$= \delta\Pi - \delta\Omega + \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi \delta M + \frac{p+r}{r} \frac{\sin v}{\cos \varphi} \delta\varphi,$$

$$\delta i = \frac{\sin i}{\operatorname{tg} u} \delta\Omega.$$

Durch Elimination von δM aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\delta M = \frac{\cos \varphi \cos v}{\operatorname{tg} \varphi \sin v} \delta\varphi + \frac{2}{3} \frac{r}{a \operatorname{tg} \varphi \sin v . \mu \sin 1''} \delta\mu,$$

$$\delta\Pi = 2 \sin^2 \frac{1}{2} i . \delta\Omega - \frac{e + \cos E}{e . \sin E} \delta\varphi - \frac{2 \cos \varphi}{3 e \sin E . \mu . \sin 1''} \delta\mu,$$

$$\delta i = \frac{\sin i}{\operatorname{tg} u} . \delta\Omega.$$

Es empfiehlt sich, an Stelle der mittleren Anomalie für die Zeit der Theilung, die mit T bezeichnet werden soll und nur

im Wege fortgesetzter Versuche bestimmt werden kann, die mittlere Anomalie M_0 für eine fixe Epoche t_0 einzuführen, was durch die Gleichung geschieht:

$$\delta M = \delta M_0 + (T - t_0)\delta\mu.$$

Die Bedingung des gemeinsamen Ausgangspunktes ist sodann, wenn man die Bezeichnungen einführt:

$$\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}i,$$

$$\beta = -\frac{e+\cos E}{e\sin E},$$

$$\gamma = -\frac{2\cos\varphi}{3e\sin E.\mu\sin 1''},$$

$$P = \frac{\cos\varphi.\cos v}{\operatorname{tg}\varphi.\sin v},$$

$$Q = \frac{2}{3}\frac{r}{a\operatorname{tg}\varphi\sin v.\mu\sin 1''} - (T - t_0),$$

$$\lambda = \frac{\sin i}{\operatorname{tg} u}$$

durch folgende Gleichungen zum Ausdrucke gebracht:

$$\left.\begin{aligned} \delta M_0 &= P.\delta\varphi + Q.\delta\mu \\ \delta\Pi &= \alpha.\delta\Omega + \beta.\delta\varphi + \gamma.\delta\mu \\ \delta i &= \lambda.\delta\Omega \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Wäre die Bewegung des Kometen bis zu seiner Theilung genau bekannt, so brauchte man nur für ein nach Gutdünken angenommenes T die Coefficienten α, β, γ... zu berechnen, mit den Elementen des Kometen vor der Theilung nach Anbringung der Störungen die Normalörter darzustellen, die Differentialquotienten zu bestimmen, welche die Änderungen der Coordinaten jedes Normalortes als Functionen der Änderungen der Elemente geben und erhielte so ein System von Gleichungen, aus welchen die Variationen der Elemente und die Fehler der Darstellung ermittelt werden können. Durch Wiederholung der

Rechnung mit geänderten Werthen von T wird man bald über die Zeit der Theilung hinreichend orientiert sein und die schärfere Bestimmung derselben aus der für beide Kometen gesondert durchgeführten Darstellung der Normalörter vornehmen.

Wie schon früher erwähnt, hatte die Fortsetzung der Störungsrechnung von 1832 bis 1846 gezeigt, dass die mittlere Bewegung des Kometen eine beträchtliche Acceleration erfahren hat, weshalb die Rechnung zum größten Theile nochmals durchgeführt worden ist, ohne aber, beiläufig bemerkt, eine erhebliche Änderung der Störungsbeträge zu ergeben.

Um die mittlere Anomalie für die Zeit des Perihels in 1846 dem Mittel aus den Anomalien von $B_{\rm I}$ und $B_{\rm II}$ nahe zu bringen, habe ich angenommen, dass die mittlere tägliche Bewegung bei jedem Umlaufe des Kometen um 0"056422 beschleunigt werde und das Auftreten dieser Beschleunigung auf die Perihelszeiten im Jahre 1832 und 1839 verlegt. Da nun die mittlere Anomalie, welche der Komet, wenn keine Theilung stattgefunden hätte, zur Zeit t_0 gehabt haben würde, a priori nicht mit genügender Sicherheit angegeben werden kann, so musste auch der Einfluss in Rechnung gezogen werden, welchen eine Änderung von M_0 auf die Bahnen von $B_{\rm I}$ und $B_{\rm II}$ ausübt. Von den übrigen Elementen ist es nur noch Π, bei welchem sich das Bedürfnis nach einer Änderung entschieden geltend macht. Ich nenne dieselbe $\Delta\Pi$, ebenso die sich auf die Bahn des einfachen Kometen beziehenden Änderungen von $M_0 \ldots \Delta M_0$, von $\mu \ldots \Delta\mu$ und nehme an, dass ΔM_0 der Fehler sei, welcher nur durch den Fehler der Acceleration entstanden ist.

Da ich anfangs drei provisorische Normalörter für $B_{\rm I}$ und $B_{\rm II}$ gebildet hatte, welche auf Jänner 24·0, Februar 17·0 und März 21·0 fielen, so möge die damals gewählte Epoche 1846 März 21·0 $= t_0$ beibehalten werden, nachdem die bisherigen Rechnungen sich darauf beziehen. Das Intervall zwischen 1832 November 25 und 1846 März 21 ist 4864 Tage. Es wird daher mit ausreichender Näherung

$$\Delta M_0 = 2432 \frac{\Delta\mu}{2} + 2432\,\Delta\mu = 3648\,\Delta\mu.$$

Bezeichnet N den auf den größten Kreis reducierten Fehler der Darstellung eines Normalortes durch das angenommene Elementensystem, also z. B. das cos $\delta\Delta\alpha$, und ist

$$A = \frac{\cos\delta d\alpha}{dM}; \qquad B = \frac{\cos\delta d\alpha}{\delta\Pi}$$

u. s. w., so erhält man Gleichungen von der Form

$$A(\Delta M_0 + \delta M_0) + B(\Delta\Pi + \delta\Pi) + C\delta\Omega + D\delta i + E\delta\varphi + \\ + F\left(\frac{\Delta M_0}{3648} + \delta\mu\right) = N$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen 1):

$$\left(A + \frac{F}{3648}\right)\Delta M_0 + B.\Delta\Pi + (\alpha B + C + \lambda D)\delta\Omega + \\ + (PA + \beta B + E)\delta\varphi + (QA + \gamma B + F)\delta\mu = N. \qquad 2)$$

Die aus den Elementen von B_{I} gerechneten Differentialquotienten $A, B\ldots$ unterscheiden sich von den entsprechenden aus den Elementen von B_{II} bestimmten so wenig, dass die auf der linken Seite obiger Gleichung vorkommenden Coefficienten für gleiche Zeiten auch gleich angenommen werden können. Damit $\delta\mu$ sich einigermaßen sicher bestimmen lasse, muss je ein Normalort aus dem Jahre 1852 herangezogen werden.

Der Unterschied zwischen den Elementen beider Kometen lässt sich am einfachsten in der Weise berechnen, dass man von den für B_{II} geltenden Gleichungen 2) die entsprechenden für B_{I} abzieht, wodurch ΔM_0 und $\Delta\Pi$ in Wegfall kommen.

Die auf die provisorischen Normalörter gegründeten Rechnungen lassen deutlich erkennen, dass die zweite Hypothese Hubbards unhaltbar ist, indem nur durch die Annahme, dass der im Jahre 1846 folgende Komet B_{I} bei der nächsten Erscheinung vorausgieng, eine erträgliche Darstellung der Beobachtungen erreicht werden kann. Die Bestimmung des Zeitpunktes der Theilung ist mit bedeutender Unsicherheit behaftet; aus den für $T =$ 1844 Sept. 14·0 und 24·0 vollständig durchgeführten Rechnungen scheint hervorzugehen, dass die erste Annahme der Wahrheit näher kommt. Da die genaue Berechnung der Störungen, welche die beiden Kometen seit ihrer

Trennung erlitten haben, die Darstellung der Normalörter nicht unerheblich ändern kann, so glaube ich vorläufig nicht mehr sagen zu können, als dass die Theilung wahrscheinlich im September oder spätestens anfangs October 1844 stattgefunden hat.

Ich lasse hier noch die Darstellung aller Normalörter durch die zwei Systeme von Elementen folgen, welche aus den provisorischen Örtern der beiden Kometen für Jänner 24·0, Februar 17·0 und März 21·0 abgeleitet worden sind. Die Symmetrie der Darstellung der Örter des einen Kometen mit Bezug auf den anderen hat durch die Änderung von $\delta\mu$ um 0ʺ001, welche die spätere Einbeziehung der Beobachtungen vom Jahre 1852 erforderte, etwas gelitten, indem die Fehler in Declination für B_{I} allgemein größer geworden sind, als für B_{II}. Die Ergebnisse der Rechnung sind:

$$T = 1844 \text{ September } 14\cdot 0,$$
$$t_0 = 1846 \text{ März } 21\cdot 0,$$
$$\Delta M_0 = -4''060,$$
$$\Delta\mu = -0\cdot 001113 = \frac{\Delta M_0}{3648},$$
$$\Delta\Pi = -48\cdot 10.$$

	B_{I}	B_{II}
$\delta M_0 =$	$+\ 9''293$	$-31''357$
$\delta\Pi =$	$-21\cdot 59$	$+10\cdot 73$
$\delta\Omega =$	$+\ 4\cdot 85$	$-15\cdot 74$
$\delta i =$	$+\ 0\cdot 40$	$-\ 1\cdot 30$
$\delta\varphi =$	$-\ 0\cdot 51$	$-19\cdot 24$
$\delta\mu =$	$-\ 0\cdot 08747$	$+\ 0\cdot 08196$

Das der Störungsrechnung 1832 bis 1846 zugrundeliegende Elementensystem ist:

Äquinox 1832·0

1832 November 25·0 M. Z. Paris

$$\left.\begin{aligned} M &= 359^\circ\ 50'\ \ 1''31 \\ \Pi &= 109\ \ 58\ \ 59\cdot 50 \\ \Omega &= 248\ \ 13\ \ 53\cdot 50 \\ i &= 13\ \ 13\ \ 18\cdot 47 \\ \varphi &= 48\ \ 42\ \ 24\cdot 95 \\ \mu &= 533''78831 \end{aligned}\right\}\ \mathrm{I)}$$

Diese mittlere tägliche Bewegung ist noch um die Acceleration zu vermehren, so dass für die ersten 2431 Tage $\mu+0''056422$, von da ab $\mu+0''112844$ anzunehmen ist. Die Störungen, welche der Komet in der Zeit von 1832 November 25·0 bis 1846 Februar 11·0 durch die Planeten, deren Massenwerte dem Berliner Jahrbuche für 1901 entnommen sind, erfahren hat, betragen:

1846 Februar 11·0. Äquinox 1850·0.

	ΔM	$\Delta \Pi$	$\Delta \Omega$	Δi	$\Delta \varphi$	$\Delta \mu$
Venus	— 1' 3"271	+ 0' 1"195	— 0' 1"658	— 0' 0"435	+ 0' 12"695	—0"13508
Erde	+ 3 50·256	— 0 3·979	— 0 1·304	— 0 0·030	+ 0 2·796	—0·03257
Mars	+ 0 12·873	— 0 1·535	— 0 2·489	+ 0 0·551	+ 0 0·113	—0·00304
Jupiter	+273 5·150	—68 5·723	—146 33·061	—37 22·155	+26 57·220	+3·66081
Saturn	— 7 21·784	+ 1 19·609	— 5 4·720	— 1 0·791	+ 0 42·045	+0·04376
Uranus	— 0 1·329	— 0 0·470	— 0 2·451	— 0 0·433	— 0 1·580	—0·00070
Summe	+268 41·395	—66 50·903	—151 45·683	—38 23·293	+27 53·289	+3·53318
Reduction auf 1846·0		— 0·013	— 0·315	+ 0·080		

Um die Elemente für 1846 Februar 11·0 und das Äquinox 1846·0 zu erhalten, muss man die auf 1846·0 reducierten Störungsbeträge den obigen Elementen hinzufügen und außerdem noch ändern:

$$M \text{ um } 4826\mu + 2431 \times 0''056422 + 2395 \times 0''112844 =$$
$$= 355^\circ\ 34'\ 22''384 + 6'\ 47''422 = 355^\circ\ 41'\ 9''806,$$

$\Delta\Pi$ um die 14jährige Präcession $= +11'\ 42''497,$

Ω » » 14 » » $= +12\quad 10·908,$

i » » 14 » » $= -\ 0\quad 1·689,$

μ um den Betrag der Acceleration $= +\quad 0''11284.$

Dann erhält man

Äquinox 1846·0
1846 Februar 11·0 M. Z. Paris

$$\left.\begin{aligned} M &= 359^\circ\ 59'\ 52''51 \\ \Pi &= 109\quad 3\quad 51·08 \\ \Omega &= 245\quad 54\quad 18·41 \\ i &= \ 12\quad 34\quad 53·57 \\ \varphi &= \ 49\quad 10\quad 18·24 \\ \mu &= 537''43433 \end{aligned}\right\} \quad I')$$

Die den Zeiten der Normalörter entsprechenden Störungen der Planeten, welchen für die Dauer der Erscheinung des Kometen in 1845 bis 1846 auch Mercur beigesellt worden ist, sind, Februar 11·0 als Osculationsepoche angenommen, folgende:

1845 1846		ΔM	$\Delta\Pi$	$\Delta\Omega$	Δi	$\Delta\varphi$	$\Delta\mu$
December	25·5	−2′ 48″61	− 2″44	+1″06	+0″09	−2″15	+0″0209
Jänner	23·5	−1 5·57	− 1·64	+0·75	+0·28	−1·81	+ 184
Februar	6·5	−0 15·88	− 0·50	+0·30	+0·08	−0·56	+ 59
	14·5	+0 12·30	+ 0·45	−0·30	−0·06	+0·50	− 52
	18·5	0 26·31	1·02	−0·70	−0·13	1·11	− 119
März	2·5	1 7·89	3·16	−2·29	−0·29	3·31	− 363
	15·5	1 52·01	6·31	−4·54	−0·35	6·04	− 682
	21·5	2 12·09	8·03	−5·63	−0·33	7·19	− 825
März	28·5	+2 35·44	+10·06	−6·75	−0·28	+8·20	−0·0966

Die ΔM beziehen sich auf die mit dem ursprünglichen Wert von $\mu = 533''90115$ gerechneten M. Behufs Darstellung der von Hubbard angegebenen Normalörter vom Jahre 1852 wurde zuerst deren Reduction auf 1846·0 vorgenommen, dann das Elementensystem für 1846 Februar 11·0 M. Z. Paris durch Vermehrung der mittleren Anomalie um 3''488 und Verminderung von μ um 0''00001 auf mittlere Zeit Greenwich reduciert und hierauf mit Hilfe der Störungen für den Zeitraum 1846 Februar 11·0 bis 1852 September 23·0 (Astron. Journal, Vol. VI) die Übertragung der Elemente auf letztere Epoche bewerkstelligt. Die Störungen von September 23·0 ab sind nicht angegeben und mussten unberücksichtigt bleiben.

	Störungen 1846—1852		Äquinoxe 1846·0 1852 September 23·0 M. Z. Greenwich	
	B_I	B_{II}	B_I	B_{II}
M...	—2620''294	—2621''398	359° 56' 57''021	359° 56' 55''917
Π ...	+ 22·022	+ 21·917	109 4 13·10	109 4 13·00
☊ ...	— 479·787	— 480·514	245 46 18·62	245 46 17·90
i....	— 95·378	— 95·379	12 33 18·19	12 33 18·19
φ ...	— 236·234	— 236·309	49 6 22·01	49 6 21·93
μ ...	— 1·41543	— 1·41733	536·01889	536·01699

Die auf das wahre Äquinox des Datums bezogenen Örter des Kometen im Jahre 1852 sind:

	α	Reduciert auf 1846·0	δ	Reduciert auf 1846·0
1852 August 28·0 M. Z. Greenwich B_{II}..	115°34'50''5	—335''31	+20°50'47''9	+ 55''05
1852 September 21·0 M. Z. Greenwich B_{II}..	146 2 34·7	—304·90	+ 8 44 16·9	+106·03
1852 September 21·0 M. Z. Greenwich B_I..	145 35 18·1	—305·33	+ 8 58 25·0	+105·47

BI

	1845 Decemb. 25·5	1846 Jänner 23·5	1846 Februar 14·5	1846 März 2·5	1846 März 15·5	1846 März 28·5	1852 Sept. 21·0 Gr.
$t-t_0$	— 85·5	— 56·5	— 34·5	— 18·5	— 5·5	+ 7·5	+2376·006
$\Delta M_0+\delta M$	+ 5ʺ233	+ 5ʺ233	+ 5ʺ233	+ 5ʺ233	+ 5ʺ233	+ 5ʺ233	+ 5ʺ233
$(t-t_0)(\Delta\mu+\delta\mu)$	+ 7·574	+ 5·005	+ 3·056	+ 1·639	+ 0·487	— 0·664	— 3' 30ʺ468
Störung in M	— 2'48·610	— 1' 5·570	+ 0'12·300	+ 1' 7·890	+ 1'52·010	+ 2'35·440	— 43 40·294
M nach I'	—7° 2 47·793	—2°44 44·660	+0°31 1·165	+2°53 23·584	+4°49 4·299	+6°44 45·014	+0°22 45·277
M	—7 5 23·596	—2 45 39·992	+0 31 21·754	2 54 38·346	4 51 2·029	6 47 25·023	—0 24 20·252
Π	109 2 38·95	109 2 39·75	109 2 41·84	109 2 44·55	109 2 47·70	109 2 51·45	109 3 3·41
Ω	245 54 24·32	245 54 24·01	245 54 22·96	245 54 20·97	245 54 18·72	245 54 16·51	245 46 23·47
i	12 34 54·06	12 34 54·25	12 34 53·91	12 34 53·68	12 34 53·62	12 34 53·69	12 33 18·59
φ	49 10 15·58	49 10 15·92	49 10 18·23	49 10 21·04	49 10 23·77	49 10 25·93	49 6 21·50
μ	537ʺ3666	537ʺ3641	537ʺ3405	537ʺ3024	537ʺ2775	537ʺ2491	535ʺ9303
α	347 1 6·99	6 40 22·65	28 35 5·59	50 54 29·70	75 27 7·85	103 32 17·69	145 30 13·37
δ	+0 39 25·14	—1 12 34·59	—4 26 0·65	—8 54 35·01	—12 52 9·98	—14 34 45·45	+9 0 14·30
$B-R$ { Δα	+ 9·47	+ 5·80	+ 3·55	— 2·04	— 4·79	— 1·94	— 0·60
$B-R$ { Δδ	+ 6·99	— 1·28	— 2·56	— 4·46	— 4·51	— 3·70	— 3·83

B II

	1846 Jänner 23·5	1846 Februar 6·5	1846 Februar 18·5	1846 März 2·5	1846 März 21·5	1852 August 28·0 Gr.	1852 Sept. 21·0 Gr.
$\Delta M_0+\delta M$	− 35'417	− 35'417	− 35'417	− 35'417	− 35'417	− 35'417	− 35'417
$(t-t_0)(\Delta\mu+\delta\mu)$ ..	− 4·568	− 3·436	− 2·466	1·496	+ 0·040	+ 3'10·152	+ 3'12·093
Störung in M ...	− 1' 5·570	− 0'15·880	+ 0'26·310	+ 1' 7·890	+ 2'12·090	− 43 41·398	− 43 41·398
M nach I'	−2°44 44·660	−0°40 10·044	+1° 6 36·770	+2°53 23·584	+5°42 27·706	−3°11 39·127	+ 0°22 45·281
M	−2 46 30·215	−0 41 4·777	+1 6 25·197	+2 53 54·561	+5 44 4·419	−3 52 45·790	− 0 18 19·441
Π	109 3 12·07	109 3 13·21	109 3 14·73	109 3 16·87	109 3 21·74	109 3 35·63	109 3 35·63
Ω	245 54 3·42	245 54 2·97	245 54 1·97	245 54 0·38	245 53 57·04	245 46 2·16	245 46 2·16
i	12 34 52·55	12 34 52·35	12 34 52·14	12 34 51·98	12 34 51·94	12 33 16·89	12 33 16·89
φ	49 9 57·19	49 9 58·44	49 10 0·11	49 10 2·31	49 10 6·19	49 6 2·69	49 6 2·69
μ	537'5335	537'5210	537'5032	537'4788	537'4326	536'0978	536'0978
α	6 39 19·01	19 42 57·34	33 27 15·13	50 49 45·81	88 12 43·50	115 29 12·32	145 57 29·49
δ	−1 10 32·22	−2 50 1·60	−5 18 5·99	−8 47 8·45	−13 55 33·11	+20 51 48·13	+ 8 46 4·41
$B-R$ { $\Delta\alpha$	− 7·51	− 2·54	+ 1·47	+ 5·69	+ 7·20	+ 2·87	+ 0·31
$B-R$ { $\Delta\delta$ ...	+ 0·52	0·00	− 0·31	− 1·85	+ 1·31	− 5·18	− 1·48

Die bedeutenden Fehler in Declination für I B_I und VI B_{II} treten auch in Hubbards Darstellung (+6ʹ1, —5ʹ0) auf.

Hier sei auch bemerkt, dass ich die Störungen von 1846 bis 1852 verwechselt habe, indem ich von der Erscheinung in 1846 ausgehend, das »Preceding Nucleus« irrthümlich auf B_{II} bezogen habe. Auf die Darstellung der Normalörter hat dieser Fehler nur einen sehr schwachen Einfluss, indem derselbe für 1852 September 21·0 durch eine geringfügige, die Örter für 1846 so gut wie gar nicht afficierende Änderung von $\delta\mu$ fast vollständig ausgeglichen werden kann, da, wie die Differentialquotienten zeigen, nur der Unterschied in $M(1'')$ von Belang ist, der Unterschied der übrigen Elemente jedoch die Örter des Kometen höchstens um 0ʹ1 ändern kann.

Unter den Fehlern obiger Darstellung sind es besonders die in Rectascension, welche sowohl wegen ihrer Größe als auch wegen ihres im ganzen ziemlich regelmäßigen Ganges darauf hinweisen, dass die bisher gemachten Annahmen nicht ausreichend sind.

Durch Verlegung der Theilung auf einen anderen Zeitpunkt kann, so lange überhaupt eine einmalige Theilung angenommen wird, eine wesentliche Verbesserung der Darstellung nicht erzielt werden. Denn wären auch B_I und B_{II} nicht die einzigen Theile der Masse des ganzen Kometen, so müsste doch ihre Bewegung auf einen gemeinsamen, in der Bahn des ungetheilten Kometen gelegenen Ausgangspunkt hinweisen. Es lag nun der Gedanke nahe, dass die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Örtern sich wenigstens zum Theile durch wechselseitige Störungen der beiden Kometen erklären lassen.

Nimmt man an, dass die Größe der Kraft, die ja auch abstoßend wirken kann, dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sei, so erhält man in erster Annäherung die Änderung ξ der ungestörten Coordinate x aus der Gleichung

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = A \,.\, \frac{\Delta x}{\rho^3}; \quad \rho^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Der Anfangswert von ρ, für welchen die Kraftwirkung am größten ist, lässt sich aber nicht angeben, so dass weder die

absoluten Werte der Störungen, noch ihr Verhältnis zu der sie verursachenden Kraft bestimmt werden kann. Man kann aber leicht auf anderem Wege das angestrebte Ziel erreichen. Die in den Störungsgleichungen auftretenden Distanzen Δx, Δy und Δz können der Zeit proportional gesetzt werden, weil sie es anfänglich in der That sind und später die Abweichung von der Proportionalität durch die Division mit ρ^3 maskiert wird.

Aus

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{a}{t^2}; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{b}{t^2}; \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{c}{t^2}$$

ergibt sich sofort

$$\eta = \frac{b}{a}\xi; \qquad \frac{b}{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

$$\zeta = \frac{c}{a}.\xi; \qquad \frac{c}{a} = \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Da unmittelbar nach der Theilung die störenden Kräfte am stärksten wirken und sehr rasch an Intensität abnehmen, wird man die Verhältnisse $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ am zweckmäßigsten aus den Änderungen der Coordinaten während des Vorganges der Theilung bestimmen. Man bedarf aber noch der Kenntnis der Änderung von ξ mit der Zeit, um die Störungen für verschiedene Zeiten auf einander beziehen zu können.

Für $t = 0$ müssen sowohl ξ, als auch $\frac{d\xi}{dt}$ gleich Null sein. Angenommen, dass

$$t = \varepsilon + \tau,$$

wo ε eine sehr kleine Größe bedeuten soll, und dass für $\tau = 0$,

$$\xi = \gamma$$

$$\frac{\partial\xi}{dt} = \gamma',$$

so gibt die Integration von $\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{a}{t^2}$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \gamma' + \frac{a}{\varepsilon} - \frac{a}{\varepsilon+\tau},$$

$$\xi = \gamma + \left(\gamma' + \frac{a}{\varepsilon}\right)\tau + a \log \text{nat.} \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\tau}.$$

Wird nun ε im Vergleiche zu τ verschwindend klein, so genügt es anzunehmen

$$\frac{d\xi}{\partial\tau} = \frac{a}{\varepsilon}; \qquad \xi = \frac{a}{\varepsilon}\tau + a \log \text{nat.}\, \varepsilon$$

oder

$$\frac{\xi}{\frac{d\xi}{\partial\tau}} = \tau + \varepsilon \log \text{nat.}\, \varepsilon;$$

$\varepsilon \log \text{nat.}\, \varepsilon$ nähert sich aber bei abnehmendem ε der Grenze Null, weshalb gesetzt werden kann

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{t}.\xi.$$

Bedeutet T den Zeitpunkt der Theilung und ist für $t = t_0$, $\xi = \xi_0$, so wird

$$\xi = \xi_0\left(1 + \frac{t-t_0}{t_0-T}\right); \quad \eta = \xi.\lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right); \quad \zeta = \xi.\lim\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right).$$

Es ist aber

$$\lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{d}{dt}\delta y : \frac{d}{dt}\delta x; \qquad \lim\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = \frac{d}{dt}\delta z : \frac{d}{dt}\delta x;$$

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$
$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$
$$z = r \sin u \sin i.$$

Es sei ferner

$$X = r(\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i),$$
$$Y = r(\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i),$$
$$Z = r \cos u \sin i,$$

so wird, da für $t = T$:

$$\delta r = 0,$$

$$\delta u = -\cos i . \delta\Omega,$$

$$\delta i = \frac{\sin i}{\operatorname{tg} u} . \delta\Omega,$$

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{x}{r}\delta\left(\frac{dr}{dt}\right) - X\delta\left(\frac{du}{dt}\right) + r\frac{\sin\Omega . \sin^2 i}{\sin u}\frac{du}{dt} . \delta\Omega,$$

$$\frac{d\delta y}{dt} = \frac{y}{r}\delta\left(\frac{dr}{dt}\right) - Y\delta\left(\frac{du}{dt}\right) - r\frac{\cos\Omega . \sin^2 i}{\sin u}\frac{du}{dt} . \delta\Omega,$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{z}{r}\delta\left(\frac{dr}{dt}\right) + Z\delta\left(\frac{du}{dt}\right) + r\frac{\sin i . \cos i}{\sin u}\frac{du}{dt} . \delta\Omega,$$

$$\delta\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{a . \delta\mu}{3\cos\varphi}\left(e\sin v + \frac{2p}{r}\frac{\cos v}{\sin v}\right) + \frac{kp\sqrt{a}}{r^2\sin v}\delta\varphi,$$

$$\delta\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{1}{3}\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi . \delta\mu - \frac{k\sqrt{a}\sin\varphi}{r^2}\delta\varphi,$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}.$$

Die hier auftretenden Variationen der Elemente sind aus der Differenz der Variationen für B_{I} und B_{II} zu bilden, während die vom Kometenort abhängigen Größen aus den Elementen des ungetheilten Kometen für T abzuleiten sind. Für $T = 1844$ September 14·0 wird

$$\delta\Omega = -20{\cdot}59 \times \sin 1'',$$

$$\delta\varphi = -18{\cdot}73 \times \sin 1'',$$

$$\delta\mu = +0{\cdot}16943 \times \sin 1''.$$

$T - t_0 = -553$ Tage.

Äquinox 1846·0	Ungetheilter Komet	B_I	B_{II}
$\Delta M_0 + \delta M$	— 4ʺ060	+ 5ʺ233	— 35·417
$(T - t_0)(\Delta\mu + \delta\mu)$.....	+ 0·615	+ 48·985	— 44·708
M nach I′+Störung ..	282° 58′ 23·200	282° 58′ 23·200	282°58′23·200
M	282 58 19·755	282 59 17·418	282 57 3·075
Π	109 7 7·86	109 6 46·27	109 7 18·59
☊	245 58 1·91	245 58 6·76	245 57 46·17
i	12 34 57·91	12 34 58·31	12 34 56·61
φ	49 10 40·47	49 10 39·96	49 10 21·23
μ	538ʺ39750	538ʺ31003	538ʺ47946

Diese Elemente geben den gemeinsamen Ausgangspunkt

$$l = 314° 50' 7''84,$$
$$b = +11\ 45\ 39·58,$$
$$\log r = 0·6703472.$$

Man erhält ferner

$$\log \frac{d\delta x}{dt} = 4·12154-10,$$

$$\log \frac{d\delta y}{dt} = 4_n·11975-10,$$

$$\log \frac{d\delta z}{dt} = 3·45056-10.$$

Daher

$$\log \lim. \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 9_n·99821-10,$$

$$\log \lim. \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = 9·32902-10.$$

Aus den Änderungen der Elemente ergeben sich die Componenten der Kraft, welche die Theilung bewirkt hat, in der Richtung des Radiusvector und senkrecht hiezu, wie folgt:

$$\log R = 5·95145-10,$$
$$\log S = 2·65355-10,$$
$$\log W = 4_n·69593-10$$

und durch Addition von $\log k\sqrt{p}$ die Geschwindigkeitsänderungen in diesen Richtungen:

$$4\cdot27539-10,$$
$$0\cdot97749-10,$$
$$3^{n}01987-10.$$

Die Summe der Quadrate dieser Geschwindigkeiten ist gleich $\left(\frac{d\delta x}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\delta y}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)^2$.

Indem man für die Zeiten der Normalörter ξ, η, ζ als Functionen von ξ_0 ausdrückt, erhält man durch Übertragung auf den Äquator und Umwerthung in Polarcoordinaten die Größen $\frac{\cos\delta dx}{\xi_0}$ und $\frac{d\delta}{\xi_0}$, welche folgende Werte besitzen:

B$_{\text{I}}$.

	1845 Dec. 25·5	1846 Jän. 23·5	1846 Febr. 14·5	1846 März 2·5	1846 März 15·5	1846 März 28·5	1852 Sept. 21·0
$\Delta\alpha$	+9^{s}47	+5^{s}80	+3^{s}55	—2^{s}04	—4^{s}79	—1^{s}94	—0^{s}60
$\frac{\cos\delta d\alpha}{\xi_0}$	—0·71	—1·38	—2·35	—3·19	—3·21	—1·94	+0·92
$\Delta\delta$	+6·99	—1·28	—2·56	—4·46	—4·51	—3·70	—3·83
$\frac{d\delta}{\xi_0}$	—0·20	—0·23	—0·29	—0·50	—0·94	—1·31	+0·07

B$_{\text{II}}$.

	1846 Jän. 23·5	1846 Febr. 6·5	1846 Febr. 18·5	1846 März 2·5	1846 März 21·5	1852 Aug. 28·0	1852 Sept. 21·0
$\Delta\alpha$	—7^{s}51	—2^{s}54	+1^{s}47	+5^{s}69	+7^{s}20	+2^{s}87	+0^{s}31
$\frac{\cos\delta d\alpha}{\xi_0}$	—1·38	—1·95	—2·57	—3·19	—2·77	—1·73	+0·92
$\Delta\delta$	+0·52	0·00	—0·31	—1·85	+1·31	—5·18	—1·48
$\frac{d\delta}{\xi_0}$	—0·23	—0·26	—0·32	—0·50	—1·16	+1·05	+0·07

Der absolute Wert von ξ_0 für B_I kann von dem für B_{II} sehr verschieden sein; das Vorzeichen aber muss entgegengesetzt sein. Es ist leicht zu sehen, dass eine erhebliche Verbesserung der Darstellung durch Berücksichtigung der wechselseitigen Störungen nicht eintritt, sowie dass ξ_0 den Betrag von wenigen Secunden nicht übersteigen kann.

Vor Abschluss der Berechnung der Störungen, welche beide Kometen seit ihrer Trennung durch die Planeten, von welchen einige ihnen ziemlich nahe gekommen sind, erfahren haben, lässt sich der Nachweis von Störungen, welche B_I durch B_{II} (oder umgekehrt) erlitten hat, nicht erbringen und bleibt auch die Frage noch offen, ob die Annahme einer einmaligen Theilung des Mutterkometen vollständig ausreichend ist.

Über die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten eines Magnetes vom Momente

von

Max Prodinger.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1900.)

Die Erscheinung, dass der Magnetismus eines Magnetes mit steigender Temperatur abnimmt, bei Rothgluthitze auf ein kaum wahrnehmbares Maß sinkt und in der Weißgluthitze vollständig verschwindet, dass also der Magnetismus von der Temperatur in hohem Grade beeinflusst wird, war von jeher ein Gegenstand des Interesses und der Aufmerksamkeit der Physiker.

So beschäftigte sich Gaugain[1] mit der Verminderung der permanenten Magnetisierung beim Erwärmen und der Vermehrung des permanenten Magnetismus beim Erkalten.

J. Trowbridge[2] berichtet »über die Wirkungen großer Kälte auf den Magnetismus«.

Es üben aber auch Temperaturänderungen in engeren Grenzen einen entschiedenen Einfluss auf die Stärke der Magnete aus, Temperaturdifferenzen, die wir im täglichen Leben oft zu bemerken imstande sind, wie z. B. die Temperaturschwankungen in unseren Wohnräumen und im Freien, in den verschiedenen Jahreszeiten u. s. w.

Dem theoretischen Interesse, die Einflüsse solcher alltäglich vorkommender Temperaturschwankungen auf die Magnete

---

[1] Beiblätter zu Wiedemanns Annalen für Physik, Bd. II, S. 283.

[2] Ebenda, Bd. V, S. 614.

genauer kennen zu lernen, schließt sich eng das praktische Bedürfnis an. Die Einflüsse der Temperaturschwankungen auf Magnete äußern sich ja bei allen Instrumenten und Apparaten, bei denen Magnete irgendwie in Verwendung kommen, in hervorragendem Maße, und es ist bei genaueren Untersuchungen, z. B. bei erdmagnetischen Messungen, die genaue Kenntnis der durch die Temperatur auf die Magnete ausgeübten Einflüsse ganz unerlässlich.

Man nennt nun die durch eine Temperaturerhöhung von $+1°$ hervorgebrachte relative Abnahme des Magnetismus den Temperaturcoefficienten eines Magnetes. Bisher ist der Temperaturcoefficient für einzelne Magnete wiederholt bestimmt worden, da man den Wert desselben bei verschiedenen Beobachtungen, insbesondere bei erdmagnetischen Messungen, gebraucht hat. Es liegen jedoch nur wenige Untersuchungen über die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten von äußeren Umständen, wie z. B. den Dimensionen des Magnetes, der Stärke seines Magnetismus, der Härtung u. s. w. vor.

Was die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten vom Momente anbelangt, so wären zu nennen die Untersuchungen von Unverdorben über die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten von der Stärke des Magnetismus, welche Dr. J. Lamont[1] bespricht. Er sagt darüber, dass bei stufenweisem Verstärken des Magnetismus der Temperaturcoefficient bei hartem Stahl und Eisen immer kleiner, bei weichem Stahl und Eisen immer größer wird.

»Geht man aber von einem starken Magnetismus aus und sucht durch entgegengesetztes Streichen eine geringere Kraft herbeizuführen, so tritt ein ganz anderes Verhältnis ein, welches nur dadurch zu erklären sein möchte, dass man das Nebeneinanderbestehen zweier Momente, eines primitiven und secundären, annimmt, welches jedes seinen eigenen Temperaturcoefficienten hat. Die allgemeine Verstärkung des secundären Momentes hat zunächst den Erfolg, dass der Temperaturcoefficient immer größer wird; sobald aber das secundäre Moment das Übergewicht erhält, erscheint der Temperatur-

[1] Handbuch des Magnetismus, von Dr. J. Lamont, Leipzig, 1867, S. 396.

coefficient mit einem negativen Werte, schnell dem Verschwinden sich nähernd. Nach dem Verschwinden wird er positiv und nimmt allmählich zu, so dass mit der vollständigen Umkehrung der beiden Pole der ursprüngliche Temperaturcoefficient wieder zum Vorschein kommt.«

Auch Wüllner[1] berührt die Frage nach dem Zusammenhange zwischen Temperaturcoefficienten und Moment, indem er sagt: »Der dauernde Verlust, den ein Stab durch Erwärmen erleidet, nimmt zu mit der Dicke des Stabes; er ist größer bei hohlen als bei massiven Magnetstäben, ferner größer bei kürzeren als bei längeren Stäben. Harte Stäbe verlieren bedeutend mehr als weiche. Der temporäre Verlust, den Magnetstäbe nach oftmaligem Erwärmen und Abkühlen bei jeder Temperaturerhöhung zeigen, nimmt unter übrigens gleichen Zuständen mit der Temperatur zu.

Ist M der Magnetismus eines Stabes bei der Temperatur t und M' der Magnetismus eines Stabes bei der Temperatur t', so lässt sich M' darstellen durch die Gleichung

$$M' = M\{1 - a(t' - t) - b(t' - t)^2\}.$$

Die Constanten a und b hängen ebenfalls wieder von vielen Umständen, von der Stärke des Magnetismus, der Beschaffenheit des Stabes u. s. w. ab. Es fehlen darüber noch genauere Bestimmungen. In vielen Fällen scheint man $b = 0$ setzen zu können, so dass

$$M' = M\{1 - a(t' - t)\}$$

der Verlust der Temperaturerhöhung proportional ist.«

Cancani[2] stellte Untersuchungen über den Temperaturcoefficienten an und erhielt das Resultat, dass für dünne Magnete die Temperaturcoefficienten sehr klein sind, bei constantem Durchmesser sich dieselben im umgekehrten Verhältnisse zur Länge vermindern, für Hohlmagnete fast gleich denen für Vollmagnete sind und dass sie bei gleicher Länge mit dem Durchmesser wachsen.

---

[1] Wüllner, Experimentalphysik, III. Bd., S. 136 (neueste Auflage).

[2] Beiblätter zu Wiedemanns Annalen für Physik, Bd. XI, S. 733.

Weitere Untersuchungen über die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten vom Dimensionsverhältnisse bei Magneten, wie sie in der Praxis vorkommen, sind erst jüngst von Dr. Klemenčič[1] veröffentlicht worden. Als Resultat dieser an 18 Magnetstäben vorgenommenen Untersuchung kann das bemerkenswerte Gesetz bezeichnet werden, dass der Temperaturcoefficient umgekehrt proportional dem Dimensionsverhältnisse verläuft und dass dieses Gesetz beiläufig für die Temperaturgrenzen zwischen 9° und 32° und für Dimensionsverhältnisse, die etwa zwischen 10 und 37 liegen, gilt.

Während also die Frage nach dem Zusammenhange zwischen Dimensionsverhältnis und Temperaturcoefficient wenigstens innerhalb gewisser Grenzen beantwortet erscheint, kann das für die Frage nach dem Zusammenhange zwischen Moment und Temperaturcoefficient nicht behauptet werden.

Bei der vorliegenden Untersuchung handelte es sich also darum, ob sich der Temperaturcoefficient bei verschiedenen Momenten ändert und, wenn dies der Fall ist, in welchen Beziehungen die Änderung des Temperaturcoefficienten zum Momente steht.

Die Beantwortung dieser Frage erschien umso wünschenswerter, da seit den von Lamont citierten Untersuchungen überhaupt keine weiteren Beobachtungen in dieser Richtung gemacht wurden und diese Beobachtungen selbst auf einen ganz besonders complicierten und sonderbaren Zusammenhang zwischen Temperaturcoefficient und Moment hindeuten.

Um eine allgemein giltige Relation zu bekommen, mussten mit Rücksicht darauf, dass Dicke, Länge, Dimensionsverhältnis, Härtung auf das Verhalten des Magnetes von Einfluss sind, die Untersuchungen an verschieden gestalteten Stücken vorgenommen werden, und zwar wurden acht prismatische Magnetstäbe von quadratischem Querschnitte untersucht, deren nähere Daten ich in Tabelle I angebe.

In der Tabelle I bedeuten:

»Bez« die Bezeichnung der Magnete.

L die genaue Länge in Millimetern.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 108, Jahrgang 1899.

S die Seitenlänge, und zwar als Mittel aus drei Abmessungen am Nordpol, in der Mitte und am Südpol.

V das genaue Dimensionsverhältnis $\frac{L}{S}$.

σ den specifischen Widerstand in Mikrohm.

G das Gewicht in Gramm.

m den specifischen Magnetismus, bezogen auf 1 *g*.

Tabelle I.

»Bez.«	*L*	*S*	*V*	σ	*G*	*m*
$R_{7 \cdot 5}$	75·0	6·95	10·79	32·3	30·2	21·1
45, 10	100·0	3·93	25·4	38·6	12·03	62·1
Z_{10}	100·0	9·86	10·14	31·2	79·0	20·3
Nr. 9	53·9	5·37	10·03	46·2	12·4	26·4
β_6	60·0	9·20	6·52	39·8	41·6	11·3
00, 15	150·3	3·96	37·6	43·9	18·74	69·2
Nr. 7	136·5	5·40	25·28	40·8	31·8	60·3
Nr. 1	167·0	7·26	23·00	36·8	69·7	49·0

Die Magnetisierung der einzelnen Stücke geschah nicht durch Streichen, sondern auf die jetzt wohl allgemein übliche Weise dadurch, dass der Magnet im homogenen Felde einer langen Spule den Wirkungen eines elektrischen Stromes, und zwar bei mehrmaligem Stromwechsel und bei plötzlicher Unterbrechung des Stromes ausgesetzt wurde.

Der specifische Widerstand der Probestücke, der für deren Härte charakteristisch ist, wurde mit Hilfe zweier, 4 *cm* entfernter Stahlschneiden, auf welche der Magnet gelegt wurde, bestimmt. Er war neben einem Vergleichswiderstande von 0·0017 Ohm in einen Stromkreis geschaltet, und es wurde mit Hilfe eines Rubens-du Bois-Galvanometers der Potentialunterschied zwischen dem Vergleichswiderstande und den Stahlschneiden gemessen.

Die Untersuchungsmethode.

Zur Bestimmung des Temperaturcoefficienten wurde die Weber'sche Compensationsmethode[1] verwendet, allerdings mit der Änderung, dass die Wirkung des von Weber verwendeten Hilfsmagneten durch die Wirkung einer in der Nähe der Magnetometernadel angebrachten, von einem elektrischen Strom durchflossenen Spule ersetzt wurde. Es ist auf diese Weise ermöglicht, die Einstellung der Magnetometernadel auf 0 zurückzuführen, indem man den Strom durch Ein- und Ausschalten von Widerständen im Stromkreise variiert.

Der Untersuchungsmagnet wurde in einem Calorimeter in der ersten Hauptlage dem Magnetometer gegenübergestellt. Betreffs genauer Beschreibung der verwendeten Apparate und Anordnung verweise ich auf die in der Einleitung citierte Arbeit des Herrn Prof. Dr. Klemenčič (S. 244 bis 247).

Der Temperaturcoefficient wurde nach der Formel

$$\mu = \frac{\alpha}{t_1 - t_2} \cdot \frac{w}{W\varphi}$$

bestimmt, wobei α den Stellungsunterschied an der Scala für die Temperaturen t_1 und t_2 bedeutet, φ der Ausschlag der Magnetometernadel beim Widerstande W im Stromkreise und w der Widerstand im Falle der Compensation ist. Als W wurde bei allen Untersuchungen ein Widerstand von 68.380 Ohm verwendet; w setzt sich zusammen aus dem eingeschalteten Compensationswiderstande und dem Widerstande in der Magnetometerrolle, der 118 Ohm betrug, und wurde zwischen 1000 und 4000 Ohm variiert.

Als Beobachtungstemperaturen wurde eine Temperatur von 7° bis 11° durch Eingießen von Wasserleitungswasser und eine Temperatur von 30° bis 34° durch Eingießen eines vorgewärmten Wassers hervorgebracht, gewählt.

Beobachtet wurde nun folgendermaßen:

Nachdem der Probemagnet in das Calorimeter eingelegt und möglichst genau in die erste Hauptlage gebracht war,

[1] Kohlrausch, Praktische Physik, 8. Auflage, S. 276.

wurde das Calorimeter auf eine angemessene Entfernung an das Magnetometer herangeschoben und die Ablenkung mit Hilfe eines von zwei Accumulatoren gelieferten Stromes, dessen Stärke durch Variieren des in den Stromkreis geschalteten Widerstandes w geregelt wurde, compensiert.

In das Calorimeter wurde sodann abwechselnd kaltes und warmes Wasser gegossen, und zwar wurden bei jeder einzelnen Untersuchung neun Füllungen gemacht, woraus vier Werte für den Einstellungsunterschied bei höherer und niederer Temperatur erfolgen. Vor jeder Beobachtung wurde das Wasser im Calorimeter gemischt, eine kurze Zeit gewartet und dann die Einstellung an dem Thermometer und der Scala abgelesen. Nach neun Füllungen wurde der Magnet entfernt und die compensierte Ablenkung bestimmt, indem in den Stromkreis ein großer Widerstand W eingeschaltet wurde, der eine an der Scala ablesbare Ablenkung ergab, aus der sich bei dem bekannten Verhältnisse der Widerstände die compensierte Ablenkung berechnen ließ.

Sämmtliche Probestücke wurden an beiden Polen beobachtet und aus den erhaltenen Werten das Mittel genommen.

Bei fast allen Momenten wurde aus mehreren Entfernungen beobachtet, bei den kleinsten Momenten und dünnsten Magneten war eine Beobachtung zwar nur aus einer sehr nahen Entfernung möglich, um noch verwendbare Scalenablesungen zu erhalten; es wurden daher, um die Genauigkeit der Werte zu erhöhen, eine größere Zahl von Beobachtungen für dieselbe Entfernung gemacht und die Resultate zu einem Mittelwerte zusammengezogen.

Sämmtliche bei einem und demselben Momente erhaltenen Werte wurden wiederum zu einem Mittelwerte vereinigt, welcher dann als »Temperaturcoefficient bei dem bestimmten Momente« genommen wurde.

Bei den Magneten $R_{7 \cdot 5}$ und 45, 10 wurden zwei Beobachtungsreihen durchgeführt, indem das einemal bei der Magnetisierung vom schwachen Momente angefangen und stufenweise zum Maximum des Momentes gegangen wurde, das zweitemal vom Maximum begonnen und stufenweise zu kleinen Momenten magnetisiert wurde.

Bei Magnet Z_{10}, der bei einer größeren Anzahl von Momenten beobachtet wurde, wurden mehreremale die Pole durch Ummagnetisieren gewechselt, ebenso wurde Magnet 45, 10 beim Maximum ummagnetisiert, desgleichen Magnet Nr. 7.

Ich gebe nun in Tabelle II ein vollständiges Schema einer einzelnen Untersuchung. Es ist die Untersuchung des Magnetes $R_{7\cdot 5}$ beim Maximum des Momentes (640 a. E.) bei zugekehrtem Südpole.

Unter Sc. sind die einzelnen Scalenablesungen,

unter α die Stellungsunterschiede derselben,

unter t die Temperaturen der jeweiligen Füllung in Celsiusgraden,

unter Δt die herrschenden Temperaturdifferenzen,

unter T die mittlere Beobachtungstemperatur $= \frac{\Sigma t}{2}$ verstanden;

in der letzten Rubrik sind die einzelnen Quotienten $\frac{\alpha}{\Delta t}$, welche zu einem Mittelwerte vereinigt werden, angegeben.

w ist der Compensationswiderstand,

φ der beim Widerstande W beobachtete Ausschlag.

Tabelle II.

$w = 3010 + 118 = 3128.$

Sc.	α	t	Δt	T	$\frac{\alpha}{\Delta t}$
377·5		9·91			
397·8	20·1	33·49	23·33	26·91	0·8626
377·9		10·42			
397·5	20·0	34·00	23·69	27·31	0·8436
377·1		10·20			
397·9	20·6	34·35	24·15	27·37	0·8512
377·5		10·2			
397·8	20·1	33·21	23·08	26·73	0·8701
377·9		10·06	Mittel...	27·16	0·8568

$$\varphi = 82 \cdot 75$$

$$\text{Temp.-Coeff. } \mu = \frac{\alpha}{\Delta t} \cdot \frac{w}{\varphi W} = \frac{0 \cdot 8568.3128}{68 \cdot 380.82 \cdot 75} = 0 \cdot 000468.$$

In den folgenden Tabellen sind die Werte für μ bei den einzelnen untersuchten Magneten verzeichnet. In jeder Tabelle sind die Werte für das Moment in derselben Reihenfolge aufgeführt, wie sie thatsächlich nacheinander untersucht wurden. Die zweifachen Untersuchungen der Magnete $R_{7 \cdot 5}$ und 45, 10 wurden in je eine Tabelle zusammengefasst. In diesen nun folgenden Tabellen bedeutet:

M das magnetische Moment,

w den Compensationswiderstand,

μ den Temperaturcoefficienten, und zwar den Mittelwert aus je einer Beobachtung von Nord- und Südpol;

μ_0 das Mittel aus allen Werten des Temperaturcoefficienten bei einem Momente;

T die mittlere Temperatur der Beobachtung $= \frac{t_1 + t_2}{2}$.

Die Resultate.

Tabelle III.

Magnet $R_{7\cdot5}$: $L = 75\,mm$, $S = 6\cdot95\,mm$, $V = 10\cdot79$.

M	*w*	μ	μ_0	*T*
600	1148	0·000447	0·000467	21·26
	2178	480		22·00
	3173	474		21·20
412	1368	0·000469	0·000456	22·13
	3418	444		23·42
356	1308	0·000435	0·000448	21·87
	2168	455		21·40
	3168	453		22·00
154	3128	0·000417	0·000423	21·81
	4128	430		21·50
330	2128	0·000460	0·000446	22·10
	3128	433		21·95
526	2128	0·000431	0·000438	21·32
	3128	445		21·71
640*	3128	0·000460	0·000466	22·73
	4128	473		21·91

Tabelle III*a*.

M	μ_0
154	0·000423
330	446
356	448
412	456
526	438
600	467
640*	466

* bedeutet, dass der Magnet ummagnetisiert war.

Tabelle IV.

Magnet 45,10: $L = 100\cdot0\,mm$, $S = 3\cdot93\,mm$, $V = 25\cdot4$.

M	w	μ	μ_0	T
700	2118	0·000191	0·000192	22·28
	3118	194		22·53
450	1168	0·000162	0·000165	23·10
	2168	168		23·24
366	2118	0·000159	0·000159	22·60
	3118	159		22·23
109	3018	0·000113	0·000111	22·19
	4318	109		21·67
220	2128	0·000146	0·000145	22·17
	3128	145		22·36
556	2128	0·000168	0·000168	22·26
	3128	169		22·49
744	2128	0·000198	0·000196	21·96
	3128	195		22·10
*745	2128	0·000194	0·000194	22·94
	3128	194		23·06

Tabelle IV*a*.

M	μ_0
109	0·000111
220	145
366	159
450	165
556	168
700	192
744	196
*745	194

Tabelle V.

Magnet Z_{10}: $L = 100 \cdot 0\, mm$, $S = 9 \cdot 86\, mm$, $V = 10 \cdot 14$.

M	*w*	μ	μ_0	*T*
209	1588	0·000422	0·000425	19·31
	3470	427		19·44
541	1518	0·000424	0·000424	18·73
	2318	422		19·58
	3118	425		20·40
836	1118	0·000425	0·000422	19·50
	2738	419		20·84
1003	1388	0·000419	0·000421	20·00
	3318	424		20·91
1237	2118	0·000416	0·000424	21·24
	4118	433		21·24
1321	1118	0·000414	0·000425	21·92
	4118	436		21·34
1438	1618	0·000428	0·000424	20·68
	4118	420		20·66
1700	1358	0·000440	0·000426	21·02
	4318	412		21·34

Tabelle V*a*.

M	μ_0
209	0·000425
541	424
836	422
1003	421
1237	424
1321	425
1438	424
1700	426

Tabelle VI.

Magnet Nr. 9: $L = 53 \cdot 9\ mm$, $S = 5 \cdot 37\ mm$, $V = 10 \cdot 03$.

M	w	μ	μ_0	T
154	4128 4128	0·000239 228	0·000233	21·70 22·17
300	3128 4128	0·000296 295	0·000295	22·27 20·72
328	3128 4128	0·000303 313	0·000308	22·77 22·17

Tabelle VII.

Magnet B_6: $L = 60\ mm$, $S = 9 \cdot 20\ mm$, $V = 6 \cdot 52$.

M	w	μ	μ_0	T
140	3128 4128 5518	0·000406 407 400	0·000404	21·50 20·85 22·12
301	2118 3158 4118	0·000400 410 408	0·000406	21·96 21·45 21·66
473	1628 3128 4118	0·000400 409 408	0·000406	20·58 20·73 21·28
569	1478 2518 3818	0·000409 406 401	0·000405	22·02 22·10 21·56

Tabelle VI*a*.

Magnet Nr. 9.

M	μ_0
154	0·000233
300	295
328	308

Tabelle VII*a*.

Magnet B_6.

M	μ_0
140	0·000404
301	406
473	406
559	405

Tabelle VIII.

Magnet 00,15: $L = 150\cdot3$ *mm*, $S = 3\cdot96$ *mm*, $V = 37\cdot6$.

M	w	μ	μ_0	T
610	2568	0·000100	0·000102	21·62
	2568	104		21·37
1047	1468	0·000135	0·000132	21·01
	1468	130		21·60
1333	1158	0·000136	0 000136	21·42
	1158	137		20·91

Tabelle IX.

Magnet Nr. 7: $L = 136\cdot5$ *mm*, $S = 5\cdot4$ *mm*, $V = 25\cdot28$.

M	w	μ	μ_0	T
550	2758	0·000126	0·000126	21·13
	2758	126		21·37
1240	1328	0·000157	0·000155	21·05
	1328	153		21·30
1702	1318	0·000185	0·000185	21·58
	2918	186		21·15
1919	1498	0·000187	0·000189	21·13
	2818	191		21·31

Tabelle VIII*a*.

Magnet 00,15.

M	μ_0
610	0·000102
1047	132
1333	136

Tabelle IX*a*.

Magnet Nr. 7.

M	μ_0
550	0·000123
1240	155
1702	185
1919	189

Tabelle X.

Magnet Nr. 1: $L = 167 \cdot 0\, mm$, $S = 7 \cdot 26\, mm$, $V = 23 \cdot 00$.

M	n'	μ	μ_0	T
773	2568	0·000146	0·000147	20·56
	2568	149		20·40
1313	2618	0·000214	0·000214	21·02
	2618	215		20·65
3210	838	0·000295	0·000294	20·82
	2628	294		20·68
3420	918	0·000294	0·000296	20·58
	2218	298		20·30

Tabelle X*a*.

M	μ_0
773	0·000147
1313	214
3210	294
3420	296

Aus den hier mitgetheilten Beobachtungsresultaten lassen sich nun folgende Consequenzen ziehen:

Was zunächst die eine Frage, nämlich die Richtigkeit der von Lamont und Unverdorben ausgesprochenen Ansichten anbetrifft, so bestätigen sich dieselben nicht, vielmehr geht aus den an den Magneten $R_{7 \cdot 5}$ und 45, 10 vorgenommenen Untersuchungen hervor, dass im Verhalten des Temperaturcoefficienten zum Momente keine Änderung eintritt, ob man nun bei der Magnetisierung von kleineren Momenten stufenweise nach aufwärts oder vom Maximum der Magnetisierung stufenweise zu kleineren Momenten geht.

Nicht in so einfacher Weise erledigt sich die Frage nach den Beziehungen zwischen Temperaturcoefficient und Moment.

Aus der Betrachtung der gewonnenen Werte ergibt sich Folgendes:

1. Bei den Magneten 45,10; 00,15; Nr. 7 und Nr. 1, welche Dimensionsverhältnisse zwischen 23·00 und 37·6 aufweisen und deren Dicken zwischen 4 *mm* und 7·3 *mm* liegen, ist eine ganz ausgesprochene Zunahme des Temperaturcoefficienten mit dem Momente zu constatieren. Die specifischen Widerstände dieser Magnete liegen zwischen 36·8 und 43·9 Mikrohm.

2. Bei den Magneten $R_{7\cdot5}$ und Nr. 9 mit den Dimensionsverhältnissen 10·79, beziehungsweise 10·03 und den Dicken 6·95 *mm*, beziehungsweise 5·37 *mm* findet ein zwar weniger starkes, aber immerhin noch gut constatierbares Anwachsen des Temperaturcoefficienten mit dem Momente statt, und zwar bei Nr. 9 beträchtlich stärker als bei $R_{7\cdot5}$. Die specifischen Widerstände betragen hier 32·3 und 46·2 Mikrohm.

3. Bei den Magneten Z_{10} und B_6 mit den Dimensionsverhältnissen 10·14 und 6·52 und den Dicken 9·86 *mm* und 9·20 *mm* ist ein Anwachsen des Temperaturcoefficienten mit dem Momente nicht mehr zu constatieren. Eine Betrachtung der Werte deutet übrigens darauf hin, dass hier der Temperaturcoefficient vom Momente unabhängig und eine constante Größe ist. Die specifischen Widerstände sind hier 31·2 und 39·8 Mikrohm.

Aus diesen Daten lässt sich nun Folgendes entnehmen:

Der specifische Widerstand, der zwar auf die Größe des Temperaturcoefficienten entschiedenen Einfluss hat, scheint auf die Beziehungen zwischen Temperaturcoefficient und Moment keinen Einfluss zu haben.

Für die Änderung des Temperaturcoefficienten mit dem Momente sind zwei Umstände maßgebend, nämlich das Dimensionsverhältnis und die Dicke.

Bei Magneten mit großem Dimensionsverhältnisse (23·0 bis 37·6) und geringer Dicke (4 *mm* bis 7·3 *mm*) ist ein ausgesprochenes Anwachsen des Temperaturcoefficienten mit dem Momente zu constatieren.

Bei Magneten, deren Dicken ungefähr innerhalb derselben Grenze wie oben liegen (5·37 *mm* bis 6·95 *mm*), die aber bedeutend kleinere Dimensionsverhältnisse aufweisen (10·03

und 10·79), findet ein weniger starkes Wachsen mit dem Momente statt, wenngleich sich das Wachsen immer noch gut constatieren lässt. Das Anwachsen ist bei dem Magnete mit der kleineren Dicke (5·37 *mm*) beträchtlich stärker als beim Magnete mit der größeren Dicke (6·95).

Bei Magneten mit kleinem Dimensionsverhältnisse (10·14 und 6·52) und beträchtlichen Dicken (9·86 bis 9·20) lässt sich ein Anwachsen des Temperaturcoefficienten mit dem Momente nicht mehr behaupten. Es ist in diesen Fällen der Temperaturcoefficient unabhängig vom Momente und besitzt einen constanten Wert.

In allen Fällen, wo Dimensionsverhältnis und Dicke die oben angedeuteten Grenzen nicht überschreiten, ist der Temperaturcoefficient von drei Factoren, nämlich dem Momente, dem Dimensionsverhältnisse und der Dicke abhängig.

Eine allgemein giltige mathematische Relation zu finden, die die Berechnung des Temperaturcoefficienten aus den drei Größen: Moment, Dimensionsverhältnis und Dicke gestatten würde, ist mir bis jetzt nicht gelungen.

Bestimmung einiger Magnetisierungszahlen

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. März 1900.)

I. Vanadiumchlorid.

Zu den paramagnetischen Elementen der Gruppe mit dem Atomgewichte zwischen 50 und 60 gehört auch das Vanadium. Da aus Salzlösungen desselben noch keine Bestimmungen der Atomsusceptibilität vorliegen und anderseits Vanadiumchlorid so stark magnetisch ist, dass sich auch bequem unmagnetische Lösungen herstellen lassen dürften, wie sie die Herren H. du Bois, O. Liebknecht und A. P. Wills[1] zuletzt zu ihren Messungen verwendet haben, gebe ich hier die von mir nach der außerordentlich bequemen, rasch durchführbaren und genauen Methode[2] mittels einer langen cylindrischen Glasröhre, die auf der einen Seite einer eisenfreien Wage angebracht in das Magnetfeld reicht, gewonnenen Resultate, um eventuell einen Vergleich mit Messungen nach der Methode des Herrn du Bois zu ermöglichen.

Die Substanz war als rein von Merck-Darmstadt bezogen und wurde in fünf verschiedenen Concentrationen, und zwar bedeutet im folgenden Mol. die Zahl der Gramm-Molecüle im

---

[1] Ann. d. Phys., I, S. 178 und 189, 1900. Die dort von den Herren Du Bois und Liebknecht S. 196 geäußerte Vermuthung, dass unter anderen Vanadium wenige oder gar keine paramagnetische Verbindungen liefere, hat sich nicht bestätigt.

[2] G. Jäger und St. Meyer, diese Sitzungsber., 108 (II. a), S. 264; 1899.

Liter, gemessen. Die angegebenen Werte der Magnetisierungszahl $\varkappa$ sind Mittel für Messungen bei Feldstärken zwischen 10.000 und 17.000 [C. G. S.], indem sich wie bei früheren Untersuchungen eine Abhängigkeit von der Feldintensität in diesem Bereiche nicht nachweisen ließ. Die Dichte γ bezieht sich auf 17·5° C.

γ	Mol. (VCl_2)	$\varkappa . 10^6$
1·792	6·96	+8·5
1·327	2·72	+2·84
1·140	1·13	+0·80
1·057	0·55	+0·036
1·024	0·25	—0·357

Die beigegebene Figur gibt eine graphische Darstellung des Verlaufes, die gestrichelte Gerade deutet den Gang nach Abzug des Wertes für Wasser, der bei 17·5° zu $-0·067 . 10^{-6}$ angenommen wurde,[1] an.

Der Wert für die moleculare Susceptibilität für VCl_2 ergibt sich hieraus als $k = +1·25 . 10^{-6}$.

Wie schon bei den von Herrn G. Jäger und mir gemeinschaftlich untersuchten Lösungen,[2] zeigt sich auch hier völlige Unabhängigkeit von der Dissociation. Es ist dies insbesondere wichtig für die Methode der unmagnetischen Lösungen, die dieses Resultat von vornherein unbedingt voraussetzt.

Was den absoluten Wert von k anbelangt, möchte ich, ohne indes vorläufig auf diese Gesetzmäßigkeit besonderes Gewicht zu legen, darauf aufmerksam machen, dass die gefundene Zahl wieder in einfacher Beziehung zu den von Herrn G. Jäger und mir erhaltenen Werten für die Eisengruppe[3] steht und die seinerzeit gegebene Reihenfolge in der Weise ergänzt, dass sich

$$V : Ni : Cr : Fe' : Co : Fe : Mn = 1/2 : 2 : 2\,1/2 : 3 : 4 : 5 : 6$$

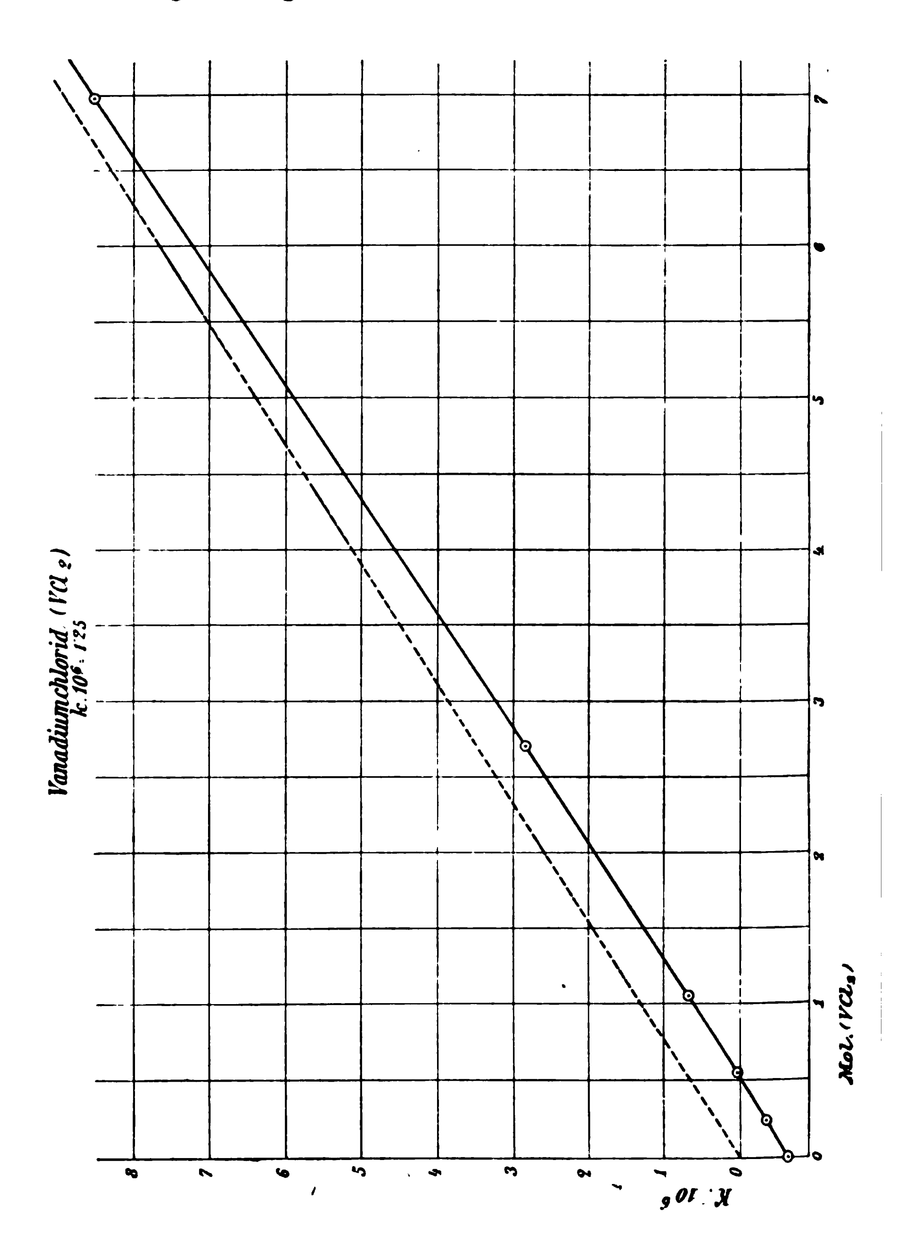
verhalten.

[1] Vergl. G. Jäger und St. Meyer, diese Sitzungsber., 108 (II. a), S. 271; 1899.

[2] G. Jäger und St. Meyer, diese Sitzungsber., 106 (II. a), S. 594 und S. 623; 1897. — 107 (II. a), S. 5; 1898.

[3] L. c. 107 (II. a), S. 13; 1898.

Als Annäherungsregel mag diese Beziehung immerhin von Nutzen sein, auch wenn spätere Untersuchungen sie nicht unbedingt bestätigen sollten.



II. Nachtragsbestimmungen an seltenen Erden.

Anschließend an die Messungen an trockenen anorganischen Verbindungen[1] habe ich nunmehr noch zwei von Herrn P. T. Cleve stammende Präparate, die mir von Herrn Prof. F. Exner zu diesem Zwecke überlassen wurden, untersucht. Es ergab sich unter Benützung der in der angezogenen Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen bei 17° C.:

Substanz	μ	g	a	g. m.	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$
Gd_2O_3	360·3	0·881	1244	3·5	+6·22	+205	+59 2
$Sa_2(SO_4)_3+8H_2O$..	732	0·7915	1415	1·9	+1·39	+ 43·1	+22·3

Das ergibt für $^1/_2\,Gd_2O_3$ den Wert von $29·6.10^{-6}$, während für das ältere Marignac'sche Präparat sich $23·2.10^{-6}$ ergeben hatte. Das Samariumsulfat, das wie die früher untersuchten Samariumverbindungen von gleicher Provenienz war, ergibt die Atomsusceptibilität $11·2.10^{-6}$ gegen $10·1.10^{-6}$ aus Sa_2O_3 und $12·1.10^{-6}$ aus $Sa(NO_3)_3$, also befriedigende Übereinstimmung. Die mangelnde Übereinstimmung im Gadoliniumoxyd wird durch die Untersuchungen der Funkenspectra dieser Substanzen durch die Herren F. Exner und E. Haschek einigermaßen aufgeklärt.[2] Diese fanden, dass Gd und Sa zusammen noch einen dritten Körper mit einer großen Linienzahl enthalten. Nach der unlängst aufgestellten Beziehung zwischen Linienzahl und Susceptibilität[3] ist dieses neue Element als stark magnetisch anzusehen, und es ist zu vermuthen, dass die beiden Präparate von Marignac und Herrn Cleve nicht gleich viel dieses Körpers enthalten.

Leider haben es die Herren H. du Bois und O. Liebknecht bei ihren Messungen an seltenen Erden unterlassen, auf die chemischen Verunreinigungen und Vermengungen dieser Elemente einzugehen. Da diese Forscher aber theilweise

[1] St. Meyer, diese Sitzungsber., 108 (II.a), S. 861.

[2] Diese Sitzungsber. F. Exner und E. Haschek, Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. XVIII. Mitth.

[3] L. c. 108 (II.a), S. 897.

gleichfalls von Herrn P. T. Cleve stammende Substanzen[1] untersucht haben, dürften die in den Funkenspectren durch die Herren F. Exner und E. Haschek klargelegten Verhältnisse auch für ihre Resultate einigermaßen in Rücksicht gezogen werden können.

[1] Von den von mir früher untersuchten Substanzen stammten die Präparate von Sa, Er von P. T. Cleve, Yb, Sc von Nilson, Gd von Marignac.

Über die Additivität der Atomwärmen

von

Dr. Stefan Meyer.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. März 1900.)

Herr F. Richarz[1] hat vor einiger Zeit auf Grund kinetischer Betrachtungen und in Verfolgung eines von Herrn L. Boltzmann[2] dargelegten Gedankenganges die Gesichtspunkte angegeben, von denen aus die Abweichungen der Atomwärmen von der Dulong und Petit'schen Constante gedeutet werden können.

Kürzlich hat nun Herr U. Behn[3] zuverlässiges, sorgfältig discutiertes Beobachtungsmaterial für die Atomwärmen einer Reihe von Elementen und insbesondere auch die Curven, welche deren Abhängigkeit von der Temperatur zeigen, beigebracht. Er fand die von Herrn Richarz begründeten Beziehungen bestätigt und legte bei dieser Gelegenheit den Zusammenhang zwischen Atomwärme und Atomvolumen klar, der von Lothar Meyer bloß angedeutet und von Herrn Richarz weiter verfolgt worden war.

Ein ähnlicher Zusammenhang zwischen Atommagnetismus und Atomvolumen hatte mich veranlasst,[4] den Molecularmagnetismus von Verbindungen unter Berücksichtigung der Volum-

---

[1] F. Richarz, Wied. Ann., 48, S. 708 (1893).

[2] L. Boltzmann, diese Sitzungsberichte, 63 (II), S. 731 (1871).

[3] U. Behn, Wied. Ann., 66, S. 237 (1898); Ann. d. Phys., 1, S. 257 (1900).

[4] St. Meyer, diese Sitzungsberichte, 1. März 1900.

verhältnisse zu betrachten und das erwartete Resultat ergeben, dass Volumcontractionen, beziehungsweise Dilatationen Vermehrung, beziehungsweise Verminderung der magnetischen Susceptibilität hervorrufen.

Analoge Betrachtungen lassen sich nun auch für die Molecularwärmen von Verbindungen anstellen.

Zusammentreffen von kleinem Atomgewicht und kleinem Atomvolumen lässt nach Herrn Richarz Abweichungen vom Dulong und Petit'schen Gesetze erwarten. Bei Verbindungen addiert sich die Masse, das Volumen kann aber auch größer oder kleiner werden als die Summe der Atomvolumina.

Im Falle von Contractionen wären also Abweichungen von der Additivität — dem Joule-Kopp-Neumann'schen Gesetze — zu vermuthen, und zwar in dem Sinne, dass größere Abhängigkeit von der Temperatur auftritt und ferner, dass dann die Werte für die Molecularwärmen kleiner ausfallen, als der Summe der Atomwärmen bei gleicher Temperatur entspricht. Bei Dilatationen wäre Vergrößerung oder auch Additivität der Molecularwärme zu erwarten.

Für die erste Annahme (Abhängigkeit von der Temperatur) unzweideutige Anhaltspunkte aus den vorliegenden Angaben von Molecularwärmen zu finden, gelingt nur unvollkommen wegen des leider sehr spärlichen verlässlichen Beobachtungsmateriales.[1] Bessere Vergleiche ermöglichen die absoluten Werte bei nahe gleicher (Zimmer-) Temperatur.

So zeigen das erwartete Verhalten bei starker Contraction die Substanzen:[2]

---

[1] Immerhin scheinen z. B. die von Bellati und Lussana bei Cu_2S (einer Substanz vom Molecularvolumen 28·5 gegenüber der Summe der Atomvolumina 29·4) erhaltenen Resultate für die specifischen Wärmen bei 50° (0·122), 100° (0·134), 190° (0·145) dafür zu sprechen.

[2] Die Werte für die specifischen Wärmen und die Dichten sind den Tabellen von Landolt und Börnstein (1894) entnommen, für die Atomwärmen, wo Angaben vorhanden, diejenigen von U. Behn benützt; die Atomgewichte sind nach den Festsetzungen der deutschen chemischen Gesellschaft 1898 angenommen.

Substanz	Molecular-gewicht μ	Dichte γ	Molecular-volumen α		Summe der Atomvolumina $\Sigma\alpha_e$	Specifische Wärme c	Molecularwärme a		Summe der Atomwärmen Σa_e
Sb_2S_3 . .	336·2	4·6	73·1	$<$	82·9	0·084	28·2	$<$	29·2
FeS_2 . . .	120·1	4·9	24·5	$<$	38·6	0·128	15·4	$<$	17·6
MnS . . .	87·1	4·0	21·8	$<$	22·6	0·139	12·1	$<$	12·5
$PbBr_2$ . .	366·8	6·6	55·6	$<$	71·9	0·053	19·4	$<$	21·4
KBr . . .	119·1	2·7	44·0	$<$	72·3	0·113	13·5	$<$	14·1

Bei geringer Volumvermehrung verhalten sich die meisten Stoffe bezüglich der Atomwärmen nahe additiv. Als Beispiele mögen hiefür dienen:

Substanz	μ	γ	α	$\Sigma\alpha_e$	c	a	Σa_e
PbS . . .	238·0	7·5	31·7	33·8	0·050	11·9	12·0
FeS . . .	88·1	4·7	18·7	22·0	0·136	12·0	11·9
NiS . . .	90·8	4·6	19·7	22·4	0·128	11·6	11·9
ZnS . . .	97·5	4·1	23·8	24·8	0·123	12·0	11·8

Umgekehrt findet sich bei Dilatation Vergrößerung der Molecularwärme wie z. B. bei:

Substanz	μ	γ	α		$\Sigma\alpha_e$	c	a		Σa_e
Cu_2J_2 . . .	380·9	4·4	86·8	$>$	65·4	0·069	26·3	$>$	25·2
AgJ	234·8	5·6	42·0	$>$	35·8	0·061	14·3	$>$	12·8

Und wieder nahe erfüllte Additivität, wo die Volumänderung gering ist:

Substanz	μ	γ	α	$\Sigma\alpha_e$	c	a	Σa_e
HgS . . .	232·4	7·7	30·1	29·8	0·052	12·1	12·3
PbJ_2 . . .	460·6	6·2	74·3	69·3	0·043	19·8	19·8

Hingegen findet sich, wenn auch ganz vereinzelt, das entgegengesetzte Verhalten, wie bei:

Substanz	μ	γ	α	$\Sigma\alpha_e$	c	a	Σa_e
SnS_2 . . .	182·6	4·5	40·6	47·7	0·119	21·7	18·1

Ob hier die specifische Wärme ungenau bestimmt ist (etwa infolge vernachlässigter chemischer Processe zwischen 12° und 95° während der Bestimmung von *c*) oder die Regel versagt, bleibt wohl noch zu entscheiden.

Die besten Bestimmungen für specifische Wärmen liegen für die Oxyde vor, doch tritt hier die Schwierigkeit ein, dass weder für das Atomvolumen, noch für die Atomwärme des festen Sauerstoffes derzeit direct gefundene Angaben möglich sind. Man muss hier also mit einer gewissen Willkür vorgehen. Da aber auch sonst die Daten für die Dichten sowohl als für die specifischen Wärmen erheblich voneinander abweichen und hier nur relativ große Unterschiede als beweiskräftig gelten können, vermag diese Willkür das Gesammtresultat nicht zu beeinträchtigen.

Für das Atomvolumen lässt sich aus der allgemeinen Curve der Atomvolumina der Elemente mit einiger Wahrscheinlichkeit für Sauerstoff der Wert 8 annehmen.

Für die Atomwärme hat Kopp, als Mittelwert aus einer großen Reihe von Oxyden additiv berechnet, die Zahl 4·0 angegeben. Da aber die Mehrzahl der Oxyde unter Volumcontraction gebildet wird, lässt sich im Sinne der obigen Anschauung nicht an diesem Werte festhalten. Berechnet man die Atomwärme des Sauerstoffes aus solchen Oxyden, die keine erhebliche Volumveränderung erleiden, so erhält man thatsächlich eine beträchtlich größere Zahl.

Als solche Verbindungen können gelten:

Substanz	Molecularwärme *a*	Atomwärme von O hieraus
Sb_2O_3	26·8	5·0
As_2O_3	25·3	4·6
PbO	11·4	5·2
Cu_2O	15·9	4·3
MnO	11·2	5·5
MoO_3	22·2	5·3
HgO	11·5	4·9
WO_3	20·6	4·8
	Mittel:	4·9

Dieser Mittelwert 4·9 ist der folgenden Tabelle zugrunde gelegt.[1]

Substanz	μ	γ	α	$\Sigma\alpha_e$	c	a	Σa_e
Al_2O_3	102·2	3·9	26 <	45	0·185	18·9 <	26·1
Sb_2O_3	288	5·2	55 $\doteq$	60	0·093	26·8 $\doteq$	26·5
As_2O_3	198	3·7	54 $\doteq$	50	0·128	25·3 $\doteq$	26·1
BeO	25·1	3·1	8 <	13	0·247	6·2 <	8·8
PbO	222·9	9·2	24 $\doteq$	26	0·051	11·4 $\doteq$	11·1
CeO_2	172·0	6·7	26 <	37	0·088	15·1 <	16·1
Cr_2O_3	152·2	5·0	30 <	39	0·177	26·9 <	27·3
Fe_3O_4	232·0	5·2	45 <	54	0·156	36·2 <	37·9
Fe_2O_3	160·0	5·1	31 <	38	0·156	25·0 <	26·9
GeO_2	176·0	4·7	37 >	29	0·129	22·6 >	15·3
In_2O_3	276·0	7·2	38 <	55	0·081	22·4 <	27·7
Cu_2O	143·2	5·9	24 $\doteq$	22	0·111	15·9 $\doteq$	16·5
CuO	79·6	6·4	12 $\leqq$	15	0·128	10·2 $\leqq$	10·7
La_2O_3	324·0	6·4	51 <	69	0·075	24·3 <	27·1
MgO	40·4	3·4	12 <	22	0·244	9·9 <	10·8
MnO	71·0	5·1	14 $\doteq$	15	0·157	11·2 $\doteq$	11·6
Mn_2O_3	158·0	4·5	35 <	38	0·162	25·6 <	28·1
MnO_2	87·0	5·0	15 <	30	0·159	13·8 <	16·5
MoO_3	144·0	4·4	33 $\doteq$	35	0·154	22·2 $\doteq$	21·0
HgO	216·3	11·1	20 $\doteq$	22	0·053	11·5 $\doteq$	11·5
SiO_2	60·4	2·7	22 <	27	0·186	11·2 <	15·0
TiO_2	80·1	4·3	19 <	27	0·172	13·8 <	15·2
WO_3	232·0	6·8	34 =	34	0·089	20·6 $\doteq$	21·0
ZnO	81·5	5·6	15 <	17	0·125	10·2 <	10·9
SnO_2	150·5	6·9	22 <	32	0·089	13·4 <	16·1
ZrO_2	122·6	5·7	22 <	38	0·108	13·2 <	15·8

Die ganze Tabelle bestätigt die Erwartungen, und zwar in besonders auffallender Weise bei Al_2O_3, In_2O_3, MnO_2, SiO_2, ZnO_2, ZrO_2 (Contraction) einerseits und GeO_2 (Dilatation) anderseits.

Doch finden sich gleichfalls bei den Oxyden Ausnahmen von der aufgestellten Regel, und zwar bei:

[1] Das Zeichen $\doteq$ besagt: in erster Annäherung gleich.

Substanz	μ	γ	α	$\Sigma\alpha_e$	c	a	Σa_e
B_2O_3 ...	70·0	1·8	39	32	0·237	16·6	20·3
Bi_2O_3 ...	465·0	8·1	57·4	66·2	0·061	28·4	27·1

Es erscheint aber nicht ausgeschlossen, dass in diesen Fällen die vorliegenden Werte nicht ganz zuverlässig sind.[1]

Jedenfalls wird man nach dem Gesagten additives Verhalten der Atomwärme zur Molecularwärme, d. h. genaue Erfüllung des Joule-Kopp-Neumann'schen Gesetzes nur dort erwarten dürfen, wo auch — mindestens annähernd — Additivität der Atomvolumina zum Molecularvolumen besteht.

---

[1] Beimengungen anderer Oxydationsstufen würden zur Erklärung hinreichen.

Zur Empfindlichkeit der Spectralreactionen

von

F. Emich.

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. März 1900.)

Vom Standpunkte der Vollkommenheit unserer experimentellen Hilfsmittel kann man es bedauerlich finden, dass wir mit Hilfe derselben nach den bisherigen Angaben nicht imstande sein sollen, geringere Substanzmengen nachzuweisen, als direct durch einen unserer Sinne.

Es lassen sich nämlich, wie allgemein bekannt, nach Kirchhoff und Bunsen mittels Spectralbeobachtung $\frac{1}{14} \times 10^{-6}\, mg$ Natrium erkennen, während der Geruchssinn nach E. Fischer und Penzoldt $\frac{1}{460} \times 10^{-6}\, mg$ Merkaptan wahrzunehmen vermag.

Zur ersteren Zahl ist freilich zu bemerken, dass sie, wie dies auch Kirchhoff und Bunsen bekannt war, noch nicht die kleinste nachweisbare Menge darstellt, denn die Meister geben sie nur als diejenige an, welche während einer Secunde in der Flamme enthalten ist, auf die der Spectralapparat gerichtet wird. Nun genügt aber wohl auch ein kleinerer Zeitabschnitt zur Beobachtung der gelben Linie, und außerdem kann man einen großen Theil der Flamme, vielleicht $\frac{99}{100}$, abblenden, ohne die Sicherheit und Deutlichkeit der Reaction zu beeinträchtigen. Dadurch würde die Größenordnung der kleinsten erkennbaren Mengen der beiden genannten Substanzen annähernd dieselbe werden.

Zu bedeutend kleineren Stoffmengen gelangen wir bei Anwendung von passenden Geißler'schen Röhren, welche mit Wasserstoff gefüllt sind. Ich habe solche benützt, welche einen capillaren Theil von etwas mehr als 0·01 *mm* inneren Durchmesser besaßen; tiefer herab kann man leider nicht gehen, da schon bei diesem Durchmesser leicht Erscheinungen auftreten, welche die Beobachtung des Gasspectrums unmöglich machen.

Mit einer Röhre von 0·015 *mm* konnte ich bei 1 *mm* Druck die rothe Wasserstofflinie noch sicher erkennen. Sie erschien als winziges Sternchen, wenn man — etwa mit Hilfe eines schwarzen Papieres mit schlitzförmigem Ausschnitte — ein 0·05 *mm* langes Stück des capillaren Theiles frei ließ, während der übrige Theil abgeblendet war und konnte mit einem bestimmten Theilstriche der (schwach beleuchteten) Scala in Übereinstimmung gebracht werden.

Ein anderes Rohr, dessen Capillare einen Durchmesser von 0·037 *mm* hatte, deren nicht abgeblendeter Theil 0·04 *mm* lang war, gab bei allen Drucken bis zum starken Auftreten des grünen Kathodenlichtes ein deutliches Wasserstoffspectrum. Dabei wurden als geringste Drucke, bei welchen die Beobachtung von H_α möglich war, 0·015, 0·017 und 0·0016 *mm* Quecksilber gemessen.

Ein ähnliches Rohr von 0·03 *mm* wurde mit (elektrolytischem) Knallgas gefüllt, wobei das rothe Sternchen bei einem Drucke von 1 *mm* noch sichtbar war.

Die Menge des Wasserstoffes, welche unter den angegebenen Bedingungen ein erkennbares Spectrum lieferte, beträgt

im ersten Falle . . . . 1×10^{-12} *mg*,
im zweiten Falle . . . . 7×10^{-14} » ,
im dritten Falle . . . . 3×10^{-13} » ,

ist also im Mittel rund zehntausendmal kleiner als die oben angegebene Merkaptanmenge.

Die Rechnung setzt natürlich voraus, dass der Druck im Geißler'schen Rohre während der Entladung nicht wesentlich

größer ist, als vom Manometer, beziehungsweise Vacuummeter angezeigt wird. Ich glaube, dass wir diese Annahme, wenigstens bei dem größeren Drucke von einem Millimeter, unbedingt machen können, wenn auch z. B. G. Séguy[1] angibt, dass in der Nähe der Anode ein Druck von 10^{-8} Atm. herrscht, sobald er im Mittel 10^{-6} Atm. beträgt.

Bei den kleinen Drucken erscheinen neben den Wasserstofflinien auch die der Bestandtheile des Glases, namentlich jene des Natriums.

Bezüglich der Einzelnheiten sei Folgendes hinzugefügt.

Der Wasserstoff wurde bei den erwähnten Versuchen in einem Aste des Geißler'schen Rohres durch Erhitzen seiner Palladiumlegierung dargestellt und musste vor dem Eintritte in jenes eine kurze Schichte von Phosphorpentoxyd passieren.

Die Bestimmung des Durchmessers der Capillaren geschah mikrometrisch, wobei ich ein Deckglas darauflegte und den Zwischenraum zwischen diesem und dem Röhrchen mit Immersionsöl ausfüllte.

Es empfiehlt sich, die Geißler'schen Röhren zu beiden Seiten der Capillare mit der Pumpe in Verbindung zu setzen.

Der benützte Spectralapparat (von Steinheil) hat ein Flintglasprisma, Collimator und Fernrohr besitzen 26 *mm* Öffnung, und letzteres zeigt siebenfache Vergrößerung. Der Spalt kam natürlich nicht in Verwendung.

Noch zwei Bemerkungen seien gestattet.

An der Leitung der Elektricität in Geißler'schen Röhren sollen sich nur $0 \cdot 3 \times 10^{-9}$ aller Molecüle betheiligen;[2] im vorliegenden (ungünstigsten) Falle wäre dies $0 \cdot 3 \times 10^{-21}$ *mg*, d. i. annähernd die Masse eines Atoms Wasserstoff, welche $0 \cdot 83 \times 10^{-21}$ *mg* betragen soll.[3]

---

[1] Z. ph. Ch., *29*, 558.

[2] Lehmann, Elektr. Lichterscheinungen, S. 129.

[3] Nernst, Physik. Chemie, II. Aufl., S. 394.

Nach Hutton[1] soll das gewöhnliche Wasserstoffspectrum nur dann auftreten, wenn das Gas eine Spur Sauerstoff enthält. Wenn diese Angabe einwandfrei ist, so würde durch unsere Versuche die Gegenwart von Sauerstoffmengen nachgewiesen sein, die noch sehr bedeutend unterhalb der oben angegebenen Minimalquantitäten liegen.

[1] Z. ph. Ch., *27*, 689.

Über einen Satz von Dirichlet

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1900.)

1.

Die Dirichlet'schen Sätze,[1] dass jede primitive quadratische binäre Form unendlich viele Primzahlen darstellt und insbesondere auch solche, welche zugleich in einer gegebenen, mit den Charakteren der Form verträglichen Linearform enthalten sind, sind zuerst von H. Weber[2] und A. Meyer[3] bewiesen worden. Ich habe hierauf einen Beweis gegeben,[4] welcher nur elementarer Mittel bedarf, und will hier eine Vereinfachung desselben mittheilen.

2.

Eine ganzzahlige binäre quadratische Form möge hier schlechthin eine Form, und zwar eine Form erster Art oder zweiter Art genannt werden, je nachdem der Coefficient des Productes der Unbestimmten gerade oder ungerade ist. Bezeichnet man die Art einer Form durch die Zahl σ, so nimmt

---

[1] Lejeune Dirichlet, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1840; Crelles Journal, Bd. 21; Comptes rendus, 1840.

[2] H. Weber, Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist. Mathematische Annalen, Bd. 20.

[3] A. Meyer, Über einen Satz von Dirichlet, Crelles Journal, Bd. 103; P. Bachmann, Die analytische Zahlentheorie, Leipzig, 1894.

[4] Diese Sitzungsber., Bd. CIV, Abth. II. a, December 1895.

jede ganzzahlige binäre quadratische Form f der Unbestimmten x, y die Gestalt

$$f = ax^2 + \frac{2b}{\sigma} xy + cy^2$$

an; bei einer Form erster Art ist $\sigma = 1$ und b eine beliebige ganze Zahl, bei einer Form zweiter Art $\sigma = 2$ und b eine ungerade Zahl.

Die Determinante der Form f ist die Zahl

$$D = b^2 - \sigma^2 ac.$$

Die Form f wird primitiv genannt, wenn die Coefficienten $a, \frac{2b}{\sigma}, c$ den größten gemeinschaftlichen Theiler 1 haben.

Hier sollen nur primitive Formen von einer bestimmten Art σ und einer nicht quadratischen Determinante D in Betracht gezogen werden.

Wird die Zahl m durch die Form f mittels zweier Zahlen ξ, η dargestellt, welche den größten gemeinschaftlichen Theiler μ haben, so ist f einer Form $\left(\frac{m}{\mu^2}, \frac{v}{\sigma}, \mathfrak{l}\right)$ äquivalent, in welcher

$$0 \leqq v < \sigma \left|\frac{m}{\mu^2}\right|$$

ist. Diese Form möge eine Hilfsform der Zahl m genannt werden.

Man kann sagen, dass die Darstellung ξ, η der Zahl m durch f der Hilfsform $\left(\frac{m}{\mu^2}, \frac{v}{\sigma}, \mathfrak{l}\right)$ zugeordnet ist.

Bei negativer Determinante D sind jeder mit f äquivalenten Hilfsform der Zahl m so viele Darstellungen dieser Zahl zugeordnet, als die Pell'sche Gleichung

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

Lösungen besitzt. Bei positiver Determinante hingegen sind jeder mit f äquivalenten Hilfsform unendlich viele Darstellungen zugeordnet. Unter diesen Darstellungen gibt es eine einzige, welche den Bedingungen

$$1 < \frac{a\xi + \frac{b+\sqrt{D}}{\sigma}\eta}{\sqrt{\pm am}} \leqq \frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}$$

genügt, wo $\sqrt{\pm am}$ positiv angenommen wird und T, U die Zahlen der kleinsten positiven Lösung der Pell'schen Gleichung

$$T^2 - DU^2 = \sigma^2$$

bezeichnen. Kommt man überein, diese Darstellung die einfachste zu nennen und von den übrigen abzusehen, so ist jeder mit f äquivalenten Hilfsform eine Darstellung der Zahl m durch die Form f zugeordnet.

Wird unter k im Falle einer positiven Determinante die Einheit und im Falle einer negativen Determinante die Anzahl der Lösungen der Pell'schen Gleichung verstanden, so gibt k in allen Fällen die Anzahl der Darstellungen der Zahl m durch die Form f an, welche einer mit f äquivalenten Hilfsform von m zugeordnet sind.

Damit eine Zahl m durch Formen der Determinante D darstellbar sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass sie Hilfsformen besitzt, dass also die Congruenz

$$v^2 \equiv D \quad \left(\text{mod. } \frac{\sigma^2 m}{\mu^2}\right)$$

mindestens für einen quadratischen Theiler μ^2 von m lösbar sei.

Sind f, f' primitive Formen derselben Art, so soll die aus denselben zusammengesetzte Form, welche wieder von derselben Art wie f, f' ist, mit ff' bezeichnet werden. Es empfiehlt sich, die zusammengesetzte Form so zu wählen, dass ihr mittlerer Coefficient nicht negativ ist und vom Vorzeichen abgesehen das doppelte des ersten Coefficienten nicht erreicht.

3.

Es seien

$$f_0, f_1, f_2, \dots f_{h-1}$$

ein vollständiges System primitiver Formen der Art σ und Determinante D und Ω deren Inbegriff. Bei negativer Determi-

nante sind diese Formen ausschließlich positiv, bei positiver können der Einfachheit wegen die ersten Coefficienten von $f_0, f_1, \ldots$ positiv, die zweiten nicht negativ angenommen werden. Unter f_0 ist die Hauptform $x^2 - Dy^2$ oder die Form $x^2 + xy + \frac{1}{4}(1-D)y^2$ zu verstehen, je nachdem $\sigma = 1$ oder $\sigma = 2$ ist.

Man kann den Formen

$$f_0, f_1, \ldots f_{h-1}$$

h Einheitswurzeln

$$Qf_0, Qf_1, \ldots Qf_{h-1}$$

derart zuordnen, dass allgemein

$$Qf_\alpha Qf_\beta = Qf_\gamma$$

wird, wenn die Form $f_\alpha f_\beta$ mit f_γ äquivalent ist. Versteht man also unter Qf die Einheitswurzel Qf_i, wenn f mit f_i äquivalent ist, so ist allgemein für irgend zwei primitive Formen f, g der Art σ

$$Qf \cdot Qg = Qfg.$$

Hienach ist

$$Qf_0 Qf_0 = Qf_0 f_0 = Qf_0$$

und daher

$$Qf_0 = 1.$$

Eine solche Zuordnung möge kurz eine Zuordnung von Einheitswurzeln der Determinante D genannt werden.

Es gibt h verschiedene Zuordnungen von Einheitswurzeln der Determinante D. Denn man kann nach Kronecker[1] eine Reihe von primitiven Formen der Art σ

$$g_1, g_2, \ldots g_\nu$$

aufstellen, welche beziehungsweise zu den Exponenten

$$m_1, m_2, \ldots m_\nu$$

gehören und der Bedingung genügen, dass die Form

$$g_1^{s_1} g_2^{s_2} \ldots g_\nu^{s_\nu}$$

[1] Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1870.

genau ein vollständiges System von primitiven Formen der Art σ durchläuft, wenn s_1 die Werte $0, 1, \ldots m_1-1$, s_2 die Werte $0, 1, \ldots m_2-1, \ldots s_\nu$ die Werte $0, 1, 2, \ldots m_\nu-1$ annehmen.

Ist also die Form f der Form

$$g_1^{s_1} g_2^{s_2} \ldots g_\nu^{s_\nu}$$

äquivalent, so muss

$$\begin{aligned} Qf &= Qg_1^{s_1} g_2^{s_2} \ldots g_\nu^{s_\nu} \\ &= (Qg_1)^{s_1} (Qg_2)^{s_2} \ldots (Qg_\nu) \end{aligned}$$

und überdies

$$(Qg_i)^{m_i} = Qg_i^{m_i} = Qf_0 = 1$$

sein, da $g_i^{m_i}$ mit f_0 äquivalent ist. Hienach muss Qg_1 eine m_1^{te} Einheitswurzel w_1, Qg_2 eine m_2^{te} Einheitswurzel w_2 u. s. f., Qg_ν eine m_ν^{te} Einheitswurzel sein, und man hat

$$Qf = w_1^{s_1} w_2^{s_2} \ldots w_\nu^{s_\nu}.$$

Umgekehrt können die Einheitswurzeln $w_1, w_2, \ldots w_\nu$ beliebig gewählt werden, und man erhält immer eine Zuordnung der gewünschten Art, wenn für eine mit $g_1^{s_1} g_2^{s_2} \ldots g_\nu^{s_\nu}$ äquivalente Form f

$$Qf = w_1^{s_1} w_2^{s_2} \ldots w_\nu^{s_\nu}$$

gesetzt wird. Denn die Form fg ist mit $g_1^{s_1+t_1} g_2^{s_2+t_2} \ldots g_\nu^{s_\nu+t_\nu}$ äquivalent, wenn f mit $g_1^{s_1} g_2^{s_2} \ldots g_\nu^{s_\nu}$, g mit $g_1^{t_1} g_2^{t_2} \ldots g_\nu^{t_\nu}$ äquivalent sind, und man hat

$$\begin{aligned} Qf &= w_1^{s_1} w_2^{s_2} \ldots w_\nu^{s_\nu} \\ Qg &= w_1^{t_1} w_2^{t_2} \ldots w_\nu^{t_\nu} \\ Qfg &= w_1^{s_1+t_1} w_2^{s_2+t_2} \ldots w_\nu^{s_\nu+t_\nu}, \end{aligned}$$

also

$$Qf \cdot Qg = Qfg.$$

Da w_1 m_1 verschiedene, w_2 m_2 verschiedene u. s. f., w_ν m_ν verschiedene Werte annehmen kann, so gibt es $m_1 m_2 \ldots m_\nu$ oder h verschiedene Zuordnungen der gewünschten Art. Unter diesen Zuordnungen gibt es eine, in welcher

$$Qf_0 = Qf_1 = \ldots = Qf_{h-1} = 1$$

ist und welche als die 0te bezeichnet werden möge.

Ist $k > 0$, so gibt es immer eine Zuordnung, in welcher Qf_k von 1 verschieden ist. Ist nämlich f_k mit $g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_\nu^{\alpha_\nu}$ äquivalent, so können nicht alle Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu = 0$ sein, und es sei $0 < \alpha_i < m_i$. Wird dann für w_i eine primitive $m_i$te Einheitswurzel und für alle etwaigen übrigen Wurzeln die Einheit genommen, so ist

$$Qf_k = w_i^{\alpha_i}$$

und von 1 verschieden.

Für jede Zuordnung außer der 0ten ist

$$Qf_0 + Qf_1 + \ldots + Qf_{h-1} = 0.$$

Ist nämlich etwa Qf_i nicht $= 1$, so ist

$$\begin{aligned} & Qf_0 f_i + Qf_1 f_i + \ldots + Qf_{h-1} f_i \\ = & Qf_0 \quad + Qf_1 \quad + \ldots + Qf_{h-1}, \end{aligned}$$

weil die Formen

$$f_0 f_i,\ f_1 f_i, \ldots f_{h-1} f_i$$

in einer gewissen Reihenfolge mit den Formen

$$f_0, f_1, \ldots f_{h-1}$$

äquivalent sind. Man hat also

$$(Qf_i - 1)(Qf_0 + Qf_1 + \ldots + Qf_{h-1}) = 0$$

und somit

$$Qf_0 + Qf_1 + \ldots + Qf_{h-1} = 0.$$

Sind

$$\begin{matrix} Q\,f_0,\ Q\,f_1, \ldots Q\,f_{h-1} \\ Q'f_0,\ Q'f_1, \ldots Q'f_{h-1} \end{matrix}$$

zwei Zuordnungen von Einheitswurzeln der Determinante D, so bilden die Wurzeln

$$Qf_0 Q'f_0,\ Qf_1 Q'f_1, \ldots Qf_{h-1} Q'f_{h-1}$$

wieder eine solche Zuordnung. Sind die Zuordnungen

$$\begin{matrix} Q'f_0,\ Q'f_1, \ldots Q'f_{h-1} \\ Q''f_0,\ Q''f_1, \ldots Q''f_{h-1} \end{matrix}$$

verschieden, so sind auch die Zuordnungen

$$Qf_0 Q'f_0,\ Qf_1 Q'f_1, \ldots Qf_{h-1} Q'f_{h-1}$$
$$Qf_0 Q'f_0,\ Qf_1 Q''f_1, \ldots Qf_{h-1} Q''f_{h-1}$$

verschieden.

Ist $k > 0$, so hat man, die Summation über alle h Zuordnungen erstreckt,

$$\Sigma Qf_k = 0.$$

Ist nämlich

$$Q'f_0,\ Q'f_1, \ldots Q'f_{h-1}$$

eine Zuordnung, in welcher Qf'_k von 1 verschieden ist, so fallen die Einheitswurzeln $Q'f_k Qf_k$, wenn Qf_k alle seine den verschiedenen Zuordnungen entsprechenden Werte durchläuft, in einer gewissen Reihenfolge wieder mit eben diesen Werten zusammen, und man hat

$$\Sigma Q'f_k Qf_k = \Sigma Qf_k$$

oder

$$(Q'f_k - 1)\Sigma Qf_k = 0.$$

Hieraus folgt aber

$$\Sigma Qf_k = 0.$$

Eine Zuordnung von Einheitswurzeln der Determinante D möge reell oder imaginär genannt werden, je nachdem diese Wurzeln alle reell sind oder nicht.

Alle sich selbst uneigentlich äquivalenten Formen in Ω müssen, mit sich selbst zusammengesetzt, eine mit f_0 äquivalente Form ergeben. Man findet dieselben, wenn man alle Exponenten $s_1, s_2, \ldots s_\nu$ sucht, für welche die Form

$$g_1^{2s_1} g_2^{2s_2} \ldots g_\nu^{2s_\nu}$$

mit f_0 äquivalent wird. Hiezu ist aber nothwendig und hinreichend, dass

$$2s_1,\ 2s_2, \ldots 2s_\nu$$

beziehungsweise durch

$$m_1,\ m_2, \ldots m_\nu$$

theilbar sind. Kommen daher unter den Exponenten $m_1, m_2, \dots m_\nu$ gerade Zahlen vor und nimmt man an, was erlaubt ist, dass die $\lambda-1$ ersten Exponenten

$$m_1,\ m_2, \dots m_{\lambda-1}$$

gerade, die etwaigen übrigen ungerade sind, so erhellt, dass s_1 einen der Werte $0, \frac{1}{2}m_1$, s_2 einen der Werte $0, \frac{1}{2}m_2, \dots$ $s_{\lambda-1}$ einen der Werte $0, \frac{1}{2}m_{\lambda-1}$ haben, $s_\lambda, s_{\lambda+1}, \dots s_\nu$ aber, wofern überhaupt $\nu > \lambda$ ist, alle den Wert 0 haben müssen. Die Anzahl aller sich selbst uneigentlich äquivalenten Formen in Ω ist daher $2^{\lambda-1}$. Dies gilt auch noch für den Fall, wo keine der Zahlen $m_1, m_2, \dots$ gerade also $\lambda = 1$ und f_0 die einzige sich selbst uneigentlich äquivalente Form in Ω ist.

Hienach ist $2^{\lambda-1}$ die Anzahl der Geschlechter, in welche die Formen $f_0, f_1, \dots f_{h-1}$ zerfallen und λ die Anzahl der Charaktere der Determinante D oder der Symbole von der Gestalt

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}},\ (-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)},\ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{8}(n^2-1)},\ \left(\frac{n}{p}\right),$$

welche für alle durch eine Form aus Ω dargestellten, zu $2D$ theilerfremden Zahlen feste Werte haben und der Eintheilung der Formen $f_0, f_1, \dots f_{h-1}$ in Geschlechter zugrunde liegen. Diese Charaktere seien

$$\chi^{(1)}n,\ \chi^{(2)}n, \dots \chi^{(\lambda)}n.$$

Die etwaigen Formen $g_\lambda, g_{\lambda+1} \dots g_\nu$ gehören alle dem Hauptgeschlechte an. Denn die Formen

$$g_\lambda^{m_\lambda},\ g_{\lambda+1}^{m_{\lambda+1}}, \dots$$

sind einerseits mit f_0 äquivalent und gehören anderseits demselben Geschlechte wie beziehungsweise die Formen

$$g_\lambda,\ g_{\lambda+1}, \dots$$

an.

Ein Product irgendeiner Anzahl von verschiedenen Charakteren der Determinante D werde ein Charakterproduct dieser

Determinante genannt, wobei unter Product in weiterem Sinne auch die einzelnen Charaktere selbst und die Einheit zu verstehen ist. Die Charakterproducte der Determinante D fallen mit den Gliedern des entwickelt gedachten Productes

$$(1+\chi^{(1)}n)(1+\chi^{(2)}n)\dots(1+\chi^{(\lambda)}n)$$

zusammen und ihre Anzahl ist 2^λ.

Bedeutet χn irgendein Charakterproduct der Determinante D, so soll der Wert, welchen dasselbe für die Form f, d. h. für irgendeine durch f dargestellte, zu $2D$ theilerfremde Zahl n annimmt, mit χf bezeichnet werden.

Die Werte

$$\chi f_0, \chi f_1, \dots \chi f_{h-1},$$

welche irgendein Charakterproduct der Determinante D für die Formen $f_0, f_1, \dots f_{h-1}$ annimmt, bilden eine reelle Zuordnung von Einheitswurzeln der Determinante D, da sie lauter zweite Einheitswurzeln sind und allgemein

$$\chi f\,\chi g = \chi fg$$

ist.

Sind

$$1, \chi' n, \chi'' n, \dots$$

die verschiedenen Charakterproducte der Determinante D, so ist

$$(1+\chi^{(1)}n)(1+\chi^{(2)}n)\dots(1+\chi^{(\lambda)}n) = 1+\chi' n+\chi'' n+\dots,$$

und man hat

$$(1+\chi^{(1)}f_i)(1+\chi^{(2)}f_i)\dots(1+\chi^{(\lambda)}f_i) = \varepsilon_i 2^\lambda = 1+\chi' f_i+\chi'' f_i+\dots,$$

wo ε_i den Wert 1 oder 0 hat, je nachdem f_i dem Hauptgeschlechte angehört oder nicht. Die Summation in Bezug auf i von $i=0$ bis $i=h-1$ ergibt

$$\frac{h}{2^{\lambda-1}}2^\lambda = h+\sum_i \chi' f_i+\Sigma\chi'' f_i+\dots$$

oder

$$h = \sum \chi' f_i+\Sigma\chi'' f_i+\dots.$$

Da aber $\sum_i \chi' f_i$ den Wert h oder 0 hat, je nachdem die Zahlen $\chi' f_0, \chi' f_1, \ldots \chi' f_{h-1}$ alle positiv sind oder nicht, und Ähnliches von den übrigen Summen $\sum_i \chi'' f_i, \ldots$ gilt, so erhellt, dass es außer der Einheit nur noch ein Charakterproduct gibt, welches für alle Formen $f_0, f_1, \ldots f_{h-1}$ den Wert 1 hat. Dieses Charakterproduct werde mit $\chi^* n$ bezeichnet.

Das Product zweier Charakterproducte der Determinante D ergibt nach Streichung der etwaigen doppelt vorkommenden Symbole wieder ein Charakterproduct von D.

Wenn zwei Charakterproducte χn, $\chi' n$ von D für alle Formen $f_0, f_1, \ldots f_{h-1}$ denselben Wert haben, so ist $\chi' n = \chi n$ oder $\chi' n = \chi n \chi^* n$. Denn $\chi n \chi' n$ ist wieder ein Charakterproduct von D und hat für alle Formen $f_0, f_1, \ldots$ denselben Wert 1. Es muss also $\chi n \chi' n = 1$ oder $\chi n \chi' n = \chi^* n$ und demzufolge $\chi' n = \chi n$ oder $\chi' n = \chi n \chi^* n$ sein.

Das Charakterproduct χ^* enthält mindestens einen der Charaktere $\chi^{(1)} n, \chi^{(2)} n, \ldots$ als Factor, etwa $\chi^{(\lambda)} n$. Alle $2^{\lambda-1}$ Charakterproducte, welche den Factor $\chi^{(\lambda)} n$ nicht enthalten, sind dann in dem Sinne voneinander unabhängig, dass die Zuordnungen von Einheitswurzeln, welche sie liefern, untereinander verschieden sind. Diese Charakterproducte sollen die unabhängigen Charakterproducte der Determinante D genannt und mit

$$\chi_0 n, \chi_1 n, \chi_2 n, \ldots$$

bezeichnet werden.

Die Wertsysteme, welche aus denselben für die Formen $f_0, f_1, \ldots$ hervorgehen, bilden genau alle $2^{\lambda-1}$ reellen Zuordnungen von Einheitswurzeln der Determinante D. Denn diese Wertsysteme sind alle untereinander verschieden und anderseits gibt es nur $2^{\lambda-1}$ reelle Zuordnungen von Einheitswurzeln der Determinante D, da $w_1, w_2, \ldots w_{\lambda-1}$, wenn $\lambda > 1$ ist, die reellen Werte $1, -1$, die Wurzeln $w_\lambda, w_{\lambda+1} \ldots$ aber, wenn $\nu \geqq \lambda$ ist, nur den reellen Wert 1 haben können.

4.

Es sei M eine gegebene positive Zahl und R der Inbegriff aller φM nicht negativen, unter M liegenden, zu M theilerfremden Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots$$

Man kann diesen Zahlen φM Einheitswurzeln

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$

derart zuordnen, dass allgemein

$$Pa_\alpha . Pa_\beta = Pa_\gamma$$

wird, wenn

$$a_\alpha a_\beta \equiv a_\gamma \pmod{M}$$

ist. Wird also unter Pb die Einheitswurzel Pa_i verstanden, wenn $b \equiv a_i \pmod{M}$ ist, so ist allgemein für irgend zwei zu M theilerfremde Zahlen m, n

$$Pm . Pn = Pmn.$$

Da hienach

$$(P1)^2 = P1$$

ist, so ergibt sich

$$P1 = 1.$$

Die Einheitswurzeln

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$

sollen kurz eine Zuordnung von Einheitswurzeln der Zahl M genannt werden. Es gibt φM solche Zuordnungen.

Denn man kann[1] eine Reihe von Zahlen

$$G_1, G_2, \ldots G_\mu$$

aufstellen, welche in Bezug auf den Modul M beziehungsweise zu den Exponenten $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\mu$ gehören und der Bedingung genügen, dass die echten Reste der Potenzproducte

$$G_1^{\alpha_1} G_2^{\alpha_2} \ldots G_\mu^{\alpha_\mu}$$

---

[1] Kronecker, l. c.

welche den Werten

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, 1, \ldots \tau_1 - 1 \\ \alpha_2 &= 0, 1, \ldots \tau_2 - 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_\mu &= 0, 1, \ldots \tau_\mu - 1 \end{aligned}$$

entsprechen, in Bezug auf den Modul M, genau alle Zahlen des Inbegriffes R bilden. Ist demgemäß

$$m \equiv G_1^{\alpha_1} G_2^{\alpha_2} \ldots G_\mu^{\alpha_\mu} \pmod{M},$$

so wird

$$\begin{aligned} Pm &= PG_1^{\alpha_1} G_2^{\alpha_2} \ldots G_\mu^{\alpha_\mu} \\ &= (PG_1)^{\alpha_1} (PG_2)^{\alpha_2} \ldots (PG_\mu)^{\alpha_\mu} \end{aligned}$$

und überdies

$$(PG_i)^{\tau_i} = PG_i^{\tau_i} = P1 = 1.$$

Die Wurzeln

$$PG_1, PG_2, \ldots PG_\mu$$

müssen also beziehungsweise eine $\tau_1$te, $\tau_2$te, $\ldots \tau_\mu$te Einheitswurzel sein.

Ist umgekehrt v_1 eine beliebige $\tau_1$te, v_2 eine beliebige $\tau_2$te..., v_μ eine beliebige $\tau_\mu$te Einheitswurzel und setzt man

$$Pm = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \ldots v_\mu^{\alpha_\mu},$$

wenn

$$m \equiv G_1^{\alpha_1} G_2^{\alpha_2} \ldots G_\mu^{\alpha_\mu} \pmod{M}$$

ist, so erhält man eine Zuordnung von Einheitswurzeln der Zahl M. Denn aus

$$\begin{aligned} m &\equiv G_1^{\alpha_1} G_2^{\alpha_2} \ldots G_\mu^{\alpha_\mu} \pmod{M} \\ n &\equiv G_1^{\beta_1} G_2^{\beta_2} \ldots G_\mu^{\beta_\mu} \pmod{M} \\ Pm &= v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \ldots v_\mu^{\alpha_\mu} \\ Pn &= v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2} \ldots v_\mu^{\beta_\mu} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} mn &\equiv G_1^{\alpha_1+\beta_1} G_2^{\alpha_2+\beta_2} \ldots G_\mu^{\alpha_\mu+\beta_\mu} \pmod{M} \\ Pmn &= v_1^{\alpha_1+\beta_1} v_2^{\alpha_2+\beta_2} \ldots v_\mu^{\alpha_\mu+\beta_\mu} \\ &= Pm \,.\, Pn. \end{aligned}$$

Da v_1 τ_1 verschiedene Werte, v_2 τ_2 verschiedene Werte u. s. f. annehmen können, so gibt es $\tau_1\tau_2\ldots\tau_\mu$ oder φM verschiedene Zuordnungen der gewünschten Art.

Unter diesen Zuordnungen gibt es eine, in welcher alle Einheitswurzeln $Pa_1, Pa_2, \ldots = 1$ sind und welche die 0te Zuordnung genannt werden möge. In den Fällen $M = 1, 2$ ist dies die einzige Zuordnung.

Ist a nicht $\equiv 1 \pmod{M}$, so gibt es eine Zuordnung, in welcher Pa nicht $= 1$ ist. Setzt man nämlich

$$a \equiv G_1^{\alpha_1} G_2^{\alpha_2} \ldots G_\mu^{\alpha_\mu} \pmod{M},$$

so ist mindestens einer der Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ von Null verschieden, etwa α_i, und man erhält

$$Pa = v_i^{\alpha_i},$$

wenn für alle Wurzeln $v_1, v_2, \ldots$ außer v_i die Einheit, für v_i aber eine primitive $\tau_i$te Einheitswurzel genommen wird.

Für jede Zuordnung außer der 0ten ist

$$Pa_1 + Pa_2 + \ldots = 0.$$

Man wähle für m eine Zahl, für welche Pm nicht $= 1$ ist. Da die echten Reste der Producte

$$ma_1, ma_2, \ldots$$

in Bezug auf den Modul M bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots$$

zusammenfallen, so ist

$$Pma_1 + Pma_2 + \ldots = Pa_1 + Pa_2 + \ldots$$

oder

$$(Pm - 1)(Pa_1 + Pa_2 + \ldots) = 0$$

und daher

$$Pa_1 + Pa_2 + \ldots = 0.$$

Ist m nicht $\equiv 1 \pmod{M}$, so ist über alle verschiedenen Zuordnungen von Einheitswurzeln der Zahl M summiert,

$$\Sigma Pm = 0.$$

Denn es gibt eine Zuordnung

$$P'a_1,\ P'a_2, \ldots,$$

in welcher $P'm$ nicht $= 1$ ist. Man hat dann, über alle Zuordnungen erstreckt,

$$\Sigma P'm Pm = \Sigma Pm$$

oder

$$(P'm - 1)\Sigma Pm = 0,$$

also

$$\Sigma Pm = 0.$$

Ist $2^{\mu'}$ die Anzahl der Wurzeln der Congruenz

$$w^2 \equiv 1 \pmod{M},$$

so ist μ' die Anzahl der geraden Zahlen in der Reihe der Exponenten

$$\tau_1,\ \tau_2, \ldots \tau_\mu.$$

Denn man kann

$$w \equiv G_1^{\alpha_1} G_2^{\alpha_2} \ldots G_\mu^{\alpha_\mu} \pmod{M}$$

setzen, und es muss

$$G_1^{2\alpha_1} G_2^{2\alpha_2} \ldots G_\mu^{2\alpha_\mu} \pmod{M},$$

also

$$2\alpha_1 \equiv 0 \pmod{\tau_1}$$
$$2\alpha_2 \equiv 0 \pmod{\tau_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\alpha_\mu \equiv 0 \pmod{\tau_\mu}$$

sein. Diese Congruenzen haben nur die Lösung

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\mu = 0,$$

wenn alle Exponenten $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\mu$ ungerade sind, und es gibt nur eine Wurzel w. Dieser Fall entspricht den Werten $M = 1, 2$. Gibt es dagegen unter den Exponenten $\tau_1, \tau_2, \ldots$ gerade Zahlen, so darf man annehmen, dass $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{\mu'}$ gerade und die etwaigen übrigen Exponenten $\tau_{\mu'+1}, \ldots$ ungerade sind. α_1 kann dann nur die Werte 0 und $\frac{1}{2}\tau_1$, α_2 die Werte 0 und $\frac{1}{2}\tau_2, \ldots$, $\alpha_{\mu'}$ die Werte 0 und $\frac{1}{2}\tau_{\mu'}$ haben, während $\alpha_{\mu'+1}, \ldots, \alpha_\mu$ den Wert 0

haben müssen, wofern überhaupt $\mu > \mu'$ ist. Es gibt also in diesem Falle wieder $2^{\mu'}$ Wurzeln w.

Ein Symbol von der Gestalt

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \ (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}, \ \left(\frac{n}{p}\right)$$

möge ein Charakter der Zahl M genannt werden, wenn es für jede Zahl n den Wert 1 hat, welche zu M theilerfremd und quadratischer Rest von M ist.

Ist M durch 4, aber nicht durch 8 theilbar, so muss

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = 1,$$

ist aber M durch 8 theilbar, so muss gleichzeitig

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = 1 \qquad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = 1$$

sein. Ferner muss für jede etwa in M aufgehende ungerade Primzahl p

$$\left(\frac{n}{p}\right) = 1$$

sein. Ist daher π die Anzahl der ungeraden Primfactoren von M und $\delta = 0, 1, 2$, je nachdem M nicht durch 4, durch 4, aber nicht durch 8 oder durch 8 theilbar ist, so ist $\pi + \delta$ die Anzahl der Charaktere der Zahl M. $2^{\pi+\delta}$ drückt aber auch die Anzahl der Wurzeln der Congruenz

$$w^2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } M)$$

aus, und es ist somit μ' auch die Anzahl der Charaktere der Zahl M.

Irgendein Product von verschiedenen Charakteren der Zahl M werde ein Charakterproduct dieser Zahl genannt, wobei unter Product auch die einzelnen Charaktere selbst und die Einheit zu verstehen sind. Die Anzahl aller Charakterproducte der Zahl M ist $2^{\mu'}$.

Eine Zuordnung von Einheitswurzeln der Zahl M möge reell oder imaginär heißen, je nachdem diese Wurzeln alle reell

sind oder nicht. Die Anzahl aller reellen Zuordnungen ist $2^{\mu'}$, da $v_1, v_2, \ldots v_{\mu'}$ die Werte 1, —1, die Wurzeln $v_{\mu'+1}, \ldots v_\mu$ aber nur den Wert 1 haben können.

Ist χn irgendein Charakterproduct der Zahl M, so bilden die Zahlen

$$\chi a_1, \chi a_2, \ldots$$

eine reelle Zuordnung von Einheitswurzeln der Zahl M. Denn es ist

$$\chi^2 a_1 = \chi^2 a_2 = \ldots = 1$$

und für irgend zwei zu M theilerfremde Zahlen m, n

$$\chi m . \chi n = \chi mn.$$

Den einzelnen $2^{\mu'}$ verschiedenen Charakterproducten von M entsprechen alle reellen Zuordnungen der Zahl M.

5.

Es sei n eine zu $2D$ theilerfremde Zahl, welche Hilfsformen besitzt,

$$\varphi, \psi, \ldots \omega$$

die Gesammtheit ihrer primitiven Hilfsformen σter Art und $\Theta(n)$ die für irgendeine Zuordnung von Einheitswurzeln der Determinante D gebildete Summe

$$\Theta(n) = Q\varphi + Q\psi + \ldots + Q\omega.$$

Für zwei beliebige zu $2D$ und zueinander theilerfremde Zahlen n, n', welche Hilfsformen besitzen, ist

$$\Theta(nn') = \Theta(n)\Theta(n').$$

Denn es seien

$$\varphi, \psi, \ldots \omega$$

alle primitiven Hilfsformen σter Art der Zahl n und

$$\varphi', \psi', \ldots \omega'$$

die der Zahl n'. Die Formen

$$\begin{matrix} \varphi\varphi', \varphi\psi', \ldots \varphi\omega' \\ \psi\varphi', \psi\psi', \ldots \psi\omega' \\ \cdots\cdots\cdots \\ \omega\varphi', \omega\psi', \ldots \omega\omega' \end{matrix}$$

bilden dann genau alle primitiven Hilfsformen σ^{ter} Art der Zahl nn', und es ist

$$\begin{aligned} \Theta(nn') &= \mathfrak{Q}\varphi\varphi' + \mathfrak{Q}\varphi\psi' + \ldots + \mathfrak{Q}\omega\omega' \\ &= (\mathfrak{Q}\varphi + \mathfrak{Q}\psi + \ldots + \mathfrak{Q}\omega)(\mathfrak{Q}\varphi' + \mathfrak{Q}\psi' + \ldots + \mathfrak{Q}\omega') \\ &= \Theta(n)\Theta(n'). \end{aligned}$$

Eine in $2D$ nicht aufgehende Primzahl q, von welcher D quadratischer Rest ist, besitzt die beiden primitiven Hilfsformen σ^{ter} Art

$$\varphi_1 = \left(q, \frac{r_1}{\sigma}, \mathfrak{l}_1\right) \qquad \psi_1 = \left(q, \frac{r'_1}{\sigma}, \mathfrak{l}'_1\right),$$

wo r_1, r'_1 die nicht negativen, unter σq liegenden Wurzeln der Congruenz

$$v^2 \equiv D \pmod{\sigma^2 q}$$

bezeichnen und

$$r_1^2 - D = \sigma^2 q \mathfrak{l}_1 \qquad r_1'^2 - D = \sigma^2 q \mathfrak{l}'_1$$

ist. Sind r_m, r'_m die nicht negativen, unter σq^m liegenden Wurzeln der Congruenz

$$v^2 \equiv D \pmod{\sigma^2 q^m},$$

welche beziehungsweise $\equiv r_1$ und $\equiv r'_1 \pmod{q}$ sind, und setzt man

$$\begin{aligned} r_m^2 - D &= \sigma^2 q^m \mathfrak{l}_m \\ r_m'^2 - D &= \sigma^2 q^m \mathfrak{l}'_m \\ \varphi_m &= \left(q^m, \frac{r_m}{\sigma}, \mathfrak{l}_m\right) \\ \psi_m &= \left(q^m, \frac{r'_m}{\sigma}, \mathfrak{l}'_m\right), \end{aligned}$$

so ergibt sich zunächst

$$\varphi_m \varphi_{m'} = \varphi_{m+m'}$$
$$\psi_m \psi_{m'} = \psi_{m+m'}$$
$$\varphi_m \psi_m = f_0$$

und hieraus

$$\varphi_m = \varphi_1^m$$
$$\psi_m = \psi_1^m$$
$$\varphi_m \psi_{m'} = \varphi_{m-m'}$$
$$\psi_m \varphi_{m'} = \psi_{m-m'},$$

wenn $m > m'$ ist.

Hienach bilden die Formen

$$\varphi_1^m, \varphi_1^{m-1}\psi_1, \varphi_1^{m-2}\psi_1^2, \ldots \varphi_1\psi_1^{m-1}, \psi_1^m$$

sämmtliche primitive Hilfsformen 0ter Art der Potenz q^m; denn bei geradem m bilden die Formen

$$\varphi_m, \varphi_{m-2}, \ldots \varphi_2, f_0, \psi_2, \ldots \psi_{m-2}, \psi_m$$

und bei ungeradem m die Formen

$$\varphi_m, \varphi_{m-2}, \ldots \varphi_1, \psi_1, \ldots \psi_{m-2}, \psi_m$$

alle genannten Hilfsformen.

Man hat also

$$\Theta(q^m) = (Q\varphi_1)^m + (Q\varphi_1)^{m-1} Q\psi_1 + \ldots + (Q\psi_1)^m$$

und $\Theta(q^m)$ ist der Coefficient von t^m in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-tQ\varphi_1)(1-tQ\psi_1)}$$

nach steigenden Potenzen von t.

Ist q eine in $2D$ nicht aufgehende Primzahl, für welche D quadratischer Nichtrest ist, so besitzt q^m entweder nur die eine primitive Hilfsform 0ter Art f_0 oder gar keine, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Es ist also

$$\Theta(q^{2k}) = Qf_0 = 1.$$

Die Größe $\Theta(n)$ ist immer reell.

Ist nämlich q eine zu $2D$ theilerfremde Primzahl, von welcher D quadratischer Rest ist, und bezeichnen φ_1, ψ_1 die primitiven Hilfsformen σ^{ter} Art von q, so ist

$$\varphi_1\psi_1 = f_0,$$

also

$$Q\psi_1 = (Q\varphi_1)^{-1}$$

und $\Theta(q^m)$ als Entwickelungscoefficient des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-tQ\varphi_1)(1-tQ\psi_1)} = \frac{1}{1-(Q\varphi_1+Q^{-1}\varphi_1)t+t^2}$$

reell.

Ist aber D Nichtrest von q, so kommen nur gerade Potenzen von q in Betracht, und es ist $\Theta(q^{2k}) = 1$, also reell.

Ist aber n ein Product mehrerer Primzahlpotenzen

$$p^\alpha, q^\beta, \ldots s^\epsilon,$$

so können diejenigen Primzahlen, von welchen D Nichtrest ist, nur mit geradem Exponenten vorkommen, und es ist

$$\Theta(n) = \Theta(p^\alpha)\Theta(q^\beta)\ldots\Theta(s^\epsilon)$$

eine reelle Größe.

6.

Es sei m eine gegebene positive ungerade oder durch 8 theilbare Zahl und $H(m)$ der Inbegriff aller positiven, unter m liegenden, zu m theilerfremden Zahlen, für welche alle gemeinschaftlichen Charakterproducte der Determinante D und Zahl m den Wert 1 haben.

Der echte Rest n'' des Productes irgend zweier Zahlen n, n' des Inbegriffes $H(m)$ in Bezug auf den Modul m gehört wieder diesem Inbegriffe an. Denn n'' ist zu m theilerfremd, und man hat für irgendein gemeinschaftliches Charakterproduct χn der Determinante D und Zahl m

$$\chi n'' = \chi nn' = \chi n . \chi n' = 1.$$

Ist m ein Product von ρ verschiedenen Primzahlpotenzen

$$p^\alpha, q^\beta, \ldots s^\epsilon$$

und bestimmt man für jede Zusammenstellung einer Zahl $\mathfrak{p}$ des Inbegriffes $H(p^\alpha)$ mit einer Zahl $\mathfrak{q}$ des Inbegriffes $H(q^\beta)$ u. s. f. mit einer Zahl $\mathfrak{s}$ des Inbegriffes $H(s^\varepsilon)$ die zwischen 0 und m liegende Zahl $\mathfrak{m}$, welche den Congruenzen

$$\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{p} \quad (\text{mod. } p^\alpha)$$
$$\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{q} \quad (\text{mod. } q^\beta)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{s} \quad (\text{mod. } s^\varepsilon)$$

genügt, so bilden die so erhaltenen Zahlen $\mathfrak{m}$ den Inbegriff $H(m)$.

Zunächst erhellt, dass jede Zahl n des Inbegriffes $H(m)$ unter den gefundenen Zahlen $\mathfrak{m}$ vorkommt. Denn die echten Reste von n in Bezug auf die Modulen p^α, q^β, $\ldots s^\varepsilon$ sind beziehungsweise zu p^α, q^β, $\ldots s^\varepsilon$ theilerfremd. Irgendwelche gemeinschaftliche Charakterproducte $\chi_1 n$, $\chi_2 n$, $\ldots \chi_\rho n$ von D und p^α, von D und q^β, $\ldots$, von D und s^ε sind auch gemeinschaftliche Charakterproducte von D und m, und man hat nach der Annahme

$$\chi_1 n = 1 \quad \chi_2 n = 1 \ldots \chi_\rho n = 1.$$

Da aber

$$\chi_1 n = \chi_1 \mathfrak{p} \quad \chi_2 n = \chi_2 \mathfrak{q} \ldots \chi_\rho n = \chi_\rho \mathfrak{s}$$

ist, so folgt

$$\chi_1 \mathfrak{p} = 1 \quad \chi_2 \mathfrak{q} = 1 \ldots \chi_\rho \mathfrak{s} = 1.$$

Die Zahlen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots \mathfrak{s}$ gehören also beziehungsweise den Inbegriffen

$$H(p^\alpha), H(q^\beta), \ldots H(s^\varepsilon)$$

an, und n ist eine der gefundenen Zahlen $\mathfrak{m}$.

Umgekehrt sind die gefundenen Zahlen $\mathfrak{m}$ alle untereinander verschieden und gehören zu Hm. Denn sie sind zu p^α, q^β, $\ldots s^\varepsilon$ und daher auch zu m theilerfremd. Ferner zerfällt jedes gemeinschaftliche Charakterproduct χn der Determinante D und Zahl m in ρ Factoren

$$\chi_1 n, \chi_2 n, \ldots \chi_\rho n,$$

wo $\chi_1 n$ ein gemeinschaftliches Charakterproduct von D und p^α, $\chi_2 n$ ein gemeinschaftliches Charakterproduct von D und q^β u. s. f. bezeichnet. Nach der Annahme ist aber

$$\chi_1 \mathfrak{p} = 1 \quad \chi_2 \mathfrak{q} = 1 \ldots \chi_\rho \mathfrak{s} = 1$$

und demzufolge

$$\chi_1 \mathfrak{m} = \chi_1 \mathfrak{p} = 1 \quad \chi_2 \mathfrak{m} = \chi_2 \mathfrak{q} = 1 \ldots \chi_\rho \mathfrak{m} = \chi_\rho \mathfrak{s} = 1$$
$$\chi \mathfrak{m} = \chi_1 \mathfrak{m} \cdot \chi_2 \mathfrak{m} \ldots \chi_\rho \mathfrak{m} = 1.$$

Ist ψn ein Charakterproduct der Zahl m, aber keines der Determinante D, so gibt es in $H(m)$ eine Zahl $\mathfrak{m}$, welche der Bedingung

$$\psi \mathfrak{m} = -1$$

genügt. Es genügt, diese Behauptung für den Fall darzuthun, wo m eine Primzahlpotenz ist. Ist nämlich m ein Product von ρ verschiedenen Primzahlpotenzen p^α, $q^\beta, \ldots s^\varepsilon$, so kann

$$\psi n = \psi_1 n \psi_2 n \ldots \psi_\rho n$$

gesetzt werden, wo $\psi_1 n$, $\psi_2 n, \ldots \psi_\rho n$ sich auf die einzelnen Primzahlen $p, q, \ldots s$ beziehen; $\psi_1 n$ ist also eine der Zahlen $1, \left(\frac{n}{p}\right)$, wenn p ungerade, oder eine der Zahlen $1, (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$, $(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}$, wenn $p = 2$ ist, und Ähnliches gilt von $\psi_2 n, \ldots \psi_\rho n$. Es ist dann mindestens einer der Factoren $\psi_1 n$, $\psi_2 n, \ldots \psi_\rho n$, etwa $\psi_1 n$, kein Charakterproduct der Determinante D.

Nach der Annahme gibt es also in $H(p^\alpha)$ eine Zahl b, welche der Gleichung

$$\psi_1 b = -1$$

genügt. Da die Inbegriffe $H(q^\beta), \ldots H(s^\varepsilon)$ alle die Zahl 1 enthalten, so gehört die positive, unter m liegende Zahl $\mathfrak{m}$, welche den Congruenzen

$$\mathfrak{m} \equiv b \pmod{p^\alpha}$$
$$\mathfrak{m} \equiv 1 \pmod{q^\beta}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{m} \equiv 1 \pmod{s^\varepsilon}$$

genügt, zu $H(m)$, und man hat

$$\begin{aligned}\psi_1 m &= \psi_1 b = -1\\ \psi_2 m &= \psi_2 1 = \quad 1\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_\rho m &= \psi_\rho 1 = \quad 1,\end{aligned}$$

also

$$\psi m = \psi_1 m \psi_2 m \ldots \psi_\rho m = \\ = -1.$$

Es sei also m eine Primzahlpotenz p^π und ψn ein Charakterproduct der Zahl p^π, welches unter den Charakterproducten der Determinante D nicht vorkommt.

Ist p ungerade, so ist

$$\psi n = \left(\frac{n}{p}\right),$$

und der Inbegriff $H(p^\pi)$ besteht aus allen zu p theilerfremden Zahlen unter p^π. Es gibt also in $H(p^\pi)$ einen quadratischen Nichtrest b von p, und man hat

$$\psi b = \left(\frac{b}{p}\right) = -1.$$

Ist $p = 2$, so ist ψn einer der Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}},\ (-1)^{\frac{n^2-1}{8}},\ (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}},$$

und es seien $\psi' n$, $\psi'' n$ die beiden anderen.

Besitzt D keinen der Charaktere ψn, $\psi' n$, $\psi'' n$, so besteht der Inbegriff $H(2^\pi)$ aus allen ungeraden Zahlen unter 2^π, enthält also insbesondere die Zahlen 3, 5, 7. Der Gleichung

$$\psi 1 + \psi 3 + \psi 5 + \psi 7 = 0$$

zufolge hat aber eine der Zahlen $\psi 3$, $\psi 5$, $\psi 7$ den Wert -1.

Besitzt dagegen D einen der Charaktere $\psi' n$, $\psi'' n$, etwa $\psi' n$, so gibt es der Gleichung

$$\psi' 1 + \psi' 3 + \psi' 5 + \psi' 7 = 0$$

zufolge unter den Zahlen 3, 5, 7 eine Zahl b, für welche $\psi' b = 1$ ist und welche daher in dem Inbegriffe $H(2^\varkappa)$ vorkommt. Es ist dann

$$1+\psi b+\psi' b+\psi'' b = \left(1+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\right)\left(1+(-1)^{\frac{b^2-1}{8}}\right)$$

oder, da die rechte Seite $= 0$ ist,

$$(1+\psi b)+(1+\psi'' b) = 0.$$

Es muss also

$$1+\psi b = 1+\psi'' b = 0$$

oder

$$\psi b = -1$$

sein.

7.

Es sei m eine positive ungerade oder durch 8 theilbare Zahl und $J(f, m)$ der Inbegriff aller zu m theilerfremden Resultate, welche aus der Form f durch Einsetzung der Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots m-1$$

für x und y hervorgehen.

Sind unter den echten Resten eines Inbegriffes J von Zahlen in Bezug auf den Modul m

$$\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$$

die untereinander verschiedenen und kommt jede der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ unter den genannten Resten genau $k$mal vor, so soll kurz gesagt werden, dass der Inbegriff J in Bezug auf den Modul m ein Vielfaches, und zwar das $k$fache des Inbegriffes $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ bilde.

Der Inbegriff $J(f_0, m)$ ist in Bezug auf den Modul m ein Vielfaches des Inbegriffes $H(m)$, wo Hm die in dem vorhergehenden Abschnitte festgesetzte Bedeutung hat.

Es genügt, diesen Satz für den Fall zu beweisen, wo m eine Primzahlpotenz ist.

Ist nämlich

$$m = p^\alpha q^\beta \ldots s^\varepsilon$$

und steht der Satz für die Inbegriffe

$$J(f_0, p^\alpha),\ J(f_0, q^\beta), \dots J(f_0, s^\varepsilon)$$

fest, so sei $J(f_0, p^\alpha)$ in Bezug auf den Modul p^α das $\mathfrak{a}$fache von $H(p^\alpha)$, $J(f_0, q^\beta)$ in Bezug auf den Modul q^β das $\mathfrak{b}$fache von $H(q^\beta)$ u. s. f., $J(f_0, s^\varepsilon)$ in Bezug auf den Modul s^ε das $\mathfrak{e}$fache von $H(s^\varepsilon)$. Ist $f_0(x, y)$ eine Zahl des Inbegriffes $J(f_0, m)$ und hat x die echten Reste

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\rho,$$

y die echten Reste

$$\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\rho$$

in Bezug auf die Module $p^\alpha, q^\beta, \dots s^\varepsilon$, $f_0(x, y)$ den echten Rest $\mathfrak{m}$ in Bezug auf den Modul m, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} \equiv f_0(x, y) &\equiv f_0(\xi_1, \eta_1) \quad (\text{mod. } p^\alpha) \\ &\equiv f_0(\xi_2, \eta_2) \quad (\text{mod. } q^\beta) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\equiv f_0(\xi_\rho, \eta_\rho) \quad (\text{mod. } s^\varepsilon). \end{aligned}$$

Der Rest $\mathfrak{m}$ ist also in Bezug auf die Module $p^\alpha, q^\beta, \dots s^\varepsilon$ je einer Zahl der Inbegriffe

$$J(f_0, p^\alpha),\ J(f_0, q^\beta), \dots J(f_0, s^\varepsilon)$$

congruent.

Umgekehrt erhält man immer den echten Rest einer bestimmten Zahl $f_0(x, y)$ aus $J(f_0, m)$, wenn man beliebige Zahlen

$$f_0(\xi_1, \eta_1),\ f_0(\xi_2, \eta_2), \dots f_0(\xi_\rho, \eta_\rho)$$

aus den Inbegriffen

$$J(f_0, p^\alpha),\ J(f_0, q^\beta), \dots J(f_0, s^\varepsilon)$$

herausgreift und $\mathfrak{m}$ durch die Congruenzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &\equiv f_0(\xi_1, \eta_1) \quad (\text{mod. } p^\alpha) \\ &\equiv f_0(\xi_2, \eta_2) \quad (\text{mod. } q^\beta) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\equiv f_0(\xi_\rho, \eta_\rho) \quad (\text{mod. } s^\varepsilon) \end{aligned}$$

so bestimmt, dass

$$0 < \mathfrak{m} < m$$

ausfällt. Denn man kann x, y, und zwar nur auf eine Weise so bestimmen, dass

$$x \equiv \xi_1 \quad y \equiv \eta_1 \quad (\text{mod. } p^\alpha)$$
$$x \equiv \xi_2 \quad y \equiv \eta_2 \quad (\text{mod. } q^\beta)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x \equiv \xi_\rho \quad y \equiv \eta_\rho \quad (\text{mod. } s^\varepsilon)$$
$$0 \leqq x < m \qquad 0 \leqq y < m$$

wird. Es ist dann

$$f_0(x, y) \equiv f_0(\xi_1, \eta_1) \equiv \mathfrak{m} \quad (\text{mod. } p^\alpha)$$
$$\equiv f_0(\xi_2, \eta_2) \equiv \mathfrak{m} \quad (\text{mod. } q^\beta)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\equiv f_0(\xi_\rho, \eta_\rho) \equiv \mathfrak{m} \quad (\text{mod. } s^\varepsilon)$$

und daher

$$f_0(x, y) \equiv \mathfrak{m} \quad (\text{mod. } m).$$

Da überdies $\mathfrak{m}$ zu $p^\alpha, q^\beta, \ldots s^\varepsilon$, also auch zu m theilerfremd ist, so ist auch die Zahl $f_0(x, y)$ zu m theilerfremd und steht in $J(f_0, m)$.

Man erhält demnach die echten Reste $\mathfrak{m}$ aller Zahlen des Inbegriffes $J(f_0, m)$ in Bezug auf den Modul m, indem man für jede Zusammenstellung von Zahlen

$$f_0(\xi_1, \eta_1), f_0(\xi_2, \eta_2), \ldots f_0(\xi_\rho, \eta_\rho)$$

der Inbegriffe

$$J(f_0, p^\alpha), J(f_0, q^\beta), \ldots J(f_0, s^\varepsilon)$$

die positive, unter m liegende Zahl $\mathfrak{m}$ bestimmt, welche den Congruenzen

$$\mathfrak{m} \equiv f_0(\xi_1, \eta_1) \quad (\text{mod. } p^\alpha)$$
$$\equiv f_0(\xi_1, \eta_2) \quad (\text{mod. } q^\beta)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\equiv f_0(\xi_\rho, \eta_\rho) \quad (\text{mod. } s^\varepsilon)$$

genügt.

Sind nun

$$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots \mathfrak{s}$$

die echten Reste der Zahlen

$$f_0(\xi_1, \eta_1), f_0(\xi_2, \eta_2), \ldots f_0(\xi_\rho, \eta^\rho)$$

in Bezug auf die Module $p^\alpha, q^\beta, \ldots s^\epsilon$, so ist m auch durch die Congruenzen

$$\begin{aligned} m &\equiv \mathfrak{p} \pmod{p^\alpha} \\ &\equiv \mathfrak{q} \pmod{q^\beta} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\equiv \mathfrak{s} \pmod{s^\epsilon} \end{aligned}$$

vollständig bestimmt. Die Reste $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots \mathfrak{s}$ aber, welche aus allen Zusammenstellungen

$$f_0(\xi_1, \eta_1), f_0(\xi_2, \eta_2), \ldots f_0(\xi_\rho, \eta_\rho)$$

hervorgehen, bilden genau das $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{e}$fache aller Zusammenstellungen je einer Zahl aus $H(p^\alpha)$ mit je einer Zahl aus $H(q^\beta)$ u. s. f. mit je einer Zahl aus $H(s^\epsilon)$, da $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{a}$mal mit jeder Zahl des Inbegriffes $H(p^\alpha)$, $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{b}$mal mit jeder Zahl des Inbegriffes $H(q^\beta)$ u. s. w. zusammenfällt. Die Zahlen $\mathfrak{m}$ bilden demnach das $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{e}$fache des Inbegriffes $H(m)$.

Es bleibt also zu zeigen, dass der Inbegriff $J(f_0, p^\pi)$ in Bezug auf den Modul p^π ein Vielfaches von $H(p^\pi)$ bildet, wenn p eine Primzahl ist.

Es sei zunächst

$$\sigma = 1 \qquad f_0 = x^2 - Dy^2.$$

Ist $p = 2$, so ist nach der Annahme $\pi \geqq 3$, und man hat die verschiedenen Fälle zu unterscheiden, welche die Determinante D darbieten kann.

Ist D ungerade und soll die Zahl $x^2 - Dy^2$ ungerade ausfallen, so muss entweder x ungerade, y gerade, oder x gerade, y ungerade sein.

Werden für x die ungeraden Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots 2^\pi - 1$$

gesetzt, so durchläuft der echte Rest von x^2 in Bezug auf den Modul $2^\varkappa$ viermal die Reihe aller Zahlen

$$1, 9, 17, \ldots 2^\varkappa-7$$

von der Form $8k+1$ unter $2^\varkappa$. Die Zahlen

$$1^2-Dy^2, 3^2-Dy^2, \ldots (2^\varkappa-1)^2-Dy^2$$

bilden daher bei festem geradem y in Bezug auf den Modul $2^\varkappa$ das Vierfache aller positiven, unter $2^\varkappa$ liegenden Zahlen von der Form $8k+1$ oder $8k+5$, je nachdem $y \equiv 0 \pmod{4}$ oder $y \equiv 2 \pmod{4}$ ist. Alle Zahlen x^2-Dy^2 des Inbegriffes $J(f_0, 2^\varkappa)$ mit geradem y bilden somit in Bezug auf den Modul $2^\varkappa$ das $2^\varkappa$fache aller Zahlen

$$1, 5, 9, \ldots 2^\varkappa-3$$

von der Form $4k+1$ unter $2^\varkappa$.

Werden für y die ungeraden Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots 2^\varkappa-1$$

gesetzt, so durchläuft der echte Rest von $-Dy^2$ in Bezug auf den Modul $2^\varkappa$ viermal die positiven Zahlen von der Form $8k-D$ unter $2^\varkappa$. Bei festem geraden x bilden daher die Zahlen

$$x^2-D1^2, x^2-D3^2, \ldots x^2-D(2^\varkappa-1)^2$$

viermal alle Zahlen von der Form $8k-D$ oder $8k+4-D$ unter $2^\varkappa$, je nachdem $x \equiv 0 \pmod{4}$ oder $x \equiv 2 \pmod{4}$ ist. Alle Zahlen x^2-Dy^2 des Inbegriffes $J(f_0, 2^\varkappa)$ mit geradem x bilden somit in Bezug auf den Modul $2^\varkappa$ das $2^\varkappa$fache aller Zahlen von der Form $4k+3$ oder $4k+1$ unter $2^\varkappa$, je nachdem $D \equiv 1 \pmod{4}$ oder $D \equiv 3 \pmod{4}$ ist.

Hienach ist $J(f_0, 2^\varkappa)$ in Bezug auf den Modul $2^\varkappa$ in dem Falle

$$D \equiv 1 \quad (\mathrm{mod.}\ 4)$$

das $2^\varkappa$fache des Inbegriffes aller ungeraden Zahlen unter $2^\varkappa$ oder das $2^\varkappa$fache von $H(2^\varkappa)$, und in dem Falle

$$D \equiv 3 \quad (\mathrm{mod.}\ 4)$$

das $2^{\pi+1}$fache aller Zahlen von der Form $4k+1$ unter 2^π oder das $2^{\pi+1}$fache von $H(2^\pi)$. Denn in dem ersten Falle besitzt D keinen der Charaktere

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}},\ (-1)^{\frac{n^2-1}{8}},\ (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}},$$

und $H(2^\pi)$ besteht aus allen ungeraden Zahlen unter 2^π, und im zweiten Falle hat die Determinante D mit der Zahl 2^π von den genannten Charakteren nur $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ gemein, und $H(2^\pi)$ besteht aus allen Zahlen von der Form $4k+1$ unter 2^π.

Ist D gerade, so muss x ungerade sein, während y beliebig bleibt. Da die Zahlen

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2, \ldots (2^\pi-1)^2$$

in Bezug auf den Modul 2^π das Vierfache des Inbegriffes aller Zahlen von der Form $8k+1$ unter 2^π bilden, so ist der Inbegriff der Zahlen

$$1^2-Dy^2,\ 3^2-Dy^2, \ldots (2^\pi-1)^3-Dy^2$$

bei festem y das Vierfache des Inbegriffes aller positiven, unter 2^π liegenden Zahlen von der Form

$$\begin{array}{l} 8k+(-1)^y \\ 8k+2-(-1)^y \\ 8k+3-(-1)^y 2 \\ 8k+1, \end{array}$$

je nachdem

$$D \equiv 2, -2, 4, 0 \pmod{8}$$

ist. Der Inbegriff $J(f_0, 2^\pi)$ bildet also in Bezug auf den Modul 2^π in den drei ersten Fällen das $2^{\pi+1}$fache des Inbegriffes $H(2^\pi)$, da er $2^{\pi+1}$mal aus allen ungeraden positiven Zahlen n unter 2^π besteht, welche beziehungsweise den Gleichungen

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = 1$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} = 1$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = 1$$

genügen. In dem vierten Falle ist $J(f_0, 2^\varkappa)$ das $2^{\varkappa+2}$fache aller positiven ungeraden Zahlen n unter $2^\varkappa$, welche gleichzeitig den Gleichungen

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = 1 \qquad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = 1$$

genügen, also das $2^{\varkappa+2}$fache von $H(2^\varkappa)$.

Es sei jetzt p eine ungerade Primzahl.

Geht p in D auf, so darf x nicht durch p theilbar sein, wenn $x^2 - Dy^2$ zu $p^\varkappa$ theilerfremd ausfallen soll, während y beliebig bleibt. Werden statt x die durch p nicht theilbaren Zahlen der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots p^\varkappa - 1$$

gesetzt, so durchläuft der echte Rest von x^2 in Bezug auf den Modul $p^\varkappa$ und daher auch der von $x^2 - Dy^2$ bei festem y zweimal alle quadratischen Reste von $p^\varkappa$. Der Inbegriff $J(f_0, p^\varkappa)$ ist also in Bezug auf den Modul $p^\varkappa$ das $2p^\varkappa$fache von $H(p^\varkappa)$. Denn die einzigen gemeinschaftlichen Charakterproducte von D und $p^\varkappa$ sind hier 1 und $\left(\frac{n}{p}\right)$.

Ist D nicht durch p theilbar, so seien J', J'' die Inbegriffe aller Zahlen $x^2 - Dy^2$ des Inbegriffes $J(f_0, p^\varkappa)$ mit durch p theilbarem und nicht durch p theilbarem y.

Ist y durch p theilbar, so können statt x nur die durch p nicht theilbaren Zahlen der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots p^\varkappa - 1$$

gesetzt werden, und die echten Reste der Quadrate dieser Zahlen und daher auch der Zahlen $x^2 - Dy^2$ in Bezug auf den Modul $p^\varkappa$ bilden bei festem y zweimal alle quadratischen Reste von $p^\varkappa$ unter $p^\varkappa$. J' ist also in Bezug auf $p^\varkappa$ das $2p^{\varkappa-1}$fache der Reihe dieser quadratischen Reste.

Ist y nicht durch p theilbar, so darf x bei festem y durch xy ersetzt werden, weil die Zahlen

$$y.0,\ y.1,\ y.2, \ldots y(p^\varkappa - 1)$$

den Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots p^\varkappa - 1$$

29*

von der Reihenfolge abgesehen nach dem Modul p^κ congruent sind und demzufolge die Zahlen x^2-Dy^2 und $x^2y^2-Dy^2$ dieselben echten Reste in Bezug auf den Modul p^κ liefern. Die echten Reste der Zahlen des Inbegriffes J'' in Bezug auf den Modul p^κ sind also dieselben wie die der Zahlen $y^2(x^2-D)$, welche den Werten $0, 1, 2, \ldots p^\kappa-1$ von x und y entsprechen und zu p^κ theilerfremd sind.

Damit $y^2(x^2-D)$ zu p^κ theilerfremd ausfällt, darf x^2-D und y nicht durch p theilbar sein.

Es seien unter den Werten, welche x^2-D für

$$x = 0, 1, 2, \ldots p-1$$

annimmt, u quadratische Reste, v Nichtreste von p und w durch p theilbare Zahlen enthalten. Es ist dann

$$u+v+w = p$$
$$w = 1+\left(\frac{D}{p}\right),$$

also

$$1+u+v = p-\left(\frac{D}{p}\right).$$

Überdies ist

$$u-v \equiv \Sigma(x^2-D)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots p-1$$
$$\equiv \Sigma x^{p-1} - \frac{p-1}{2} D \Sigma x^{p-3} + \ldots + (-D)^{\frac{p-1}{2}} \Sigma 1 \pmod{p}$$

oder

$$1+u-v \equiv 0 \pmod{p}.$$

Daher wird

$$2u+2 \equiv 2v \equiv -\left(\frac{D}{p}\right) \pmod{p}$$

und somit, weil

$$0 \leqq v \leqq p$$

ist,

$$2u+2 = 2v = p-\left(\frac{D}{p}\right).$$

Werden nun für y die nicht durch p theilbaren Zahlen der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots p^{\varkappa-1}$$

gesetzt, so durchläuft der echte Rest von $y^2(x^2-D)$ in Bezug auf $p^\varkappa$ bei festem x zweimal die unter $p^\varkappa$ liegenden quadratischen Reste oder Nichtreste von $p^\varkappa$, je nachdem x^2-D Rest oder Nichtrest von p ist. Die echten Reste der Zahlen des Inbegriffes J'' in Bezug auf $p^\varkappa$ bilden also das $2up^{\varkappa-1}$fache der Reihe der quadratischen Reste und das $2vp^{\varkappa-1}$fache der Reihe der Nichtreste von $p^\varkappa$.

Hienach besteht $J(f_0, p)$ aus zwei Inbegriffen, welche in Bezug auf den Modul $p^\varkappa$ das $2(u+1)p^{\varkappa-1}$- oder $p^\varkappa-\left(\frac{D}{p}\right)p^{\varkappa-1}$-fache der Reihe aller quadratischen Reste und das $2vp^{\varkappa-1}$- oder $p^\varkappa-\left(\frac{D}{p}\right)p^{\varkappa-1}$fache der Reihe aller Nichtreste von $p^\varkappa$ unter $p^\varkappa$ bilden. Der Inbegriff $J(f_0, p^\varkappa)$ ist also das $p^\varkappa-\left(\frac{D}{p}\right)p^{\varkappa-1}$fache des Inbegriffes aller zu $p^\varkappa$ theilerfremden Zahlen unter $p^\varkappa$, welcher Inbegriff mit $H(p^\varkappa)$ zusammenfällt, da hier D und $p^\varkappa$ nur das Charakterproduct 1 gemein haben.

Es sei zweitens

$$\sigma = 2 \qquad f_0 = x^2+xy+\frac{1}{4}(1-D)y^2.$$

Es bedarf nur einer besonderen Untersuchung, wenn $p=2$ ist. Hiebei sind die Fälle

$$D \equiv 1 \quad (\text{mod. } 8)$$

und

$$D \equiv 5 \quad (\text{mod. } 8)$$

zu unterscheiden.

Ist $D \equiv 1$ (mod. 8), so muss x ungerade, y gerade sein. Man darf y durch xy ersetzen, und es wird

$$f_0 \equiv x^2\left(1+y+\frac{1-D}{4}y^2\right) \qquad (\text{mod. } 2^\varkappa),$$

wo x die Werte

$$1, 3, 5, \ldots 2^\varkappa-1,$$

y die Werte

$$0, 2, 4, \ldots 2^{\varkappa}-2$$

zu durchlaufen haben.

Bei festem y durchläuft der echte Rest von $x^2\left(1+y+\frac{1-D}{4}y^2\right)$ in Bezug auf den Modul $2^{\varkappa}$ viermal alle Zahlen von der Form $8k+1, 8k+3, 8k+5, 8k+7$ unter $2^{\varkappa}$, je nachdem

$$y \equiv 0, 2, 4, 6 \quad (\text{mod. } 8)$$

ist. $J(f_0, 2^{\varkappa})$ bildet also das $2^{\varkappa-1}$fache von $H(2^{\varkappa})$.

Ist $D \equiv 5$ (mod. 8), so kann x ungerade oder gerade sein.

Ist x ungerade, so darf y durch xy ersetzt werden und die echten Reste von $x^2\left(1+y+\frac{1-D}{4}y^2\right)$ in Bezug auf $2^{\varkappa}$ bilden, wenn x die Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots 2^{\varkappa}-1$$

durchläuft, bei festem y je viermal alle Zahlen von der Form

$$8k+1,\ 8k+7,\ 8k+5,\ 8k+3$$

$$8k+2+\frac{1-D}{4},\ 8k+4+\frac{1-D}{4},\ 8k+6+\frac{1-D}{4},\ 8k+\frac{1-D}{4},$$

je nachdem

$$y \equiv 0, 2, 4, 6$$
$$1, 3, 5, 7 \quad (\text{mod. } 8)$$

ist. Die Zahlen des Inbegriffes $J(f_0, 2^{\varkappa})$ mit ungeradem x bilden also das $2^{\varkappa}$fache von $H(2^{\varkappa})$.

Ist x gerade, so muss y ungerade sein, und man darf x durch yx ersetzen. Es wird

$$f_0 \equiv y^2\left(x^2+x+\frac{1}{4}(1-D)\right),$$

wo y die Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots 2^{\varkappa}-1,$$

x die Zahlen

$$0, 2, 4, \ldots 2^{\varkappa}-2$$

zu durchlaufen haben. Bei festem x bilden die echten Reste von $y^2\left(x^2+x+\frac{1-D}{4}\right)$ in Bezug auf $2^\varkappa$ viermal alle Zahlen von der Form

$$8k+\frac{1-D}{4},\quad 8k+6+\frac{1-D}{4},\quad 8k+4+\frac{1-D}{4},\quad 8k+2+\frac{1-D}{4}$$

unter $2^\varkappa$, je nachdem

$$x \equiv 0, 2, 4, 6 \pmod{2^\varkappa}$$

ist. Die Zahlen des Inbegriffes $J(f_0, 2^\varkappa)$ mit geradem x bilden also in Bezug auf $2^\varkappa$ das $2^{\varkappa-1}$fache von $H(2^\varkappa)$.

Der Inbegriff $J(f_0, 2^\varkappa)$ ist also in Bezug auf $2^\varkappa$ das $3\cdot 2^{\varkappa-1}$-fache von $H(2^\varkappa)$.

Ist p ungerade, so wird

$$f_0 \equiv X^2 - DY^2 \pmod{p^\varkappa},$$

wo X, Y die echten Reste der Zahlen

$$x+\frac{1-p^\varkappa}{2}y,\qquad \frac{1-p^\varkappa}{2}y$$

in Bezug auf $p^\varkappa$ bedeuten. Da je zwei Zahlen x, y der Reihe $0, 1, 2, \ldots p^\varkappa-1$, zwei bestimmte Zahlen X, Y derselben Reihe entsprechen und umgekehrt, so sind die echten Reste der Zahlen des Inbegriffes $J\left(x^2+xy+\frac{1-D}{4}y^2, p^\varkappa\right)$ dieselben wie bei dem Inbegriffe $J(x^2-Dy^2, p^\varkappa)$ und bilden ein Vielfaches von $H(p^\varkappa)$.

Es sei e eine zu m theilerfremde Zahl, welche durch die primitive Form σter Art $f=(a, \frac{b}{\sigma}, c)$ mittels der Zahlen ξ, η dargestellt wird, so dass

$$f(\xi, \eta) = e$$

ist. Sind X, Y die echten Reste der linearen Ausdrücke

$$\xi x-\left(\frac{b-\sigma+1}{\sigma}\xi+c\eta\right)y$$

$$\eta x+\left(a\xi+\frac{b+\sigma-1}{\sigma}\eta\right)y$$

in Bezug auf den Modul m, so ist

$$X \equiv \xi x - \left(\frac{b-\sigma+1}{\sigma}\xi + c\eta\right)y$$

$$Y \equiv \eta x + \left(a\xi + \frac{b+\sigma-1}{\sigma}\eta\right)y \qquad (\text{mod. } m),$$

und es entsprechen je zwei Zahlen x, y der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots m-1$$

zwei bestimmte Zahlen X, Y derselben Reihe, und es findet auch das Umgekehrte statt, da die Determinante e der genannten linearen Ausdrücke zu m theilerfremd ist. Da überdies identisch

$$f\left(\xi x - \left(\frac{b-\sigma+1}{\sigma}\xi + c\eta\right)y,\ \eta x + \left(a\xi + \frac{b+\sigma-1}{\sigma}\eta\right)y\right) = ef_0$$

ist, so wird

$$f(X, Y) \equiv ef_0(x, y) \quad (\text{mod. } m),$$

und es erhellt, dass die Zahlen $f(X, Y)$, $f_0(x, y)$ zugleich zu m theilerfremd oder nicht theilerfremd sind.

Alle Zahlen des Inbegriffes $J(f, m)$ sind sonach den Producten der Zahlen des Inbegriffes $J(f_0, m)$ in die Zahl e nach dem Modul m congruent.

8.

Es sei N das positive kleinste Vielfache der Zahlen $8, D, M$. Ist

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$

eine Zuordnung von Einheitswurzeln der Zahl M und für jede Zahl n des Inbegriffes $J(f_0, N)$

$$Pn = 1,$$

so ist Pn ein Charakterproduct der Determinante D.

Man zerlege N in einen zu M theilerfremden Factor M_0 und einen in einer Potenz von M aufgehenden, M_1, und es sei a irgendeine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots$. Es gibt eine positive, unter N liegende Zahl k, welche den Congruenzen

$$k \equiv a \quad (\text{mod. } M)$$
$$k \equiv 1 \quad (\text{mod. } M_0)$$

genügt, da M in N, also auch in M_1 aufgeht und demzufolge $MM_0 \leqq N$ ist. k ist zu N theilerfremd, weil es zu M_0 und M_1 theilerfremd ist, und die Zahl

$$k^2 = f_0(k, 0)$$

steht demnach in $J(f_0, N)$. Nach der Annahme ist also

$$Pk^2 = (Pk)^2 = 1.$$

Hieraus folgt aber

$$Pk = Pa = \pm 1.$$

Die Zahlen

$$Pa_1, Pa_2, \ldots \quad . \quad .$$

bilden also eine reelle Zuordnung von Einheitswurzeln der Zahl M und Pn muss ein Charakterproduct der Zahl M sein.

Wäre nun Pn nicht zugleich ein Charakterproduct der Determinante D, so gäbe es in $H(N)$ eine Zahl b, welche der Gleichung

$$Pb = -1$$

genügt. Es würde dann auch in $J(f_0, N)$ eine solche Zahl vorkommen, was der Annahme widerspricht.

Wenn Pn kein Charakterproduct der Determinante D ist, so ist, über alle Zahlen n des Inbegriffes $J(f_0, N)$ erstreckt,

$$\Sigma Pn = 0.$$

Denn die echten Reste r der Zahlen des Inbegriffes $J(f_0, N)$ in Bezug auf den Modul N bilden ein Vielfaches von $H(N)$, und es ist

$$Pn = Pr,$$

wenn

$$n \equiv r \quad (\text{mod. } N)$$

ist. Die Summe ΣPn ist demnach ein Vielfaches der über alle Zahlen r des Inbegriffes $H(N)$ zu erstreckenden Summe ΣPr. und es genügt zu zeigen, dass

$$\Sigma Pr = 0$$

ist.

Nach der Annahme gibt es in $J(f_0, N)$ und somit auch in $H(N)$ eine Zahl k, für welche Pk von 1 verschieden ist. Die echten Reste der Producte aller Zahlen des Inbegriffes $H(N)$ in k in Bezug auf den Modul N bilden wieder den Inbegriff $H(N)$, da sie untereinander verschieden sind und alle zu $H(N)$ gehören. Man hat also

$$\Sigma Pr = \Sigma Pkr = Pk \Sigma Pr$$

oder

$$(Pk - 1) \Sigma Pr = 0,$$

woraus

$$\Sigma Pr = 0$$

folgt.

Wenn für zwei bestimmte Zuordnungen von Einheitswurzeln der Determinante D und Zahl M und für alle Zahlen n der Inbegriffe

$$J(f_0, N), J(f_1, N), \ldots J(f_{h-1}, N)$$

und eine beliebige primitive Hilfsform 0ter Art φ der Zahl n

$$Q\varphi Pn = 1$$

ist, so sind die Zuordnungen

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$
$$Qf_0, Qf_1, \ldots$$

beide reell; Qf fällt mit einem der Charakterproducte

$$\chi_0 f, \chi_1 f, \ldots$$

etwa mit $\chi_i f$ und Pn entweder mit $\chi_i n$ oder $\chi^* n \chi_i n$ zusammen. Dieser Fall soll kurz so gekennzeichnet werden, dass die genannten Zuordnungen aus gleichen Charakterproducten der Determinante D hervorgehen.

Denn man hat für jede Zahl n des Inbegriffes $J(f_0, N)$

$$Qf_0 Pn = Pn = 1.$$

Pn ist also ein Charakterproduct $\chi_i n$ oder $\chi^* n \chi_i n$ der Determinante D. Sind ferner

$$n_0, n_1, n_2, \ldots n_{h-1}$$

Zahlen aus

$$J(f_0, N), J(f_1, N), \ldots J(f_{h-1}, N),$$

so ist für jedes k

$$Qf_k Pn_k = 1,$$

also auch

$$Qf_k \chi_i n_k = 1$$

oder

$$Qf_k = \chi_i(n_k).$$

Wenn die Zuordnungen

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$
$$Qf_0, Qf_1, \ldots$$

nicht aus gleichen Charakterproducten der Determinante D hervorgehen, so verschwindet die Summe

$$Y = Qf_0 \Sigma Pn_0 + Qf_1 \Sigma Pn_1 + \ldots + Qf_{h-1} \Sigma Pn_{h-1},$$

wo ΣPn_i über alle Zahlen n_i des Inbegriffes $J(f_i, N)$ zu erstrecken ist.

Da die Zahlen n_i des Inbegriffes $J(f_i, N)$ den Producten einer bestimmten Zahl e_i aus $J(f_i, N)$ in alle Zahlen n_0 des Inbegriffes $J(f_0, N)$ nach dem Modul N congruent sind, so ist

$$\Sigma Pn_i = Pe_i \Sigma Pn_0$$

und daher

$$Y = (Qf_0 Pe_0 + Qf_1 Pe_1 + \ldots + Qf_{h-1} Pe_{h-1}) \Sigma Pn_0.$$

Ist nun Pn kein Charakterproduct der Determinante D, so ist

$$\Sigma Pn_0 = 0,$$

also auch

$$Y = 0.$$

Ist Pn dagegen ein Charakterproduct der Determinante D, so ist für jedes k

$$Pe_k = Q'f_k,$$

wo

$$Q'f_0, Q'f_1, \ldots Q'f_{h-1}$$

eine von

$$Qf_0, Qf_1, \ldots Qf_{h-1}$$

verschiedene Zuordnung bilden. Die Zuordnung

$$Qf_0 Q'f_0, Qf_1 Q'f_1, \ldots Qf_{h-1} Q'f_{h-1}$$

besteht also nicht aus lauter Einheiten, und man hat

$$Qf_0 Pe_0 + Qf_1 Pe_1 + \ldots + Qf_{h-1} Pe_{h-1} =$$
$$= Qf_0 Q'f_0 + Qf_1 Q'f_1 + \ldots + Qf_{h-1} Q'f_{h-1} = 0,$$

also auch

$$Y = 0.$$

9.

Es werde für irgend zwei Zuordnungen

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$
$$Qf_0, Qf_1, \ldots$$

der Zahl M und Determinante D

$$Pn\Theta(n) = Fn$$

gesetzt.

Der Ausdruck Fn genügt für irgend zwei zueinander und zu N theilerfremde und Hilfsformen besitzende Zahlen n, n' der Gleichung

$$Fnn' = Fn \,.\, Fn'.$$

Gehen die der Bildung des Ausdruckes Fn zugrunde liegenden Zuordnungen nicht aus gleichen Charakterproducten der Determinante D hervor, so ist die Summe

$$\Psi s = \Sigma Fn$$

der Ausdrücke Fn, welche allen positiven, die Grenze s nicht übersteigenden, zu N theilerfremden und Hilfsformen besitzenden Zahlen n entsprechen, eine Größe von der Ordnung $\sqrt{s}$.

Die fragliche Summe besteht aus lauter Producten $PnQ\varphi$ je einer Einheitswurzel Pn in eine Einheitswurzel $Q\varphi$, wo φ eine primitive Hilfsform σ^{ter} Art der Zahl n bezeichnet. Durch

Zusammenfassung aller solchen Producte, in welchen φ einer und derselben Form f_i äquivalent ist, ergibt sich ein Ausdruck

$$Qf_i \Sigma P z_i,$$

wo die Summe über alle positiven, die Grenze s nicht übersteigenden Zahlen z_i zu erstrecken ist, welche theilerfremd zu N sind und eine mit f_i äquivalente Hilfsform besitzen. Da jeder solchen mit f_i äquivalenten Hilfsform genau k Darstellungen der Zahl z_i durch die Form f_i zugeordnet sind, wenn bei positiver Determinante nur die einfachsten Darstellungen zugelassen werden, so ergeben sich die genannten Zahlen z_i — und zwar jede $k$mal — als die Werte der Form f_i, welche aus den betreffenden darstellenden Zahlen x, y hervorgehen.

Diese darstellenden Zahlen sind durch die Bedingungen vollständig bestimmt, dass f_i theilerfremd zu N, dass

$$0 < f_i(x, y) \leqq s$$

und bei positiver Determinante überdies

$$1 < \frac{a_i x + \frac{b_i + \sqrt{D}}{\sigma} y}{\sqrt{a_i z_i}} \leqq \frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}$$

ausfalle, oder was dasselbe ist,

$$x \geqq 0$$
$$0 \leqq y < \frac{a_i U}{T - b_i U} x$$

wird, wenn $f_i = \left(a_i, \frac{b_i}{\sigma}, c_i\right)$ gesetzt wird.

Setzt man

$$x = Nu + \xi$$
$$y = Nv + \eta,$$

wo u, v ganze Zahlen sind und ξ, η der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots N-1$$

angehören, so muss $f_i(\xi, \eta)$ zu N theilerfremd sein, also dem Inbegriffe $J(f_i, N)$ angehören und überdies

$$0 < f(\xi + Nu, \eta + Nv) \leqq s$$

und bei positiver Determinante

$$\xi + Nu \geqq 0$$
$$0 \leqq \eta + Nv < \frac{a_i U}{T - b_i U}(\xi + Nu)$$

sein.

Das $k$fache der Summe ΣPz_i zerfällt hienach in ebensoviele Theilsummen, als es Zahlen in $J(f_i, N)$ gibt.

Die einer bestimmten Zahl n_i aus $J(f_i, N)$ oder einem bestimmten Zahlenpaar ξ, η entsprechende Theilsumme ist aber, da ihre Glieder alle denselben Wert Pn_i haben, das Product von Pn_i in die Anzahl aller Zahlenpaare u, v, welche den obigen Ungleichungen genügen. Für diese Anzahl ergibt sich, wie aus der Bestimmung der Anzahl der Classen primitiver Formen 1ter Art der Determinante D bekannt ist, mit Hilfe einer Flächenberechnung ein Ausdruck

$$As + \{\sqrt{s}\},$$

wo bei positiver Determinante

$$A = \frac{1}{2N^2\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma},$$

bei negativer

$$A = \frac{\pi}{N^2\sqrt{-D}}$$

ist und unter $\{\sqrt{s}\}$ eine Größe zu verstehen ist, welche unter einer Grenze $B\sqrt{s}$ mit constantem angebbaren B bleibt.

Die der Zahl n_i entsprechende Theilsumme ist daher

$$Pn_i As + \{\sqrt{s}\}.$$

Durch Zusammenfassung aller Theilsummen folgt

$$\Sigma Pz_i = \frac{1}{k} As \Sigma Pn_i + \{\sqrt{s}\},$$

wo die Summe $\Sigma P n_i$ auf alle Zahlen n_i des Inbegriffes $J(f_i, N)$ zu beziehen ist.

Multipliciert man mit Qf_i und summiert nach i, so ergibt sich

$$\Psi s = \frac{1}{k} As Y + \{\sqrt{s}\},$$

wo Y die Bedeutung des Abschnittes 8 hat. Da aber Y nach der Annahme verschwindet, so ist also

$$\Psi(s) = \{\sqrt{s}\}.$$

Aus der bewiesenen Eigenschaft von Ψs ergibt sich in bekannter Weise die Convergenz der Reihe

$$L(\rho) = \sum_1^\infty \frac{Fn}{n^{1+\rho}},$$

in welcher n alle positiven, zu N theilerfremden und Hilfsformen besitzenden Zahlen zu durchlaufen hat und ρ eine nicht negative Größe bedeutet.

Denn es ist

$$\sum_{m+1}^{m+p} \frac{Fn}{n^{1+\rho}} = \sum \frac{\Psi(m+k) - \Psi(m+k-1)}{(m+k)^{1+\rho}},$$

wo k alle Zahlen von 1 bis p zu durchlaufen hat. Daher ist

$$\begin{aligned}
\sum_{m+1}^{m+p} \frac{Fn}{n^{1+\rho}} = & -\frac{\Psi(m)}{(m+1)^{1+\rho}} + \frac{\Psi(m+p)}{(m+p)^{1+\rho}} \\
& + \Psi(m+1)\left(\frac{1}{(m+1)^{1+\rho}} - \frac{1}{(m+2)^{1+\rho}}\right) \\
& + \Psi(m+2)\left(\frac{1}{(m+2)^{1+\rho}} - \frac{1}{(m+3)^{1+\rho}}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \Psi(m+p-1)\left(\frac{1}{(m+p-1)^{1+\rho}} - \frac{1}{(m+p)^{1+\rho}}\right).
\end{aligned}$$

Da aber

$$|\Psi s| < B\sqrt{s}$$

also

$$\left|\frac{-\Psi m}{(m+1)^{1+\rho}}\right| < \frac{B\sqrt{m}}{(m+1)^{1+\rho}} < \frac{B}{(m+1)^{\frac{1}{2}+\rho}}$$

$$\left|\frac{\Psi(m+p)}{(m+p)^{1+\rho}}\right| < \frac{B\sqrt{m+p}}{(m+p)^{1+\rho}} < \frac{B}{(m+p)^{\frac{1}{2}+\rho}}$$

$$|\Psi(m+k)|\left(\frac{1}{(m+k)^{1+\rho}} - \frac{1}{(m+k+1)^{1+\rho}}\right)$$

$$< B\sqrt{m+k}\left(\frac{1}{(m+k)^{1+\rho}} - \frac{1}{(m+k+1)^{1+\rho}}\right)$$

$$< \frac{B}{(m+k)^{\frac{1}{2}+\rho}} - \frac{B}{(m+k+1)^{\frac{1}{2}+\rho}}$$

ist, so ergibt sich

$$\left|\sum_{m+1}^{m+p} \frac{Fn}{n^{1+\rho}}\right| < \frac{2B}{(m+1)^{\frac{1}{2}+\rho}}.$$

Die Summe

$$\sum_{m+1}^{m+p} \frac{Fn}{n^{1+\rho}}$$

kann also durch passende Wahl von m beliebig klein gemacht werden.

Insbesondere ist

$$\left|\sum_{m+1}^{m+p} \frac{Fn}{n}\right| < \frac{2B}{\sqrt{m+1}}$$

$$|L(0)| < 2B.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich die Convergenz der Reihe

$$\sum \frac{Fn \log n}{n},$$

in welcher n dieselben Zahlen wie in der Reihe $L(\rho)$ zu durchlaufen hat.

Versteht man unter s eine ganze positive Zahl und setzt zur Abkürzung

$$\sum_m^s \frac{Fn}{n} = c_m$$

$$\Delta = \sum_1^s \frac{Fn}{n} - \sum_1^s \frac{Fn}{n^{1+\rho}},$$

so wird

$$\sum_1^s \frac{Fn}{n} = (c_1 - c_2) + (c_2 - c_3) + \ldots + (c_{s-1} - c_s) + c_s$$

$$\sum_1^s \frac{Fn}{n^{1+\rho}} = \frac{c_1 - c_2}{1^\rho} + \frac{c_2 - c_3}{2^\rho} + \ldots + \frac{c_{s-1} - c_s}{(s-1)^\rho} + \frac{c_s}{s^\rho}$$

und hienach

$$\Delta = (c_2 - c_3)\left(1 - \frac{1}{2^\rho}\right) + (c_3 - c_4)\left(1 - \frac{1}{3^\rho}\right) + \ldots$$

$$\ldots + (c_{s-1} - c_s)\left(1 - \frac{1}{(s-1)^\rho}\right) + c_s\left(1 - \frac{1}{s^\rho}\right)$$

$$= c_2\left(1 - \frac{1}{2^\rho}\right) + c_3\left(\frac{1}{2^\rho} - \frac{1}{3^\rho}\right) + \ldots + c_s\left(\frac{1}{(s-1)^\rho} - \frac{1}{s^\rho}\right).$$

Es ist aber, wenn

$$0 < \rho \leqq 1$$

angenommen wird, nach dem binomischen Satze

$$\frac{1}{(k-1)^\rho} - \frac{1}{k^\rho} = \frac{\rho}{k^{1+\rho}} + \frac{\rho(\rho+1)}{1.2}\,\frac{1}{k^{2+\rho}} + \ldots$$

$$< \frac{\rho}{k} + \frac{\rho}{k^2} + \frac{\rho}{k^3} + \ldots$$

$$< \frac{\rho}{k-1}$$

und nach dem Vorhergehenden

$$|c_m| < \frac{2B}{\sqrt{m}}.$$

Daher wird

$$|\Delta| < 2BB'\rho,$$

wo B' die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \ldots$$

bezeichnet.

Für $s = \infty$ ergibt sich hieraus

$$|L(0) - L(\rho)| < 2BB'\rho.$$

Da aber

$$L(\rho) = L(0) - (L(0) - L(\rho)),$$

also

$$|L(\rho)| \leqq |L(0)| + |L(0) - L(\rho)|$$

ist, so folgt

$$|L(\rho)| < |L(0)| + 2BB'\rho.$$

10.

Es sei

$$Qf_0, Qf_1, \ldots$$

eine reelle Zuordnung der Determinante D und $Qf_k = \chi_i f_k$.

Besitzt die zu N theilerfremde Zahl n primitive Hilfsformen 0ter Art

$$\varphi, \psi, \ldots,$$

so ist für alle diese Formen

$$Q\varphi = Q\psi = \ldots = \chi_i n$$

und demnach

$$\Theta n = \mathfrak{A}_n \chi_i n,$$

wo $\mathfrak{A}_n$ die Anzahl der genannten Hilfsformen von n bezeichnet. Da diese Anzahl durch die über alle Theiler δ von n zu erstreckende Summe

$$S_n = \sum \left(\frac{D}{\delta}\right)$$

ausgedrückt wird, so ergibt sich

$$\Theta n = S_n \chi_i n.$$

Gehen daher die Zuordnungen

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$
$$Qf_0, Qf_1, \ldots$$

aus gleichen Charakterproducten der Determinante D hervor und ist $Qf_k = \chi_i f_k$, $Pn = \chi_i n$ oder $= \chi^* n . \chi_i n$, so wird

$$Fn = S_n$$

und

$$L(\rho) = \sum \frac{S_n}{n^{1+\rho}},$$

wo die Summation über alle zu N theilerfremden positiven Zahlen n zu erstrecken ist, welche primitive Hilfsformen σ^{ter} Art besitzen. Da aber S_n verschwindet, wenn n keine solchen Hilfsformen besitzt, so kann die Summation über alle zu N theilerfremden Zahlen n erstreckt werden.

Fasst man alle Glieder zusammen, welche ein und dasselbe Symbol $\left(\frac{D}{m}\right)$ als Factor enthalten, so ist ihre Summe

$$= \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m^{1+\rho}} \sum \frac{1}{n^{1+\rho}},$$

und es ergibt sich

$$L(\rho) = \sum \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m^{1+\rho}} \sum \frac{1}{n^{1+\rho}},$$

wo m und n wieder alle zu N theilerfremden Zahlen zu durchlaufen haben.

Da die Summe $\sum_1^s \left(\frac{D}{m}\right)$ nie die Grenze $\varphi(\pm 4D)$ übersteigt, so ist

$$\sum \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m^{1+\rho}} < \varphi(\pm 4D).$$

Ferner ist

$$\sum \frac{1}{n^{1+\rho}} < 1 + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \ldots$$

$$\frac{1}{k^{1+\rho}} < \frac{1}{\rho(k-1)^\rho} - \frac{1}{\rho k^\rho},$$

also

$$\sum \frac{1}{n^{1+\rho}} < 1 + \frac{1}{\rho}.$$

Hienach ergibt sich

$$L(\rho) < \varphi(\pm 4D)\,\frac{1+\rho}{\rho}.$$

11.

Jede Reihe

$$L(0) = \sum \frac{Fn}{n},$$

welche zwei nicht aus gleichen Charakterproducten der Determinante D hervorgehenden Zuordnungen

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$

$$Qf_0, Qf_1, \ldots$$

entspricht, hat eine von Null verschiedene Summe.

Der Beweis dieses Satzes erfordert die Unterscheidung zweier Fälle, je nachdem die Zuordnung

$$Qf_0, Qf_1, \ldots Qf_{h-1}$$

imaginär oder reell ist.

I. Die Wurzeln

$$Qf_0, Qf_1, Qf_2, \ldots Qf_{h-1}$$

seien nicht alle reell.

Es gibt einen kleinsten positiven Exponenten m von der Art, dass die Zuordnungen

$$P^m a_1, P^m a_2, \ldots$$

$$Q^m f_0, Q^m f_1, \ldots$$

aus gleichen Charakterproducten der Determinante D hervorgehen oder dass für jede Zahl n der Inbegriffe

$$J(f_0, N), J(f_1, N), \dots J(f_{h-1}, N)$$

und jede primitive Hilfsform σ^{ter} Art φ der Zahl n

$$Q^m \varphi P^m n = 1$$

ist. Denn die $h\varphi M^{\text{ten}}$ Potenzen von $Pa_1, Pa_2, \dots Qf_0, Qf_1, \dots$ genügen jedenfalls dieser Bedingung, wenn es nicht schon eine geringere Potenz thut. Dieser Exponent m kann > 2 oder $= 2$ sein.

Ist $m > 2$, so werde der für die Zuordnungen

$$P^k a_1, P^k a_2, \dots$$
$$Q^k f_0, Q^k f_1, \dots$$

gebildete Ausdruck Fn mit $F_k n$ und die Reihe

$$\sum \frac{F_k n}{n^{1+\rho}}$$

mit $L_k(\rho)$ bezeichnet.

Man denke sich jede positive, zu N theilerfremde und primitive Hilfsformen σ^{ter} Art besitzende Zahl n auf alle möglichen Weisen in m positive Factoren

$$d_0, d_1, \dots d_{m-1}$$

zerlegt, deren jeder wieder der Bedingung genügt, Hilfsformen der genannten Art zu besitzen, und setze, die Summation über alle diese Zerlegungen erstreckt,

$$\Phi n = \Sigma F_0 d_0 . F_1 d_1 \dots F_{m-1} d_{m-1}.$$

Zwei Zerlegungen

$$n = d'_0 d'_1 \dots d'_{m-1}$$
$$n = d''_0 d''_1 \dots d''_{m-1}$$

gelten als verschieden, wenn nicht gleichzeitig

$$d'_0 = d''_0, \; d'_1 = d''_1, \dots d'_{m-1} = d''_{m-1}$$

ist.

Für je zwei zueinander und zu N theilerfremde Zahlen n', n'', welche primitive Hilfsformen o^{ter} Art besitzen, ist

$$\Phi(n'n'') = \Phi(n')\Phi(n'').$$

Denn jede Zerlegung der Zahl $n'n''$ in m Factoren $d_0, d_1, \ldots d_{m-1}$ liefert, wenn man d_i in die in n' und n'' aufgehenden positiven Factoren d'_i und d''_i zerfällt, zwei ganz bestimmte Zerlegungen

$$n' = d'_0 d'_1 \ldots d'_{m-1}$$
$$n'' = d''_0 d''_1 \ldots d''_{m-1}$$

der Zahlen n', n'' in m positive Factoren, und es erhellt, dass d'_i, d''_i primitive Hilfsformen o^{ter} Art besitzen, wenn $d'_i d''_i = d_i$ solche besitzt, und dass auf diesem Wege aus allen Zerlegungen von $n'n''$ alle Zusammenstellungen je einer Zerlegung von n' mit je einer Zerlegung von n'' hervorgehen. Da überdies

$$F_i d_i = F_i d'_i d''_i = F_i d'_i . F d''_i$$

ist, weil d'_i, d''_i zueinander und zu N theilerfremd sind, so wird

$$\begin{aligned}\Phi(n'n'') &= \Sigma F_0 d_0 . F_1 d_1 \ldots F_{m-1} d_{m-1} \\ &= \Sigma F_0 d'_0 . F_0 d''_0 . F_1 d'_1 . F_1 d''_1 \ldots F_{m-1} d'_{m-1} . F_{m-1} d''_{m-1} \\ &= \Sigma F_0 d'_0 . F_1 d'_1 \ldots F_{m-1} d'_{m-1} . \Sigma F_0 d''_0 . F_1 d''_1 \ldots F_{m-1} d''_{m-1} \\ &= \Phi(n') . \Phi(n'').\end{aligned}$$

Φn ist eine nicht negative Zahl.

Denn es ist

$$\Phi(1) = 1$$

und für ein Product von Primzahlpotenzen $p^\alpha, q^\beta, \ldots$

$$\Phi(p^\alpha q^\beta \ldots) = \Phi(p^\alpha) . \Phi(q^\beta) \ldots$$

Es genügt also, die behauptete Eigenschaft für den Fall darzuthun, wo n eine Primzahlpotenz $q^\varkappa$ ist.

Ist q eine Primzahl, welche zwei Hilfsformen φ_1, ψ_1 besitzt, so müssen und können in jeder Zerlegung von $q^\varkappa$ in m positive Factoren diese Factoren beliebige Potenzen von q sein. Jede dieser Zerlegungen hat also die Gestalt

$$q^\varkappa = q^{\lambda_0} q^{\lambda_1} \ldots q^{\lambda_{m-1}},$$

wo $\delta_0, \delta_1, \ldots \delta_{m-1}$ alle Lösungen der Gleichung

$$\delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{m-1} = \pi$$

in nicht negativen ganzen Zahlen bezeichnen. Es ist daher, über alle diese Lösungen erstreckt,

$$\Phi(q^\pi) = \Sigma F_0 q^{\delta_0} . F_1 q^{\delta_1} \ldots F_{m-1} q^{\delta_{m-1}},$$

und man kann $\Phi(q^\pi)$ als Coefficienten von t^π in der Entwickelung des Productes

$$\prod_i (F_i 1 + F_i q t + \ldots + F_i q^\pi t^\pi)$$

auffassen. Nach A. 5 bildet das Polynom

$$\Theta_i(1) + t\Theta_i(q) + \ldots + t^\pi \Theta_i(q^\pi)$$

die $\pi + 1$ ersten Glieder der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1 - tQ^i \varphi_1)(1 - tQ^i \psi_1)}$$

nach steigenden Potenzen von t, also das Polynom

$$F_i 1 + tF_i q + \ldots + t^\pi F_i q^\pi$$

die $\pi + 1$ ersten Glieder der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1 - tP^i q Q^i \varphi_1)(1 - tP^i q Q^i \psi_1)}.$$

$\Phi(q^\pi)$ erscheint daher als Coefficient von t^π in der Entwickelung des Productes

$$\prod_i \frac{1}{(1 - tP^i q Q^i \varphi_1)(1 - tP^i q Q^i \psi_1)}$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots m - 1.$$

Die kleinsten positiven Exponenten δ, ε, für welche

$$(PqQ\varphi_1)^\delta = 1$$
$$(PqQ\psi_1)^\varepsilon = 1$$

wird, sind Theiler von m, weil

$$(PqQ\varphi_1)^m = (PqQ\psi_1)^m = 1$$

ist, und man hat

$$\prod_i \frac{1}{1-tP^iqQ^i\varphi_1} = \frac{1}{(1-t^\delta)^{\frac{m}{\delta}}}$$

$$\prod \frac{1}{1-tP^iqQ^i\psi_1} = \frac{1}{(1-t^\varepsilon)^{\frac{m}{\varepsilon}}}.$$

Die Entwickelungscoefficienten des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-t^\delta)^{\frac{m}{\delta}}(1-t^\varepsilon)^{\frac{m}{\varepsilon}}}$$

sind aber durchweg nicht negative ganze Zahlen.

Ist q eine Primzahl, von welcher D quadratischer Nichtrest ist, so muss π gerade sein, und es gibt nur eine primitive Hilfsform 0ter Art f_0 von q^π. Jede Zerlegung von q^π muss aus m geraden Potenzen von q bestehen, also die Gestalt

$$q^\pi = q^{2\delta_0} q^{2\delta_1} \dots q^{2\delta_{m-1}}$$

haben, wo

$$\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{m-1} = \frac{\pi}{2}$$

ist. Es wird also, über alle Lösungen dieser Gleichung erstreckt,

$$\Phi(q^\pi) = \Sigma F_0 q^{2\delta_0} . F_1 q^{2\delta_1} \dots F_{m-1} q^{2\delta_{m-1}}.$$

Es ist aber

$$F_0 q^{2\delta_0} = P^0 q^{2\delta_0} = 1$$
$$F_1 q^{2\delta_1} = Pq^{2\delta_1} = (Pq)^{2\delta_1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_{m-1} q^{2\delta_{m-1}} = P^{m-1} q^{2\delta_{m-1}} = (Pq)^{2(m-1)\delta_{m-1}}$$

und daher $\Phi(q^\pi)$ der Coefficient von t^π in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-t^2)(1-t^2Pq^2)\dots(1-t^2(Pq^2)^{m-1})}.$$

Da aber

$$Q^m f_0 P^m q^2 = P^m q^2 = 1$$

ist, so ist Pq^2 eine m^{te} Einheitswurzel und der kleinste Exponent ε, zu welchem Pq^2 erhoben $= 1$ wird, ein Theiler von m. Daher ist

$$\frac{1}{(1-t^2)(1-t^2Pq^2)\ldots(1-t^2P^{m-1}q^2)} = \frac{1}{(1-t^{2\varepsilon})^{\frac{m}{\varepsilon}}}$$

und $\Phi(q^{\tau})$ auch hier eine nicht negative ganze Zahl.

Dies vorausgeschickt, besteht das Product der Reihen

$$L_0(\rho),\ L_1(\rho), \ldots L_{m-1}(\rho)$$

aus lauter Gliedern von der Gestalt

$$\frac{F_0 n_0 \,.\, F_1 n_1 \ldots F_{m-1} n_{m-1}}{(n_0 n_1 \ldots n_{m-1})^{1+\rho}},$$

wo $n_0, n_1, \ldots n_{m-1}$ alle möglichen positiven, zu N theilerfremden und primitive Hilfsformen σ^{ter} Art besitzenden Zahlen zu durchlaufen haben. Die Zusammenfassung aller Glieder, in welchen das Product $n_0 n_1 \ldots n_{m-1}$ einen und denselben Wert n hat, ergibt die über alle Zerlegungen der Zahl n in m Factoren $n_0, n_1, \ldots n_{m-1}$ von der im vorhergehenden betrachteten Art zu erstreckende Summe

$$\sum \frac{F_0 n_0 F_1 n_1 \ldots F_{m-1} n_{m-1}}{n^{1+\rho}}$$

oder $\frac{\Phi(n)}{n^{1+\rho}}$. Hienach ist

$$L_0(\rho) L_1(\rho) \ldots L_{m-1}(\rho) = \sum \frac{\Phi(n)}{n^{1+\rho}},$$

wo N alle positiven, zu N theilerfremden und primitive Hilfsformen σ^{ter} Art besitzende Zahlen zu durchlaufen hat.

Da $\Phi(1) = 1$ und allgemein $\Phi(n) \geqq 0$ ist, so ist demnach

$$L_0(\rho) L_1(\rho) \ldots L_{m-1}(\rho) \geqq 1.$$

Es ist aber

$$|L_1(\rho)| = |L_{m-1}(\rho)| < |L_1(0)| + 2BB'\rho,$$

weil für jede Zahl n und jede Hilfsform φ von n

$$P^{m-1} n Q \varphi^{m-1} = P^{-1} n Q^{-1} \varphi$$

und daher $L_{m-1}(\rho)$ zu $L_1(\rho)$ conjugirt ist; ferner ist

$$L_0(\rho) > \varphi(\pm 4D) \frac{1+\rho}{\rho}$$

und für jeden von 0, 1, $m-1$ verschiedenen Stellenzeiger k

$$|L_k(\rho)| < 2B.$$

Daher wird

$$\varphi(\pm 4D) \frac{1+\rho}{\rho} (|L_1(0)| + 2BB'\rho)^2 (2B)^{m-3} > 1$$

oder

$$|L_1(0)| + 2BB'\rho > \sqrt{\frac{\rho}{K(1+\rho)}},$$

wo

$$K = (2B)^{m-3} \varphi(\pm 4D)$$

ist. Nimmt man also etwa

$$\rho = \frac{1}{4\sqrt{K}BB'(4\sqrt{K}BB'+1)},$$

so ergibt sich

$$|L_1(0)| > \frac{1}{8KBB'}.$$

Es sei jetzt $m = 2$.

Es sei $F_{\alpha\beta} n$ der für die Zuordnungen

$$P^\alpha a_1, \; P^\alpha a_2, \dots$$
$$Q^\beta f_0, \; Q^\beta f_1, \dots$$

gebildete Ausdruck Fn und $L_{\alpha\beta}(\rho)$ die Reihe

$$L_{\alpha\beta}(\rho) = \sum \frac{F_{\alpha\beta} n}{n^{1+\rho}}.$$

Man denke sich jede positive, zu N theilerfremde Zahl n, welche primitive Hilfsformen σ^{ter} Art besitzt, auf alle möglichen Weisen in acht positive Factoren

$$d_{00}, d_{10}, d_{20}, d_{30}$$
$$d_{01}, d_{11}, d_{21}, d_{31}$$

zerlegt, deren jeder solche Hilfsformen besitzt, und setze, über alle diese Zerlegungen der Zahl n erstreckt,

$$\Phi(n) = \Sigma F_{00} d_{00} \cdot F_{10} d_{10} \ldots F_{31} d_{31}.$$

Man findet, wie vorher,

$$\Phi(1) = 1$$

und für irgend zwei zueinander und zu N theilerfremde Zahlen n', n'', welche primitive Hilfsformen σter Art besitzen,

$$\Phi(n'n'') = \Phi(n')\Phi(n'').$$

Für eine Potenz einer nicht in N aufgehenden Primzahl q, welche zwei Hilfsformen φ_1, ψ_1 besitzt, ergibt sich $\Phi(q^{\varkappa})$ als Coefficient von t^n in der Entwickelung des Ausdruckes

$$E = \prod \frac{1}{(1 - tP^{\alpha} q Q^{\beta} \varphi_1)(1 - tP^{\alpha} q Q^{\beta} \psi_1)}$$

nach steigenden Potenzen von t, wo das Product auf die Werte

$$\alpha = 0, 1, 2, 3$$
$$\beta = 0, 1$$

zu beziehen ist.

Da die Zuordnungen

$$P^2 a_1, P^2 a_2, \ldots$$
$$Q^2 f_0, Q^2 f_1, \ldots$$

aus gleichen Charakterproducten der Determinante D hervorgehen, also reell sind, so sind

$$Pa_1, Pa_2, \ldots Qf_0, Qf_1, \ldots$$

durchweg vierte Einheitswurzeln, und es muss wenigstens für eine der Formen $f_0, f_1, \ldots$, etwa f_{ε},

$$Qf_{\varepsilon} = \pm i$$

sein, weil die Wurzeln $Qf_0, Qf_1, \ldots$ nach der Annahme nicht alle reell sind. Es ist dann auch für jede Zahl n_ε des Inbegriffes $J(f_\varepsilon, N)$

$$Pn_\varepsilon = \pm i,$$

weil $Pn_\varepsilon Qf_\varepsilon$ reell ist.

Ist nun

$$Pq = \pm i,$$

so wird

$$\prod \frac{1}{1-tP^\alpha qQ^\beta\varphi_1} = \prod \frac{1}{1-tP^\alpha qQ^\beta\psi_1} = \frac{1}{1-t^4}$$

$$\alpha = 0, 1, 2, 3$$

$$E = \frac{1}{(1-t^4)^2}.$$

Ist

$$Pq = -1,$$

so ist den Gleichungen

$$P^2qQ^2\varphi_1 = P^2qQ^2\psi_1 = 1$$

zufolge

$$Q^2\varphi_1 = Q^2\psi_1 = 1$$

und

$$\prod \frac{1}{1-tP^\alpha qQ^\beta\varphi_1} = \prod \frac{1}{1-tP^\alpha qQ^\beta\psi_1} = \frac{1}{(1-t^2)^2}$$

$$\alpha = 0, 1, 2, 3$$

$$E = \frac{1}{(1-t^2)^4}.$$

Ist endlich

$$Pq = 1,$$

also

$$Q\varphi_1 = Q\psi_1 = \pm 1,$$

so wird

$$\prod \frac{1}{1-tP^\alpha qQ^\beta\varphi_1} = \prod \frac{1}{1-tP^\alpha qQ^\beta\psi_1} = \frac{1}{(1-tQ^\beta\varphi_1)^4}$$

$$\alpha = 0, 1, 2, 3$$

und

$$E = \frac{1}{(1-t)^8}$$

oder

$$E = \frac{1}{(1-t^2)^4},$$

je nachdem $Q\varphi_1 = 1$ oder $= -1$ ist.

Ist q eine Primzahl, von welcher D Nichtrest ist, so kommen nur gerade Potenzen von q in Betracht. Man hat

$$F_{\alpha\beta} q^{2k} = P^\alpha q^{2k},$$

und $\Phi(q^\pi)$ ist der Coefficient von t^π in der Entwickelung des Ausdruckes

$$E = \prod \frac{1}{(1-t^2 P^\alpha q^2)^2}$$

$$\alpha = 0, 1, 2, 3.$$

Der Gleichung

$$P^2 q^2 Q^2 f_0 = 1$$

zufolge ist

$$Pq^2 = \pm 1$$

und demnach

$$E = \frac{1}{(1-t^2)^8}$$

oder

$$E = \frac{1}{(1-t^4)^4}.$$

In allen Fällen hat also E nicht negative Entwickelungscoefficienten, und $\Phi(q^\pi)$ ist eine nicht negative Zahl. Dasselbe gilt von $\Phi(n)$, wenn n verschiedene Primfactoren besitzt.

Man findet also, wie vorher,

$$\Pi L_{\alpha\beta}(\rho) = \sum \frac{\Phi(n)}{n^{1+\rho}} \geqq 1$$

$$\alpha = 0, 1, 2, 3 \qquad \beta = 0, 1.$$

Unter den acht Reihen

$$L_{00}(\rho),\ L_{10}(\rho),\ L_{20}(\rho),\ L_{30}(\rho)$$
$$L_{01}(\rho),\ L_{11}(\rho),\ L_{21}(\rho),\ L_{31}(\rho)$$

bezieht sich nur die erste, L_{00}, auf zwei Zuordnungen, welche aus gleichen Charakterproducten der Determinante D hervorgehen, und es ist

$$L_{00}(\rho) > \varphi(\pm 4D)\,\frac{1+\rho}{\rho}.$$

Denn

$$Pa_1,\quad Pa_2,\ldots$$
$$P^3a_1,\ P^3a_2,\ldots$$
$$Qf_0,\quad Qf_1,\ldots$$

sind imaginäre Zuordnungen, und auch die Zuordnungen

$$P^2a_1,\ P^2a_2,\ldots$$
$$Q^0f_0,\ Q^0f_1,\ldots,$$

welche der Reihe $L_{20}(\rho)$ zugrunde liegen, gehen nicht aus gleichen Charakterproducten von D hervor, da nach dem Obigen

$$P^2n_\varepsilon = -1 \qquad Q^0f_\varepsilon = 1$$

ist.

Da ferner $Q^{-1}f$ zu Qf conjugiert und Θn reell ist, so hat man für die primitiven Hilfsformen σter Art $\varphi, \psi, \ldots \omega$ jeder Zahl n

$$Q^{-1}\varphi + Q^{-1}\psi + \ldots + Q^{-1}\omega = Q\varphi + Q\psi + \ldots + Q\omega$$

und daher auch

$$Pn(Q^{-1}\varphi + Q^{-1}\psi + \ldots) = Pn(Q\varphi + Q\psi + \ldots);$$

weil aber

$$P^2nQ^2\varphi = Pn^2Q^2\psi = \ldots = Pn^2Q^2\omega = 1$$

ist, so wird

$$PnQ^{-1}\varphi = P^3nQ\varphi$$
$$PnQ^{-1}\psi = P^3nQ\psi$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$PnQ^{-1}\omega = P^3nQ\omega$$

und somit

$$P^3 n(Q\varphi + Q\psi + \ldots) = Pn(Q\varphi + Q\psi + \ldots)$$

oder

$$F_{31} n = F_{11} n.$$

Daher ist

$$L_{31}(\rho) = L_{11}(\rho)$$

und

$$|L_{11}(\rho)| = |L_{31}(\rho)| < |L_{11}(0)| + 2BB'\rho.$$

Für jede der fünf Reihen $L_{\alpha\beta}(\rho)$ endlich, in welchen $\alpha\beta$ von den Zahlenpaaren 00, 11, 31 verschieden ist, ist

$$|L_{\alpha\beta}(\rho)| < 2B.$$

Daher wird

$$\varphi(\pm 4D) \frac{1+\rho}{\rho} (|L_{11}(0)| + 2BB'\rho)^2 (2B)^5 > 1$$

oder

$$|L_{11}(0)| + 2BB'\rho > \sqrt{\frac{\rho}{R(1+\rho)}},$$

wo

$$R = (2B)^5 \varphi(\pm 4D)$$

ist. Nimmt man also

$$\rho = \frac{1}{4BB'\sqrt{R}(4BB'\sqrt{R}+1)},$$

so ergibt sich

$$|L_{11}(0)| > \frac{1}{8RBB'}.$$

II. Es seien

$$Qf_0, Qf_1 \ldots Qf_{h-1}$$

reell und

$$Qf_0 = \chi_i f_0, Qf_1 = \chi_i f_1, \ldots Qf_{h-1} = \chi_i f_{h-1}.$$

Hat S_n die in Abschnitt 10 festgesetzte Bedeutung, so ist

$$\Theta n = \chi_i n S_n$$

und daher

$$Fn = Pn\chi_i n S_n$$

$$L(0) = \sum \frac{Pn\chi_i n S_n}{n},$$

wo die Summation über alle zu N theilerfremden positiven Zahlen erstreckt werden kann, weil S_n für die Zahlen, welche keine Hilfsformen besitzen, verschwindet.

Sind

$$b_1, b_2, \ldots$$

die positiven, unter N liegenden, zu N theilerfremden Zahlen, so bilden die Wurzelreihen

$$Pb_1\chi_i b_1, \qquad Pb_2\chi_i b_2, \qquad \ldots$$

$$Pb_1\chi_i b_1 \left(\frac{D}{b_1}\right), \; Pb_2\chi_i b_2 \left(\frac{D}{b_2}\right), \ldots$$

zwei Zuordnungen von Einheitswurzeln der Zahl N. Denn es ist für irgend zwei zu N theilerfremde Zahlen n, n'

$$Pn\chi_i n \,.\, Pn'\chi_i n' = Pnn'\chi_i nn'$$

$$Pn\chi_i n \left(\frac{D}{n}\right) . Pn'\chi_i n' \left(\frac{D}{n'}\right) = Pnn'\chi_i nn' \left(\frac{D}{nn'}\right).$$

Keine dieser Zuordnungen besteht aus lauter positiven Einheiten. Denn es gibt nach der Annahme (A. 6) in einem der Inbegriffe

$$J(f_0, N), J(f_1, N), \ldots J(f_{h-1}, N),$$

etwa in $J(f_\varepsilon, N)$, eine Zahl n_ε, für welche die Wurzel

$$Pn_\varepsilon Q f_\varepsilon = Pn_\varepsilon \chi n_\varepsilon$$

von 1 verschieden ist. Für dieselbe Zahl ist $Pn_\varepsilon \chi n_\varepsilon \left(\frac{D}{n_\varepsilon}\right)$ von 1 verschieden, weil $\left(\frac{D}{n_\varepsilon}\right) = 1$ ist.

Die Reihen

$$S' = \Sigma Pn\chi_i n \,.\, \frac{1}{n}$$

$$S'' = \Sigma Pn\chi_i n \,.\, \left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

sind somit convergent und von Null verschieden, da sie bei dem Beweise des Satzes intervenieren, dass die Linearform $Nx+1$ unendlich viele Primzahlen darstellt.

Überdies ist[1]

$$L(0) = S'S''.$$

12.

Es sei

$$T(s) = \sum \frac{Fn}{n}$$

$$U(s) = \sum \frac{Fn}{n} \log n,$$

wo die Summationen über alle positiven, die Grenze s nicht übersteigenden, zu N theilerfremden Zahlen n zu erstrecken sind, welche primitive Hilfsformen σ^{ter} Art besitzen.

Man zerlege in jedem Gliede

$$\frac{Fn \log n}{n}$$

der zweiten Summe den Logarithmus in die Summe der Logarithmen der in n aufgehenden Primzahlpotenzen und ordne das Resultat nach den Logarithmen dieser Primzahlpotenzen. Ist q^m eine zu N theilerfremde Primzahlpotenz, welche primitive Hilfsformen σ^{ter} Art besitzt und die Grenze s nicht übersteigt, so erscheint $\log q^m$ in dem Resultate mit der Summe

$$\sum \frac{Fq^m n'}{q^m n'}$$

multipliciert, in welcher n' alle positiven, die Grenze $\frac{s}{q^m}$ nicht übersteigenden, zu qN theilerfremden und primitive Hilfsformen σ^{ter} Art besitzenden Zahlen zu durchlaufen hat. Wird daher die über dieselben Zahlen n' zu erstreckende Summe

$$\sum \frac{Fn'}{n'}$$

---

[1] Vergl. meinen Aufsatz in diesen Sitzungsberichten, Bd. CIV, Abth. II. a, December 1895: »Über Dirichlet'sche Reihen«.

mit Sq^m bezeichnet, so ist

$$\sum \frac{Fq^m n'}{q^m n'} = \frac{Fq^m}{q^m} Sq^m$$

und $\log q^m$ hat in dem in Rede stehenden Resultate den Coefficienten $\frac{Fq^m}{q^m} Sq^m$. Man hat also

$$U(s) = \sum \frac{Fq^m}{q^m} Sq^m \log q^m,$$

wo die Summe auf alle in Betracht kommenden Primzahlpotenzen q^m zu beziehen ist.

Ist q eine Primzahl, welche zwei primitive Hilfsformen 2ter Art φ_1, ψ_1 besitzt, so ist Fq^m der Coefficient von t^m in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-tPqQ\varphi_1)(1-tPqQ\psi_1)}$$

und daher mFq^m der Coefficient von t^{m-1} in der Entwickelung des Differentialquotienten

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{(1-tPqQ\varphi_1)(1-tPqQ\psi_1)} =$$

$$\frac{1}{(1-tPqQ\varphi_1)(1-tPqQ\psi_1)}\left(\frac{PqQ\varphi_1}{1-tPqQ\varphi_1}+\frac{PqQ\psi_1}{1-tPqQ\psi_1}\right).$$

Man hat also

$$\begin{aligned} mFq^m &= Pq(Q\varphi_1+Q\psi_1)Fq^{m-1} \\ &+Pq^2(Q^2\varphi_1+Q^2\psi_1)Fq^{m-2} \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+Pq^m(Q^m\varphi_1+Q^m\psi_1)F1. \end{aligned}$$

Ist dagegen $\left(\frac{D}{q}\right) = -1$ und m gerade, so wird

$$\begin{aligned} mFq^m &= mPq^m \\ &= 2Pq^2Fq^{m-2}+2Pq^4Fq^{m-4}+\ldots+2Pq^mF(1). \end{aligned}$$

Hienach ergibt die Zusammenfassung aller Glieder in $U(s)$, welche den Logarithmus einer bestimmten Primzahl q enthalten, wenn q^k die höchste in Betracht kommende Potenz von q bezeichnet, in dem Falle $\left(\frac{D}{q}\right) = 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{\log q}{q} Pq(Q\varphi_1 + Q\psi_1)\left(Sq + \frac{Fq}{q} Sq^2 + \frac{Fq^2}{q^2} Sq^3 + \ldots + \frac{Fq^{k-1}}{q^{k-1}} Sq^k\right)\\
&+ \frac{\log q}{q^2} Pq^2(Q^2\varphi_1 + Q^2\psi_1)\left(Sq^2 + \frac{Fq}{q} Sq_3 + \ldots + \frac{Fq^{k-2}}{q^{k-2}} Sq^k\right)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{\log q}{q^k} Pq^k(Q^k\varphi_1 + Q^k\psi_1) Sq^k\\
&= \frac{\log q}{q} Pq(Q\varphi_1 + Q\psi_1) T\left(\frac{s}{q}\right)\\
&+ \frac{\log q}{q^2} Pq^2(Q^2\varphi_1 + Q^2\psi_1) T\left(\frac{s}{q^2}\right)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{\log q}{q^k} Pq^k(Q^k\varphi_1 + Q^k\psi_1) T\left(\frac{s}{q^k}\right)
\end{aligned}$$

und in dem Falle $\left(\frac{D}{q}\right) = -1$

$$\begin{aligned}
&\frac{2\log q}{q^2} Pq^2\left(Sq^2 + \frac{Fq^2}{q^2} Sq^4 + \ldots + \frac{Fq^{k-2}}{q^{k-2}} Sq^k\right)\\
&+ \frac{2\log q}{q^4} Pq^4\left(Sq^4 + \frac{Fq^2}{q^2} Sq^6 + \ldots + \frac{Fq^{k-4}}{q^{k-4}} Sq^k\right)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{2\log q}{q^k} Pq^k Sq^k\\
&= \frac{2\log q}{q^2} Pq^2 T\left(\frac{s}{q^2}\right)\\
&+ \frac{2\log q}{q^4} Pq^4 T\left(\frac{s}{q^4}\right)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{2\log q}{q^k} Pq^k T\left(\frac{s}{q^k}\right).
\end{aligned}$$

Es ist also

$$U(s) = \Sigma Pq(Q\varphi_1 + Q\psi_1)\frac{\log q}{q}\,T\left(\frac{s}{q}\right)$$

$$+\Sigma Pq^2(Q^2\varphi_1 + Q^2\psi_1)\frac{\log q}{q^2}\,T\left(\frac{s}{q^2}\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\Sigma 2Pr^2\frac{\log r}{r^2}\,T\left(\frac{s}{r^2}\right)$$

$$+\Sigma 2Pr^4\frac{\log r}{r^4}\,T\left(\frac{s}{r^4}\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo q, r alle in N nicht aufgehenden Primzahlen zu durchlaufen haben, für welche beziehungsweise

$$\left(\frac{D}{q}\right) = 1 \qquad \left(\frac{D}{r}\right) = -1$$

ist.

Sind nun

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$

$$Qf_0, Qf_1, \ldots$$

zwei Zuordnungen von Einheitswurzeln der Zahl M und Determinante D, welche nicht aus gleichen Charakterproducten von D hervorgehen, so ist nach Abs. 9

$$\left|T(\infty) - T\left(\frac{s}{q}\right)\right| < \frac{2B}{\sqrt{s}}\sqrt{q}$$

$$\left|T\left(\frac{s}{q^\pi}\right)\right| < 2B$$

$$\left|T\left(\frac{s}{r^\pi}\right)\right| < 2B$$

und demzufolge

$$\left| U(s) - T(\infty) \Sigma Pq (Q\varphi_1 + Q\psi_1) \frac{\log q}{q} \right| < \frac{2B}{\sqrt{s}} \sum \frac{\log q}{\sqrt{q}}$$
$$+ 4B \sum \frac{\log q}{q^2}$$
$$+ 4B \sum \frac{\log q}{q^3} + \ldots$$
$$+ 4B \sum \frac{\log r}{r^2}$$
$$+ 4B \sum \frac{\log r}{r^4} + \ldots;$$

es ist aber[1]

$$\sum \frac{\log q}{\sqrt{q}} < 4 \sqrt{s}$$

und daher

$$\left| U(s) - T(\infty) \Sigma Pq (Q\varphi_1 + Q\psi_1) \frac{\log q}{q} \right|$$
$$< 8B + 4B \sum_1^\infty \frac{\log q}{q(q-1)} + 4B \sum_1^\infty \frac{\log r}{r^2 (r^2 - 1)}.$$

Da überdies $U(\infty)$ eine convergente Reihe ist, also $|U(s)|$ eine angebbare Grenze nicht übersteigen kann und $T(\infty)$ nicht $= 0$ ist, so kann eine Grenze G von der Art angegeben werden, dass für jedes s

$$\left| \Sigma Pq (Q\varphi_1 + Q\psi_1) \frac{\log q}{q} \right| < G$$

bleibt.

Sind dagegen

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$
$$Qf_0, Qf_1, \ldots$$

Zuordnungen, welche aus gleichen Charakterproducten hervorgehen, so ist

[1] L. c.

$$\Sigma Pq(Q\varphi_1 + Q\psi_1)\frac{\log q}{q} = \sum \frac{2\log q}{q}$$
$$= \log s + H,$$[1]

wo H eine angebbare Grenze nicht übersteigen kann.

Handelt es sich nun um die etwaigen, durch eine gegebene primitive Form f σ^{ter} Art und eine gegebene primitive Linearform $Mx + M_1$ darstellbaren Primzahlen q, so sei

$$M_1 M' \equiv 1 \pmod{M}$$

und $\tau = 2$ oder $= 1$, je nachdem f sich selbst uneigentlich äquivalent ist oder nicht. Man multipliciere die Summe

$$\Sigma Pq(Q\varphi_1 + Q\psi_1)\frac{\log q}{q}$$

mit $\frac{PM'Qf}{\tau h \varphi M}$ und summiere hierauf in Bezug auf alle Zuordnungen von Einheitswurzeln der Determinante D und Zahl M. In dem Resultate hat $\frac{\log q}{q}$ den Coefficienten

$$\frac{1}{\tau h \varphi M}\Sigma PqM'.\Sigma(Qf\varphi_1 + Qf\psi_1),$$

wo die Summenzeichen sich beziehungsweise über alle Zuordnungen von Einheitswurzeln der Zahl M und der Determinante D erstrecken. Es ist aber

$$\Sigma PqM'$$

$= \varphi M$ oder $= 0$, je nachdem $qM' \equiv 1 \pmod{M}$ oder $q \equiv M_1 \pmod{M}$ ist oder nicht. Ferner ist

$$\Sigma Qf\varphi_1$$

[1] L. c.

$= h$ oder $= 0$, je nachdem $f\varphi_1$ mit f_0 oder f mit ψ_1 äquivalent ist oder nicht, und ebenso

$$\Sigma Qf\psi_1$$

$= h$ oder $= 0$, je nachdem $f\psi_1$ mit f_0 oder f mit φ_1 äquivalent ist oder nicht. Daher ist

$$\Sigma(Qf\varphi_1 + Qf\psi_1)$$

$= h$, $2h$ oder 0, je nachdem q eine, zwei oder gar keine mit f äquivalente primitive Hilfsform σter Art besitzt. Da aber φ_1, ψ_1 uneigentlich äquivalent sind, so kann die Form f mit φ_1 und ψ_1 zugleich nur dann äquivalent sein, wenn sie sich selbst uneigentlich äquivalent ist, und

$$\Sigma(Qf\varphi_1 + Qf\psi_1)$$

hat den Wert τh oder 0, je nachdem q durch f darstellbar ist oder nicht. Es wird also

$$\sum \frac{\log q_0}{q_0} = \frac{\log s}{\tau h \varphi M} \Sigma PM'Qf + \Gamma;$$

das erste Summenzeichen bezieht sich auf alle Primzahlen q_0, welche die Grenze s nicht übersteigen und durch die Formen f und $Mx + M_1$ dargestellt werden, das zweite auf alle Zuordnungen

$$Pa_1, Pa_2, \ldots$$
$$Qf_0, Qf_1, \ldots,$$

welche aus gleichen Charakterproducten von D und M hervorgehen, und Γ bedeutet eine Größe, welche für jedes s unter einer angebbaren Grenze bleibt.

Damit eine zu N theilerfremde Zahl zugleich durch f und $Mx + M_1$ dargestellt werden könne, ist es nothwendig, dass jedes gemeinschaftliche Charakterproduct von D und M für f und M_1 denselben Wert habe. Dann ist

$$\Sigma PM'Qf = \Sigma PM_1Qf = \mathfrak{l},$$

wo $\mathfrak{l}$ die Anzahl der gemeinschaftlichen Charakterproducte von D und M bezeichnet, und es wird

$$\sum \frac{\log q_0}{q_0} = \frac{\mathfrak{l}}{\tau h \varphi M} \cdot \log s + \Gamma.$$

Ist die genannte Bedingung nicht erfüllt, so ist

$$\Sigma P M' Q f = 0.$$

Bahnbestimmung des Meteores vom 19. Februar 1899

von

Prof. **G. v. Niessl** in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. März 1900.)

Über dieses bedeutende, detonierende Meteor sind nicht allein viele Mittheilungen in den Tagesblättern Österreichs und des Deutschen Reiches erschienen, sondern es gaben auch die gewöhnlichen Täuschungen häufiger als sonst Veranlassung, dass aus verschiedenen, weit voneinander entfernten Orten Nachrichten über die Auffindung vermeintlicher meteorischer Massen einliefen, welche mit diesem Falle in Verbindung gebracht wurden. In Nieder-Tenzel bei Leitmeritz hat man eine Ansammlung verkohlter organischer Gebilde, von der ich selbst eine Probe erhielt, die ihren Ursprung leicht erkennen ließ, bei Weißwasser in Böhmen und bei Friedeberg a. Queis in Preußisch-Schlesien Fragmente irdischer Gesteinsmassen aufgelesen, beschrieben, gewogen und competenten Beurtheilern vorgelegt. Anderseits wurde selbst noch aus Weißenfels in Thüringen, einem der weitest entfernten Beobachtungsorte, berichtet, dass mehrere Stücke in »nächster Nähe« der Stadt niedergefallen seien. Derartige Meldungen gehen, wenn sie bestimmt genug lauten, leicht in die Statistik der Meteoritenfälle über, und es scheint mir daher nicht überflüssig, hier ausdrücklich zu versichern, dass alle bisher bekannt gewordenen Mittheilungen über Fundstücke dieses Falles gänzlich unbegründet sind.

Wie gewöhnlich, so waren auch diesmal die äußerst zahlreichen Berichte nicht direct verwendbar. Die einzige Beobachtung, in welcher die Bahn mit einiger Sicherheit auf Sterne

bezogen schien, erwies sich zweifellos als zu einem anderen Meteor gehörig. Da ich selbst zu jener Zeit verhindert war, Erkundigungen in größerem Umfange einzuziehen, wäre vermuthlich eine genauere Feststellung der Bahnverhältnisse dieser großartigen Erscheinung unterblieben, wenn nicht Herr Prof. Dr. E. Reimann in Hirschberg aus eigenem Antriebe in wahrhaft unermüdlicher und aufopfernder Weise sich um die Herschaffung geeigneter Beobachtungen bemüht hätte. Ich verdanke seiner Güte viele Zeitungsnachrichten aus Preußen und Sachsen. Er hat ferner durch weitere Nachfragen nicht allein wichtige Angaben aus sehr entlegenen Orten, z. B. aus der Mark, brauchbar gemacht, sondern auch zahlreiche, nicht veröffentlichte Beobachtungen aus dem Riesengebirge durch Messungen sichergestellt. Auch Herr Prof. A. Paudler in Böhmisch-Leipa hat im nordböhmischen Beobachtungsgebiete viele Erkundigungen eingezogen und selbst eine kleine Reise nicht gescheut, um persönliche Nachforschungen anzustellen. Ich bin daher den genannten beiden Herren zu ganz besonderem Danke verpflichtet.

Die Bearbeitung des Materials ist in gleicher Weise wie in früheren Fällen erfolgt, nur habe ich viele Nachrichten, welche sich bloß auf das Aussehen der Erscheinung beziehen, ohne irgendeine geometrisch brauchbare Angabe zu enthalten, um Wiederholungen zu vermeiden, nicht unter den Beobachtungen besonders angeführt, sondern das Wesentlichste davon erst im Zusammenhange an der betreffenden Stelle erwähnt.

Beobachtungen.

Ungewöhnlich viele Berichte brachte das »Neue Wiener Tagblatt« aus Niederösterreich, besonders von Wien, sowie aus Mähren. Die meisten enthalten allerdings, wie gewöhnlich, keine sicheren Angaben über Richtung und Bahnlage, weil entweder der Standpunkt der Beobachter oder die Richtmarken nicht hinreichend bestimmt angegeben sind, sie bringen aber manche dankenswerte und nicht unwichtige Schilderungen der Erscheinung im allgemeinen, welche später Erwähnung finden werden. Die Beobachtungen Nr. 1 bis 4, 6 und die am Schlusse angeführte sind diesem Blatte entnommen, welches durch die

Aufnahme der zahlreichen Nachrichten sehr verdienstlich und anregend gewirkt hat.

1. Wien (34° 1′; 48° 13′). Einem Beobachter, welcher sich am Ring vor dem Kunsthistorischen Museum befand, schien die Feuerkugel hinter dem Rathhause niederzufallen, woraus sich ungefähr $Az = 149°$ ergeben würde.

2. Schwechat (34° 8′; 48° 9′), 7^h. Ein intensiv hellgrün strahlendes Meteor von $^1/_4$ Mondgröße fiel in einem nach Süden gekrümmten Bogen mit bedeutender Schnelligkeit (Herr Lehrer Diemberger).

3. Bei Lang-Enzersdorf (34° 3′; 48° 18′). Der Eindruck war, als ob das Meteor ungefähr über dem Rohrwalde geplatzt wäre. Die Richtung des Bogens war NNW (Herr E. Paulisch). Der Angabe würde beiläufig $A = 157°$ entsprechen, doch sehr unsicher.

4. Retz (33° 37′; 48° 45·5′). Richtung des Falles: Nord (Herr Seher).

5. Znaim (33° 43′; 48° 51·5′), 7^h. Das Meteor fiel in einer Bogenlinie aus etwas weniger als 45° zwischen N und W, war von $^1/_4$ Mondgröße und zersprang in 6 bis 8 Stücke. Dauer 2 bis 3^s (Herr P. Maresch nach Erkundigungen).

6. Nikolsburg (34° 18′; 48° 48′). Richtung nördlich, fast senkrecht (Herr W. Landhut).

7. Brünn (34° 16′; 49° 12′), $7^h 6^m$. Die Feuerkugel wurde von dem Herrn Professor der technischen Hochschule Dr. P. Kresnik beobachtet, nach dessen Angaben von mir Folgendes festgestellt wurde: Das Meteor, von ihm am nordwestlichen Himmel in 24° Höhe (gemessen) zuerst gesehen, fiel in einer nur 8° gegen die Verticale nach Nord hin geneigten Bahn, also von rechts gegen links bis 6·5° Höhe, wo es in $A = 138°$ anscheinend hinter einer Mauer verschwand. Dauer 3^s. Durchmesser etwa $^1/_4$ der Mondscheibe. Hinter dem Kopfe befand sich ein gegen aufwärts zu spitz verlaufender Schweif von $^1/_2$ bis 1° Länge. Anfangs war die Farbe blendend weiß »wie Auerlicht«, in der zweiten Hälfte der Bahn aber röthlich.

8. Krasna bei Wallachisch-Meseritsch (35° 28′; 49° 28·5′). Der Beobachter der meteorologischen Station, Herr Fabriksbeamter A. Fuchs, war so freundlich, alle Angaben,

die er erhalten konnte, theils durch Einzeichnung in die Specialkarte, theils durch Vergleichung mit dem Stande der Sonne festzustellen. Es liegen dreierlei Wahrnehmungen vor.

a) Drei Beobachter, gegen W gewendet, sahen das Meteor »über ihrem Scheitel im Zenith« entstehen und in der Richtung von Junakov ($A = 99°$) senkrecht niedergehen. Als es in einer Höhe, wie ungefähr die Sonne um diese Zeit um $3^1/_2{}^h$ Abends steht, war, bildete sich an dem feurigen Streifen eine hochgelbe Kugel, welche in Sonnenhöhe um $4^1/_2{}^h$ (also ungefähr in 7·5°) momentan zerstob.

b) Ein anderer Beobachter bezeichnet den Fall ebenfalls als senkrecht, jedoch in der Richtung von ungefähr $A = 120°$, aus einer Höhe, wie die Sonne zwischen 2^h und 3^h steht (ungefähr 22·5°) bis zur Sonnenhöhe nach 4^h. Dauer 4^s.

c) Eine Frau berichtete, dass das Meteor von ihr schon so hoch gesehen wurde, »als ob es über ihrem Scheitel stünde, wie etwa die Sonne Ende Mai um $11—12^h$ steht« (beiläufig 60°). Es fuhr senkrecht als weißglühender Streifen, von dem sich eine gelbe Kugel absonderte, nieder und verschwand hinter Häusern. Dauer 5^s.

9. Tschernoschin bei Mies (30° 33′; 49° 49′), 7^h. Die Feuerkugel erschien so groß als die Mondscheibe, zeigte sich in der Richtung NNE, löste sich, senkrecht herabfallend, in einen Strahlenbündel auf und erleuchtete die Gegend momentan taghell (»Bohemia«, Nr. 53).

10. Prag (32° 5′; 50° 5′), 7^h. Hier herrschte starker Nebel, und die Lichterscheinung wurde für einen Blitz gehalten, da bald nachher sich ein kurzes donnerartiges Rollen vernehmen ließ (»Bohemia«, Nr. 53).

11. Zwischen Wrchhaben und Dauba (32° 13′; 50° 33′). Herr Bürgerschullehrer Parsche berichtete: Das Meteor hatte die Richtung nach NW, und die ganze Erscheinung machte den Eindruck, als ob sie vom Monde ausgegangen wäre. Die Lichtstärke war sehr groß. Genau nach 2^m erfolgte eine Detonation, dem Donner ganz ähnlich, nur kurz und mehr stoßweise.

12. Leitmeritz (31° 48′; 50° 32′), $6^h 57^m$. Auch hier herrschte dichter Nebel, welcher blitzartig taghell erleuchtet wurde. Es folgte auch Donner (Herr H. Ankert).

13. Nieder-Tenzel (31°54′; 50°36′). Nach einer Mittheilung des Herrn Prof. Paudler soll auch hier, wo der Himmel heiter war, die Feuerkugel scheinbar vom Monde ausgegangen sein. In den Tagesblättern war die Meldung verbreitet, dass auf einer Wiese von dem Meteorfalle herrührende verkohlte Massen gefunden worden seien. Eine Probe davon, welche ich erhielt, zeigte aber auch theilweise noch erhaltene organisierte Substanz von Stengeln und Wurzeln. Ähnlich lautete der Befund des Herrn Prof. Dr. Berwerth in Wien. Die Untersuchung war deshalb nicht ohne Belang, weil nach den ersten Nachrichten die Möglichkeit des Falles in der Gegend von Leitmeritz nicht ausgeschlossen erschien, wovon später noch die Rede sein wird.

14. Bei Ploschkowitz (31°51′; 50°34′), $6^h 57^m$ m. e. Z. Ein unregelmäßiger glühender Körper, mit einem Schweif nach abwärts, fiel von W gegen N (vermuthlich umgekehrt) (»Leitmeritzer Zeitung«).

15. Mückenhan (32°16·7′; 50°37·3′). Herr Förster F. Klapper schrieb mir: »Vor der Thüre stehend, sah ich gegen 7^h plötzlich grellen Feuerschein, welcher über das Haus hereinkam. Aufblickend sah ich einen Lichtschweif, der sich in der Luft fortbewegte, und zwar in der Richtung gegen den Maschwitzberg hin ($A = 30°$, fast genau gegen Dauba), woselbst er noch in der Luft, über dem Horizonte, verschwand. Der Eindruck war der einer großen Sternschnuppe von einigen Secunden Dauer. Detonationen habe ich selbst keine gehört, doch geben Ortsbewohner an, Donner vernommen zu haben. Nach dem mündlichen Berichte, den Herr Prof. Paudler aus derselben Quelle erhielt, löste sich das Meteor »über dem alten Teiche«, also vielleicht schon etwas südlicher auf. Freilich ist diese Localität sehr ausgedehnt und erstreckt sich von S bis SW, so dass diese Angabe ziemlich unbestimmt bleibt. Die Richtung nach Dauba geht übrigens ungefähr durch die Mitte.

Aus dem Dorfe Wesseln — 3 *km* in der Verlängerung der Richtung Maschwitzberg—Mückenhan, also in $A = 210°$ — berichtete der Landwirt Herr Tschernich dem Herrn Klapper, »dass das Meteor gegen Mückenhan flog«. Endlich sagte auch noch die Gattin des Hegers in Maschwitz, sie habe, mit dem

Rücken gegen Mückenhan, die große Feuerkugel mit einem Schweif gesehen. Letzterer sei von der Kugel losgerissen, gegen Dauba zu geflogen, die Kugel jedoch sei ihr vor den Augen in der Höhe verschwunden.

16. Leipa (32°12′; 50°41′). In einer Notiz der »Bohemia« heißt es, dass die ganze Erscheinung 4^s dauerte und dass man nach 3^m ein donnerartiges Getöse, welches 2^s anhielt, vernommen habe. Die Bewegungsrichtung wird ESE nach WNW angegeben. Auch aus Oberliebich bei Leipa wurde berichtet, dass erst nach geraumer Zeit »eine Art Donner« zu hören war.

17. Pichlerbaustellen (32°12·8′; 50°43·5′) zwischen Leipa und Haida, $6^h 50^m$. Nach einer Mittheilung des Herrn Prof. W. Lubich in Leipa war die Bewegungsrichtung die oben für Leipa angegebene, unter einem Winkel von 60°. Dauer 3^s. Nach 3^m folgte ein durch 3^s andauerndes Rollen. Vermuthlich beruht auch die Zeitungsnachricht (16) auf dieser Beobachtung. Herr Prof. Lubich versuchte mit Hilfe eines Gradbogens auch noch bestimmtere Angaben zu liefern. Das Meteor soll hienach 50° hoch in der Richtung nach Josefsdorf und Sonneberg ($A = 106°$; weicht gegen alle anderen Angaben aus der Gegend um 70 bis 80° ab) erloschen sein. Es wurde zuerst gesehen in der Richtung, wie in dieser Zeit etwa um $6^h 44^m$ morgens die Sonne steht (dies wäre etwa 290° Azimuth) und 55° hoch. Die größte Höhe war etwa 60°.

18. Kamnitz (32°5′; 50°48′). Aus der Umgebung (Kamnitz-Neudörfel und -Walddörfel) liefen mehrere Berichte bei Herrn Prof. Paudler ein, welcher sich der Mühe unterzog, an Ort und Stelle die Beobachter auch persönlich über ihre Wahrnehmungen zu befragen. Allerdings konnte dies erst einige Wochen nach dem Falle geschehen, als die Eindrücke nicht mehr ganz frisch waren.

a) Patzelt, ein 13jähriger Knabe (Standpunkt in 32°2·8′; 50°47·6′) berichtete zuerst, dass das Meteor gerade heruntergefallen sei, in »Peschkens Busch«. Er theilte ferner folgende Wahrnehmungen mit: »Wir waren einige Jungen bei Heller und sahen uns die Sterne an. Da fiel uns ein Stern beim Mond auf, der größer als die anderen war. Als wir uns darüber wunderten, fiel er herunter. Wie er schon weit unten war,

wurde eine Flamme daraus, und nun machte es einen starken Knall (?). Die Flamme zersprang in lauter kleine Stücke, welche über dem Waschberg (der sehr ausgedehnt ist) niederfielen, und nach einer Zeit — es könnte wohl länger als eine Minute gewesen sein — hörten wir es ganz gehörig donnern, wie wenn ein Gewitter schon ein Stück fortgezogen ist«. Am 18. März durch Herrn Prof. Paudler ausgefragt, gab der Junge noch Folgendes an: »Der Stern, wie wir ihn zuerst sahen, befand sich in gleicher Höhe, rechts (westlich) vom Monde, etwa eine Elle entfernt«. Der Versuch, diese scheinbare Distanz im Gradmaße darzustellen, ist nicht gelungen, denn er ergab 20°, offenbar wesentlich zu viel, mit Rücksicht auf die anderen Angaben. »Die Flamme entstand, als der Stern noch an seinem ursprünglichen Platze war« (was dem ersten Berichte widerspricht). Niedergegangen ist das Meteor gerade links von Richters Haus (nach der Karte in $A = 350°$). Die Berstung erfolgte unmittelbar über dem Walde des Waschberges, woraus nach der Höhendifferenz ganz beiläufig $h = 15°$ folgen würde.

b) Anton Richter befand sich auf der Straße zwischen Kamnitz und Walddörfel (32° 3·7′; 50° 47·5′), und es schien ihm, als ob das Meteor vom Bahnhofe her (Ostseite) käme. Es gieng bis über »Buschbrodeln« ($A = 340°$). An dem früher erwähnten Tage über die näheren Umstände befragt, wusste er sich an seinen Standpunkt noch ganz gut zu erinnern, gab aber nun den Endpunkt sehr unsicher, fast in SE, an. Auch will er das »Zerspringen« der Feuerkugel überhaupt nicht bemerkt haben. Er gieng in westlicher Richtung und hat vielleicht das Meteor nicht genau gesehen. Die erste Richtungsbezeichnung würde mit Patzelts Angabe besser stimmen. Das Intervall zwischen Licht und Schall wurde durch 270 Schritte, also etwa zu 2 bis 3^m abgeschätzt.

c) Langers Mädchen in Neudörfel kam zur Mutter gerannt und erzählte zitternd, dass eben ein Stück vom Monde herabgefallen sei. In dem benachbarten Walddörfel wurde erzählt, dass der große Stern neben dem Monde herabgefallen sei, was vielleicht eine Wiedergabe von Patzelts Beobachtung ist.

d) Beobachter zu Kamnitz, welche sich in Zimmern mit südöstlicher Aussicht befanden, berichteten, dass sie zwischen SE und S blitzen sahen, ohne der Feuerkugel selbst zu erwähnen.

19. Warnsdorf (32° 17′; 50° 55′). Nach einer Notiz in der »Abwehr« wäre das prächtige Meteor am südwestlichen Himmel durch einige Secunden beobachtet worden. Die Gegend war, trotz des Mondlichtes, blendend beleuchtet, auch machte sich ein dumpfer Donner bemerklich.

20. Bodenbach (31° 52′; 50° 46·5′). Um 7^h gieng scheinbar über Bodenbach in senkrechter Richtung ein schönes, intensiv rothleuchtendes, blitzartig verschwindendes Meteor nieder, zerplatzte in ziemlicher Höhe nochmals und löste sich in ein Feuerbündel mit einer größeren weißen Kugel ohne Geräusch auf (»Dresdener Nachrichten«).

21. Dresden (31° 24′; 51° 3′). Dasselbe Blatt meldet, dass um 7^h hier nach Süden zu ein fast senkrecht zur Erde fallendes Meteor beobachtet wurde. Dagegen berichtet der »Dresdener Anzeiger«, dass 2 bis 3^m vor 7^h in der Richtung NE—SW ein den Mond völlig überstrahlendes Meteor durch 3 bis 5^s gesehen wurde.

22. Leipzig (30° 3′; 51° 20′). Kurz vor 7^h. Richtung und Fall des schönen, großen Meteores war nach Südost (»Leipziger Neueste Nachrichten«, woraus auch Nr. 23 und 24 entnommen sind).

23. Mehltheuer bei Plauen (29° 42′; 50° 32·5′), $6^h 55^m$. Das Meteor glänzte in bläulichweißem Lichte, hatte die Richtung von N nach S und theilte sich beim Falle in zwei Theile. Der eine behielt die Farbe bei, der andere erschien feuerröthlich.

24. Weißenfels in Thüringen (29° 38′; 51° 12′). Die Flugbahn war zuerst lichtgelb, dann bildete sich eine große blasenähnliche Gestalt. Nach dem Zerplatzen fiel eine glutrothe Masse in mehreren Stücken auf einen Sturzacker in nächster Nähe der Stadt nieder.

Die unter Nr. 25 bis 34 mitgetheilten Beobachtungen verdanke ich alle der freundlichen Unterstützung durch Herrn Prof. Dr. Reimann in Hirschberg.

25. Zwischen Kynwasser und Hermsdorf (ungefähr 33° 20′; 50° 50′). Die Herren Referendare Rüffer und Grotefendt sahen die Feuerkugel links vom Kynast herabkommen, in einer Bahn, welche Herr Rüffer 5 bis 7° gegen die Verticale nach Süd hin geneigt zeichnete, während der zweite Beobachter sie ganz vertical fand. Wegen zu großer Nähe des Berges ist die Angabe für eine bestimmte Azimuthbezeichnung nicht gut verwertbar, da der Ort der Beobachter etwas unsicher blieb. Das Azimuth könnte zwischen 35° und 52°, auch noch weiter, schwanken. Das Meteor zersprang noch mehrere Grade über der Höhe des Kynast, woraus auf eine Höhe von 17 bis 18° geschlossen wurde.

26. Zwischen Kaiserswaldau und Petersdorf (33° 17′; 50° 52′). Mittelschüler Plischke beschrieb den scheinbaren Fallpunkt nach der Umgebung, woraus etwa $A = 58°$ folgen würde. Anfang und Endpunkt wurden nachträglich zu 27° und 21° bestimmt. Er sagte, es sei eigentlich heller als am Tage gewesen, da das Licht so stark geblendet habe. Ein kleiner Junge zitterte und meinte, es sei der »angekündigte Weltuntergang«.

27. Auf der Straße zwischen Warmbrunn und Giersdorf (etwa 33° 21′; 50° 51′). Das Meteor schien senkrecht hinter dem Kynast herabzufallen. Erste Angabe: $A = 62°$, dann nach genauerer Bezeichnung des Standpunktes: $A = 55°$. Später stellte es sich heraus, dass es links vom Kynast herabkam und dass, wie Herr Prof. Reimann schreibt, das Azimuth noch um ungefähr 5° zu vermindern wäre (Herr Hackenberg nach Bericht des Herrn Schneider).

28. Warmbrunn (33° 21′; 50° 52′). Secundaner Sommer bezeichnet den Anfang der Bahn in gleicher Höhe mit dem Monde und den Fall als vertical. Das Ende war durch den Dachfirst des Schlosses in $A = 56{\cdot}5°$, $h = 22°$ verdeckt.

29. Cunnersdorf (33° 23′; 50° 53′). Nach Primaner Fischers Angabe wurde das Meteor über Warmbrunn ($A = 43°$) erblickt. Fräulein Heilmann sah es über der Schneegrubenbaude ($A = 42°$) und Frau Lieutenant Gerlich schien es in der Richtung gegen die Schneegruben ($A = 43°$) senkrecht herabzufallen, wie ein sehr großer Stern in silber-

weißem Glanze. Dagegen meldete der »Bote aus dem Riesengebirge« von hier, dass es am »westlichen« Horizonte mit einem langen blutrothen Schweife niedergieng.

30. Hirschberg (33° 24′; 50° 54·3′).

a) Nach Angabe des Obersecundaners Bialonski bezeichnete Herr Prof. Reimann das Azimuth des Endpunktes anfangs zu 58°, doch lieferte eine spätere Ermittlung desselben an Ort und Stelle nur 51 bis 52°. Mit einem Gradbogen wurden die Höhen für Anfang und Ende: $h_1 = 14°$, $h_2 = 7°$ gefunden, beide Werte ersichtlich viel zu klein. Die Bahn wurde als genau senkrecht angegeben.

b) Zwei Dienstmädchen zeigten eine Richtung, welche für den Endpunkt $A = 56°$ lieferte, und stimmen hinsichtlich der Neigung der Bahn mit der Angabe des Herrn Rüffer (25) überein.

c) Bei geschlossenem Fenster eines Hauses, dessen Front nach Südost 55° Azimuth hat, wurde die Feuerkugel noch gesehen, so dass das Azimuth weniger betragen haben musste. Diese Angabe wurde später auf 40° reduciert.

31. Eichberg (33° 28·4′; 50° 54′).

a) Secundaner Krieg hatte sich die Richtung durch einen Baum eingeprägt. Diese geht über die Schneegrubenbaude in $A = 54°$ für den Endpunkt. Der Fall schien vertical zu sein. Die Höhe, in welcher er das Meteor zuerst erblickte, als er, durch die Helle aufmerksam gemacht, sich umgewendet hatte, wurde nachträglich zu 37° gemessen, die Endhöhe zu 29°. Er glaubte im ersten Moment, der Mond falle vom Himmel, so groß war die Erscheinung. 5^m darnach will der Beobachter Donner vernommen haben.

b) Fräulein Elly Goy gibt an: Richtung zwischen Peterbaude und Schneegruben, also $A = 45·5°$ bis 54°, »ziemlich senkrecht, mit einer kleinen Abweichung nach links«. Etwas kleiner als der Mond und so rasch, dass sich nur ein Band zeigte. Plötzlich war es, als ob die Bewegung aufhörte; man sah einen Augenblick die Kugel und dann viele blaue und violette Funken. Geräusch hatte sie nicht vernommen. Endhöhe 20° (gemessen).

Herr Prof. Dr. Reimann fasste die ihm aus der Umgebung von Hirschberg bekannt gewordenen Wahrnehmungen in Folgendem zusammen: Alle Angaben stimmen darin überein, dass das Meteor ziemlich hoch entstanden, anfangs sehr schwach und erst allmählich zu so bedeutender Größe angewachsen war. Alle Beobachtungen geben an, dass die Bahn fast senkrecht oder doch nur wenig gegen die Verticale geneigt gewesen sei. Als Mittel aus den verschiedenen Angaben wäre ungefähr für das Azimuth: 54·3° aus einem mittleren Punkte zu nehmen, doch neigte sich Herr Prof. Reimann später der Ansicht zu, dass ein kleinerer Wert noch wahrscheinlicher wäre. Endlich erwähnte er, dass die Dauerangaben zwischen 3 und 6^s schwankten.

32. Schweidnitz (34°10′; 50°51′). Das Meteor nahm seinen Anfang am Südwesthimmel in etwa 20° Höhe und senkte sich ungefähr 10° zum Horizont abwärts. Die Lichtgestalt war anfangs kugelförmig und gieng zuletzt in Kegelform über. Es hinterließ einen deutlichen Lichtschweif und verschwand nach ungefähr 3^s explosionsartig, wobei etwa zehn rothe Kugeln hervorgeschleudert wurden (»Schlesische Zeitung«, Nr. 130). Herr Lampel, von dem diese Beobachtung herrührt, schrieb hierüber später an Herrn Prof. Reimann und bezeichnete die Richtung als fast genau SW, den Fall mit einer kleinen Neigung (5 bis 6°) gegen die Verticale von links oben nach rechts unten. Die Höhen waren nur abgeschätzt.

33. Lübbenau (31°38′; 51°52′). Nach einer Skizze war die Bahn 6 bis 7° gegen die Verticale von links oben nach rechts unten geneigt (Herr Lehrer Fahlisch an Herrn Prof. Reimann).

34. Preilack bei Peitz, Kreis Cottbus (32°5′; 51°52′). Kurz vor 7^h wurde hier eine herrliche Sternschnuppe beobachtet. Das Meteor kam aus dem Sternbilde des Orion und fiel in fast senkrechter Richtung am Südhimmel zur Erde. Das anfangs weiße Licht verwandelte sich in grünlich-blaues und war in diesem Augenblicke so stark, dass es trotz hellen Mondscheines auf der Erdfläche sich auszeichnete. Aus diesem grünlich-blauen Scheine entstand fast plötzlich ein feurig-rother, bei welchem das Meteor zerplatzte. Auch die einzelnen Spreng-

stücke zeigten durch kurze Zeit rothes Licht (»Frankfurter Oder-Zeitung«, Nr. 45). Herr Prof. Reimann hatte die Güte, auch bei diesem Beobachter, Herrn Lehrer A. Krueger, noch weitere Erkundigungen einzuziehen, doch war die Erinnerung nicht mehr lebhaft genug, was der Genannte selbst hervorhob. In einer Skizze wurde der Anfang der Bahn in Übereinstimmung mit dem ersten Berichte nahe am Gürtel des Orion angegeben, das Ende jedoch in der Nähe von Sirius. Diese Bahn hätte wohl auch nicht einmal als annähernd senkrecht bezeichnet werden können.

Schließlich sei noch eine Beobachtung vom selben Abende erwähnt, die sowohl nach der Zeitangabe, als auch nach der Bahnlage sich auf das hier besprochene Meteor zwar nicht beziehen kann, sehr wahrscheinlich aber dem gleichen Radianten entstammte.

Pottschach in Nieder-Österreich (33° 40′; 47° 42·5′). Das Meteor, größer als Jupiter, fiel um $7^h 20^m$ senkrecht zum Horizonte, streifte förmlich χ Cassiop. und verschwand 18° über dem Horizonte bei ι Androm. Anfang: $\delta = 59°$, Ende: $\delta = 43°$. Dauer: 3^s (Herr Dr. Branowitzer im »Neuen Wiener Tagblatt« vom 21. Februar).

Den Angaben, welche als die sichersten gelten können, entspricht als Epoche $7^h 6^m$ m. Brünner Zeit oder $5^h 59^m$ m. Greenwicher Zeit, d. i. $6^h 59^m$ m. e. Z.

Hemmungspunkt. Die ersten Nachrichten aus Leipa und Dauba waren, in Verbindung mit Berichten der Zeitungen geeignet, den Endpunkt wirklich in der Gegend nördlich von Leitmeritz zu suchen. Dieser Annahme widersprachen jedoch alsbald die Beobachtungen aus Hirschberg, und zwar desto entschiedener, je zahlreicher sie waren, und auch die späteren Mittheilungen aus Nordböhmen bewiesen, dass der Endpunkt viel weiter südöstlich gelegen war.

Da nach den übereinstimmenden Nachrichten von allen Seiten her aus den entfernteren Orten, über die fast verticale Lage der scheinbaren Bahn, der Radiationspunkt nicht allzuweit vom Zenith sich befunden haben, und für die Gebiete

nördlich von Prag, welche dem Fallorte ziemlich nahe lagen, auch der Endpunkt und daher die ganze Bahn nothwendig in sehr großer Höhe erscheinen musste, ist es, bei der kurzen Dauer, recht wohl begreiflich, dass viele Beobachter nur den blitzähnlichen Lichteffect bemerkten, und dass für diejenigen, welche doch so glücklich waren, einen kleinen Theil der Bahn sozusagen noch zu erhaschen, die Orientierung schwierig war. Dazu kommt noch, dass manche Beobachter glauben, statt dem, was sie wirklich gesehen, eine nach ihrer Meinung folgerichtig ergänzte Beobachtung mittheilen zu sollen, indem sie die von ihnen wahrgenommene Bahn willkürlich bis zur Erdoberfläche verlängern, in dem Glauben, das Meteor müsse auch in diesem Sinne zur Erde gefallen sein. Auf diese Weise erklären sich einige sonst unbegreifliche Beobachtungen, welche für den Endpunkt nicht berücksichtigt werden konnten.

Der Beobachtung in Schweidnitz (32) muss ein erheblicher Orientierungsfehler zugrunde liegen. Denn die Annahme, dass der Endpunkt von dort auch nur beiläufig in SW erschien, widerspricht ebenso den Hirschberger, wie den böhmischen Beobachtungen, und es ist keine Ausgleichung möglich, welche diese Angabe nicht sehr bedeutend ändern müsste. Sie wurde daher ebenfalls nicht benützt. Nach der Zeit und der guten Übereinstimmung hinsichtlich der äußeren Erscheinung muss sich diese Beobachtung wohl auf das vorliegende Meteor beziehen. Sonst aber würde sie weit besser zu dem zweiten in Pottschach gesehenen passen, dessen Endpunkt vermuthlich in Oberösterreich oder über den südlichsten Gebietstheilen Böhmens anzunehmen ist.

Für die Bestimmung der geographischen Lage des Endpunktes kamen folgende Azimuthe in Betracht:

Wien (1): 149°, Brünn (7): 138°, Krasna (8): 109·5° (Mittel), Mückenhan (15): 30°, Kamnitz-Neudörfel (18*a*): 350°, Kaiserswaldau (26): 58°, Giersdorf (27): 50°, Warmbrunn (28): 56·5°, Cunnersdorf (29): 42·7° (Mittel), Hirschberg (30): 54° (Mittel), Eichberg (31): 52° (Mittel).

Die Ermittlung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab hieraus für die

Lage des Hemmungspunktes: 32° 8′ ö. L. v. F. u. 50° 18′ n. Br.

Dieser Punkt liegt 6 *km* südlich von Melnik über dem Dorfe Duschnitz in Böhmen. Die mittleren Fehler sind: $\Delta\lambda = \pm 4 \cdot 4'$ oder 5·5 *km*, $\Delta\varphi = \pm 3 \cdot 4'$ oder 6 *km*. Die nöthigen Verbesserungen der einzelnen Richtungen finden sich in der weiter unten folgenden Zusammenstellung.

Einige Angaben aus der Umgebung von Hirschberg (z. B. 29 und auch 30*c*) und, wenn man will, auch jene von Schweidnitz würden eine viel weiter südöstliche Lage bedingen. Allein in Hinsicht der anderen Beobachtungen könnte kaum über Elbekosteletz hinausgegangen werden;[1] jedenfalls aber lag doch der Endpunkt viel näher an Prag, als es anfangs den Anschein hatte.

Für die Ausmittlung der linearen Höhe des Hemmungspunktes habe ich die unter (7), (8*a*), (25), (26), (31*b*) und (32) vorkommenden Angaben benützt. Was die Brünner Beobachtung (7) betrifft, wird man leicht bemerken, dass, wenn das Meteor wirklich hinter einer Mauer verschwunden ist, dies ziemlich genau mit dem Momente der Auflösung zusammengetroffen sein musste, denn der angegebene Wert von 6·5° erweist sich noch als zu klein.

Die einzelnen Resultate gehen aus folgender Zusammenstellung hervor:

	Scheinbare Höhe *(h)*	Entfernung des Endpunktes *(D)*	Höhe des Endpunktes *(H)*
(7) Brünn	6·5°	195·5 *km*	25·4 *km*
(8*a*) Krasna	7·5	255·3 »	38·8 »
(25) Kynwasser	17·5	103·0 »	33·3 »
(26) Kaiserswaldau	21	101·4 »	39·7 »
(31*b*) Eichberg	20	114·7 »	43·3 »
(32) Schweidnitz	10	155·8 »	29·4 »

Das einfache Mittel gibt für die

Höhe des Hemmungspunktes $H = 35 \cdot 0 \pm 2 \cdot 8$ *km*

oder rund 4·7 geogr. Meilen.

[1] Auch die scheinbaren Höhen lassen eine weitere Verschiebung gegen SE nicht zu und ebensowenig die sehr bestimmt lautenden Nachrichten über Detonationen, welche aus den nördlicheren Gegenden vorliegen.

Einige hier nicht berücksichtigte stark abweichende Angaben würden im Mittel ziemlich genau zum gleichen Resultate führen. So gibt Hirschberg (30*a*) nur $h = 7°$, dagegen Eichberg (31*a*) $h = 29°$, obwohl letzteres noch etwas weiter entfernt ist. Das Mittel: 18°, verbunden mit der mittleren Entfernung 113·7 *km*, würde für H: 37·9 *km* geben. Ferner ist die Angabe aus Pichlerbaustellen (17) $h = 50°$, dagegen aus Kamnitz-Neudörfel (18*a*) nur $h = 15°$. Hier würde das Mittel $h = 32·5°$ mit der mittleren Entfernung von 52 *km* $H = 33·3$ *km* geben. Das Mittel aus allen vieren wäre also wieder 35·6 *km*. Es wird daher das früher ermittelte Resultat für die Höhe des Endpunktes, nämlich 35 *km*, welches viel mehr Gewicht besitzt, wohl ohneweiters beibehalten werden können.

Die nöthigen Verbesserungen der benützten Azimuthe und Höhen sind im nachstehenden ersichtlich.

	ΔA	Δh
(1) Wien	+ 0·5°	—
(7) Brünn	— 8·6	+2·8°
(8) Krasna	+ 2·8	—0·8
(15) Mückenhan	—14·0	—
(18*a*) Kamnitz	+ 3·6	—
(25) Kynwasser	—	+0·9
(26) Kaiserswaldau	— 5·6	—2·4
(27) Giersdorf	+ 5·5	—
(28) Warmbrunn	— 1·8	—
(29) Cunnersdorf	+11·8	—
(30) Hirschberg	0·0	—
(31) Eichberg *a*	+ 1·7	—
(31) Eichberg *b*	+ 5·7	—3·5
(32) Schweidnitz	—	+2·0

Radiationspunkt. Wird nun aus der wirklichen Lage des Endpunktes dessen scheinbarer Ort am Himmelsgewölbe für die verschiedenen Beobachtungsorte berechnet, so erhält man sieben brauchbare scheinbare Bahnen, von welchen jedoch nur zwei die Lage eines bestimmten früheren Bahnpunktes enthalten, nämlich Dauba (11), wo als Ausgangspunkt der Mond (in $\alpha = 87·1°$, $\delta = +24·3°$) bezeichnet erscheint, und

Preilack (34), wo dieser Punkt am Gürtel des Orion, ungefähr in $\alpha = 81°$, $\delta = -1°$, angegeben wurde. Krasna gibt übereinstimmend genau senkrechten Fall. Brünn, Kynwasser, Schweidnitz und Lübbenau lieferten durch Zeichnung die geringe scheinbare Neigung gegen die Verticale. In derartigen Fällen, wo die Azimuthe für Anfang und Ende der Bahn äußerst wenig abweichen, ist eine solche Darstellung verlässlicher als jene aus unsicheren Azimuthangaben zweier Bahnpunkte. Die Bahn ist durch die Neigung in Ansehung des Radiationspunktes dann völlig bestimmt, und in der folgenden Übersicht ist unter I der betreffende Knoten am Äquator bezeichnet. Für die mit * bezeichneten Angaben ist dementsprechend der erste Punkt nicht als Anfangspunkt zu betrachten. Unter II steht der berechnete scheinbare Ort des Endpunktes.

	I		II	
	α	δ	α	δ
(7) Brünn*	124·1°	0	320·2°	+32·1°
(8) Krasna*	139·0	0	334·3	+19·5
(11) Dauba	87·1	+24·3°	68·2	+12·8
(25) Kynwasser*..	207·3	0	23·2	— 5·4
(32) Schweidnitz*	201·5	0	10·7	— 4·2
(33) Lübbenau* ..	85·5	0	84·7	—27·1
(34) Preilack	81·0	— 1·0	75·1	—27·6

Für ungleiche Gewichtsbemessung fand sich von vorneherein keine rechte Veranlassung. Die Auflösung der betreffenden Normalgleichungen lieferte für den

scheinbaren Radianten: 89·0° ± 4° Rectasc.
und 47·5 ± 1·5° N. Decl.

Die nöthigen Verbesserungen der benützten Beobachtungen sind sehr gering. Jene der scheinbaren Neigungen gegen die Verticale ergeben sich aus folgender Vergleichung der berechneten mit den angegebenen. Brünn: 4·7° statt 8° (—3·3°). Kynwasser: 4·5° statt 6° (—1·5°), Schweidnitz: 4·6° statt 5·5° (—0·9°), Lübbenau: 9·3° statt 6° (+3·3°). Für Krasna war die Bahn 0·6° gegen N geneigt, statt vertical.

Für Dauba musste die Bahn 7·7° westlich am Monde vorbeigegangen sein und für Preilack 1·4° östlich der angenommenen Position am Oriongürtel.

Hinsichtlich der hier nicht benützten Angabe von Kamnitz würde das Meteor zuerst 2° westlich vom Monde gewesen sein, was freilich viel weniger ist, als die nachträgliche Abschätzung durch den kleinen Beobachter ergeben hat. Ein westlicher Abstand von 20°, oder auch nur die Hälfte, würde den Radianten auf die Westseite des Meridians verlegen, was durch keine andere Beobachtung begründet wäre. Die Nachricht aus Nieder-Tenzel (13), dass auch dort das Meteor aus dem Monde zu kommen schien, wurde ebenfalls nicht verwendet, weil ich eine nähere Bestätigung dieser Meldung nicht erhalten konnte. Die Bahn müsste dort ungefähr ebensoviel östlich als in Dauba westlich am Monde vorbeigegangen sein. Da der Mond (etwas östlich von Süd) über 60° hoch stand, sind solche Unterschiede in der Beurtheilung nicht auffallend. Für die Gegenden ein wenig westlich von Kamnitz, Leipa und Dauba würde die scheinbare Bahn durch den Mond gegangen sein und für diese nordböhmischen Gebiete findet der in einzelnen Mittheilungen erwähnte Eindruck, »es sei ein Stück des Mondes herabgefallen«, seine volle Begründung.

Nach der Stellung des abgeleiteten Radianten ergibt sich nun, dass die Bahn unter einem Neigungswinkel von 80° gegen den Horizont des Endpunktes aus 276° Azimuth, also ungefähr von Ost her, gerichtet war.

Höhe des Aufleuchtens, Bahnlänge, geocentrische Geschwindigkeit. Berücksichtigt man alle vorliegenden bestimmteren Angaben, so wäre als früheste Wahrnehmung jene aus Krasna (8*c*) anzunehmen. Da dieser Ort sehr weit entfernt liegt, so stimmt dies wohl mit der Erfahrung, dass die längsten Bahnen gewöhnlich an den entferntesten Beobachtungspunkten nachgewiesen werden. Die dort angegebene, ungefähr bezeichnete Höhe von etwa 60° würde jedoch für das Aufleuchten eine Höhe von nicht weniger als 319 *km* und für die Bahnlänge 288 *km* geben. Obwohl solche Höhen schon mehrfach nachgewiesen sind und auch die vergleichsweise längere Dauer von 5^s für eine ansehnliche Bahnlänge spricht, müsste die

Höhenangabe doch verlässlicher sein, um diese Resultate ohneweiters annehmbar zu machen.

Den nächst höchsten Aufleuchtungspunkt liefert Warmbrunn, wenn man der, allerdings ganz bestimmt lautenden Angabe, dass das Meteor in gleicher Höhe mit dem Monde auftauchte, vertrauen darf. Man erhält hieraus für die lineare Höhe 171 *km* oder rund 23 g. M., welches in der That eine sehr gewöhnliche Anfangshöhe für derartige Erscheinungen ist. Die Bahnlänge wäre 139 *km*, und weil sie die längste unter den aus der Umgebung von Hirschberg nachgewiesenen Bahnen ist, so habe ich sie mit dem größten der von Herrn Prof. Reimann summarisch bezeichneten Dauerwerten, nämlich 6ˢ, verbunden.

Man wird, um die Dauerangabe von Krasna doch auch benützen zu können, wohl mit Recht annehmen dürfen, dass die dort gesehene Länge zum mindesten jene aus Warmbrunn nachgewiesene erreichte, und zwar umso eher, als hienach die scheinbare Höhe in Krasna von 60° auf höchstens 36° herabgesetzt werden müsste. Hienach würde die geocentrische Geschwindigkeit aus Warmbrunn 23·2 *km*, aus Krasna *b)* mindestens 27·8 *km* und im Mittel: 25·5 *km*, oder eigentlich eher größer als kleiner zu folgern sein.

Allein es sollen auch noch jene Schätzungen berücksichtigt werden, welche sich auf kürzere Bahnstücke beziehen. Wie sich die einzelnen Resultate mit Berücksichtigung aller zusammengehörigen Angaben stellen, zeigt nachstehende Übersicht:

	Höhe des erstbeobachteten Punktes	Bahnlänge	Dauer	Geocentrische Geschwindigkeit
(7) Brünn	87 *km*	53 *km*	3ˢ	17·7 *km*
(5) Znaim	107 »	72 »	2·5	28·0 »
(8*b*) Krasna *b*)..	105 »	71 »	4	17·8 »
(8*c*) Krasna *c*)..	171 »	139 »	5	27·8 »
(18*a*) Kamnitz..	110 »	76 »	—	—
(28) Warmbrunn	171 »	139 »	6	23·2 »
(31) Eichberg ..	84 »	49 »	3	16·3 »
(32) Schweidnitz	67 »	32·5 »	3	10·8 »
(34) Preilack ...	132 »	99 »	—	—

Das Mittel aus den Bahnlängen wäre 81 *km* und jenes aus den einzelnen Geschwindigkeitswerten 20·8 *km*.

Da überdies noch Dauerangaben vorliegen, welche auf eine bestimmte Bahnlänge nicht bezogen werden können, so möge auch noch der Versuch gemacht werden, das Mittel aller Dauerschätzungen mit der durchschnittlichen Bahnlänge von 81 *km* zu verbinden.

Die Dauer wurde abgeschätzt einmal: 2 bis 3^s, sechsmal: 3^s, einmal: 3 bis 5^s, dreimal: 4^s, einmal: 5^s und einmal summarisch mit 3 bis 6^s bezeichnet. Das Mittel wäre $3·5^s$. Mit 81 *km* Weglänge ergibt sich dann als Mittel für die Geschwindigkeit 23·1 *km*.

Schließlich könnte als Mittelwert aus dem ersten und zweiten Mittel (20·8 und 23·1) für die geocentrische Geschwindigkeit: 22 *km* genommen werden. Ich will diesen Wert mit dem Vorbehalte annehmen, dass, wie diese Betrachtung zeigt, die auf längere Bahnstrecken bezüglichen Angaben für sich auf eine größere Geschwindigkeit schließen lassen würden.

Von diesem Betrage wäre noch jener Theil abzuziehen, welcher der Schwerewirkung der Erde entspringt, ungefähr 3 *km*, wenn nämlich das Beobachtungsergebnis zu 22 *km* beiläufig richtig ist. Es bleibt also noch 19 *km* als die von der Erdstörung befreite geocentrische Geschwindigkeit übrig. Da der Radiationspunkt nur 10° vom Zenith entfernt war, so ist die aus demselben Einflusse nöthige Verbesserung desselben ganz unerheblich.

Der scheinbare Radiant befand sich in 89·3° Länge und 24·0° nördl. Breite, 143·5° vom Apex der Erdbewegung entfernt. Der aufsteigende Knoten der Bahn war in 330·9° Länge, und hieraus ergibt sich die heliocentrische Geschwindigkeit zu 46·4 *km* oder $6^1/_4$ g. M.

Form, Farbe, Größe etc. Die vielen Berichte lauten in dieser Hinsicht, wie begreiflich, sehr verschieden, nicht allein nach der individuellen Auffassung und Wiedergabe, sondern gewiss auch nach der Phase, in welcher die Erscheinung eben erblickt wurde. Derartige Schilderungen sind keineswegs unwichtig; da es aber doch nicht gut möglich ist, alle einzelnen

Mittheilungen ausführlich wiederzugeben, so soll hier sowohl das Übereinstimmende im ganzen hervorgehoben und durch Beispiele belegt, als auch des Abweichenden in gleicher Weise gedacht werden.

Beobachter, welche zufällig die Erscheinung schon in einem sehr frühen Stadium bemerkt hatten, ehe sie durch die große Lichtfülle allgemeines Aufsehen erregte, schildern sie als »Sternschnuppe«, welche sich rasch vergrößerte, glänzend weißes, bläuliches oder grünliches Licht ausstrahlte und einen ähnlich gefärbten Schweif nach sich zog. Im letzten Theile des Laufes gieng das Licht in gelb, orange und feuerroth über, dann erfolgte die Auflösung in zumeist dunkelrothe Partikel. So lautete z. B. eine Nachricht aus Zwittau in Mähren: »Zuerst war es ein kleiner Stern, der sich zusehends vergrößerte, dann, wie eine Bogenlampenkugel, aber geschweift, mit weißem und bläulichem Lichte alles taghell erleuchtete und mit ungeheurer Geschwindigkeit am Himmel hinzog. Später wurde die Kugel röthlich und zersprang in blutrothe Stücke«.

Aus Wien (Heiligenstadt) wurde berichtet: Anfangs war es wie eine Sternschnuppe, später mit einem herrlichen intensiv orange gefärbten Schweif, aus dem sich eine stark grün leuchtende Kugel entwickelte.

Der Bericht aus Friedeberg a. O. führt aus: Zuerst wie eine Sternschnuppe, dann wie eine Feuergarbe, die von unzähligen Funken umschwärmt war. Unmittelbar vor dem Niederfallen erfolgte eine Theilung in zwei Hälften.

Die unter 18*a* ausführlich gegebene Mittheilung von Kamnitz spricht ebenfalls zuerst von einem hellen Stern beim Monde, aus dem erst später »eine große Flamme« wurde. Auch der Ausdruck »feuriger Drache« kehrt oft wieder.

Die Wahrnehmungen aus Hirschberg stimmen, wie Herr Prof. Reimann mittheilte, gleichfalls darin überein, dass das Meteor zuerst klein erschien und allmählich zu bedeutender Größe anwuchs.

Dieses Anwachsen kann nicht allein aus einer größeren Annäherung an den Beobachter erklärt werden, weil die Bahn fast vertical war und daher für die weiter entfernten Orte die Distanz mit der Abnahme der Höhe nicht allzuviel vermindert

wurde. Es ist vielmehr ein thatsächliches Anwachsen der Lichtentwickelung sicher anzunehmen, während im weiteren Verlaufe die rothe Färbung bereits wieder die Wärmeabnahme bezeichnet.

Die Beobachtung aus Brünn, wo das Meteor erst in einer späteren Phase bemerkt wurde, ist unter (7) ausführlich wiedergegeben. Vielleicht ist der kleine, aus dieser Beobachtung abgeleitete Wert der Geschwindigkeit, sowie jener aus der Schweidnitzer nicht ausschließlich auf Überschätzung der Dauer zurückzuführen.

Auf mehrere Beobachter machte das Meteor den Eindruck eines Streifens, und von der eigentlichen Feuerkugel erwähnen sie nichts. Bemerkenswert ist, dass manche ausdrücklich diesen Streifen als aus feurigen oder glühenden Partikeln bestehend schildern. Ich führe als Beleg hier einige im »Neuen Wiener Tagblatt« enthaltene Angaben aus Wien in abgekürzter Form an:

Bellaria: Ein hellgelber, aus Kugeln zusammengesetzter Streifen.

Leopoldstadt: Rother Schweif, welcher aus lauter feurigen Kugeln zu bestehen schien.

Heiligenstadt (eine zweite Beobachtung): Hochrother feuriger Streifen, welcher aus lauter glühenden Kugeln zusammengesetzt schien.

Diese und andere voneinander unabhängige Darstellungen sind im Einklange mit der wohlbegründeten Erkenntnis, welche seit Haidinger und Galle zum Durchbruche gelangt ist, dass die Partikel des Meteorwölkchens schon im Zuge durch die Atmosphäre voneinander gesondert sind und nicht erst am Hemmungspunkte durch explosive Zertrümmerung eines größeren Körpers entstehen. Zwar werden jene an und für sich kaum so groß sein, dass sie im nicht leuchtenden Zustande mit freiem Auge in so großer Entfernung gesehen werden könnten, allein sie bilden die Kerne einzelner größerer leuchtender Sphären.

Einige Beobachter (Ploschwitz, Maschwitz und auch aus Wien) berichteten, dass sich zuletzt die Kugel vom Schweife getrennt haben soll, wobei jener zurückblieb.

Über die scheinbare Theilung (die sogenannte Explosion) am Endpunkte liegen sehr viele Berichte vor, und in einzelnen derselben wird sogar die Zahl der Partikel zu 6, 8 und 10, deren Licht aber übereinstimmend als roth, blutroth oder dunkelroth angegeben.

Die allgemeine Lichtstärke war gewiss eine sehr bedeutende. Dass das Mondlicht überstrahlt, oder auch, dass die Gegend taghell erleuchtet schien, wurde aus Znaim, Zwittau, Niedertenzel, Warnsdorf, Kaiserswaldau, doch auch noch aus Dresden und Preilack berichtet.

Hinsichtlich der scheinbaren Größe liegen einige Vergleiche mit dem Durchmesser der Mondscheibe vor. Diesen als Einheit genommen, geben Schwechat, Znaim und Brünn: $^1/_4$, Krasna: $^1/_2$, Warmbrunn und Eichberg etwas weniger oder fast: 1, Tschernoschin: 1. Werden die Angaben von Warmbrunn und Eichberg etwa zu $^3/_4$ genommen, so würden diese Schätzungen für den wirklichen Durchmesser der leuchtenden Gesammtsphäre geben, aus:

Brünn und Znaim	460 *m*,
Schwechat	750 »
Warmbrunn und Eichberg	840 »
Krasna	1100 »
Tschernoschin	1200 »

Im Mittel zu 800 *m*.

Detonationen. Hierüber liegen ganz bestimmte, glaubwürdige Meldungen vor. Die bezeichneten Intervalle zwischen Licht und Schall weichen von den nach der Höhenlage und Distanz — allerdings mit dem Werte der mittleren Schallgeschwindigkeit — berechneten nicht allzu viel ab. Ich führe hier die mir bekannt gewordenen Angaben an und setze dazu in Klammern die berechneten.

(11) Dauba-Wrchhaben	genau	2^m ($2^1/_4{}^m$),
(17) Pichlerbaustellen		3^m (3^m),
(18*b*) Kamnitz		$2-3^m$ ($3^1/_4{}^m$).

Die Angabe (16) aus Leipa dürfte vielleicht mit (17) identisch sein, stimmt aber jedenfalls auch sehr nahe. Ohne

Angabe des Intervalls, welches aber doch als ein »geraumes« bezeichnet wurde, finden sich noch weitere Berichte über Detonationen aus der Umgebung von Leipa und Kamnitz. Herr Prof. Paudler schrieb hierüber: »Es ist überhaupt bemerkenswert, dass alle Beobachter ein großes Zeitintervall angeben. Manche behaupten, dass sie dabei die Uhr in der Hand hatten«. Von Prag konnte ich genauere Angaben nicht erhalten.

Hinsichtlich der hier angeführten Beobachtungsorte handelt es sich um Entfernungen zwischen 45 und 65 *km* vom Hemmungspunkte in der Atmosphäre. Warnsdorf, wo auch noch dumpfer Donner vernommen worden sein soll, liegt schon 75 *km* entfernt. Auffallend sind die Mittheilungen aus der Umgebung von Hirschberg. In Warmbrunn hat der Secundaner Letzel, wie er versicherte, nach einem mit der Uhr gemessenen Intervall von $4^1/_2{}^m$ und in Eichberg (120 *km* entfernt) Krieg nach 5^m Detonationen vernommen. Die berechneten Intervalle wären etwa um 1^m größer. Ganz unwahrscheinlich ist, ungeachtet der großen Entfernung, ein wirklicher Zusammenhang zwar nicht, doch kann vielleicht in beiden Fällen irgendein anderes ähnliches Geräusch mit der Erscheinung in Verbindung gebracht worden sein. —

Das zweite Meteor, welches in Pottschach 7^h20^m, also etwa 25^m später beobachtet wurde, kann, auch abgesehen vom Zeitunterschiede, mit dem hier besprochenen nicht identisch sein. Der Endpunkt wäre nämlich, entsprechend einem Azimuth von etwa 122°, viel zu weit gegen West hin gerückt, denn jener bei Melnik hätte aus Pottschach gesehen in $A = 160°$ erscheinen müssen. Auch die Höhe von 18° wäre mehr als dreimal zu groß.

Dagegen ist die Zugehörigkeit zu demselben Radianten sehr wahrscheinlich, da die Angabe, dass die Bahn senkrecht zum Horizont verlief, mit der Thatsache im Einklange steht, dass der vorhin ermittelte, nur 10° östlich vom Zenith entfernte Radiant nach Verlauf des angegebenen Intervalls noch näher dem Zenith gerückt war und da die Polhöhe des Ortes der Declination des Radianten überdies fast gleich ist. Wenn man sich an die ungefähr bezeichneten Positionen hält, findet man freilich, dass die so dargestellte Bahn erheblich von der Verticalen abgewichen wäre und dann etwa 10° nördlich des

Radianten vorbeigieng. Vermuthlich ist aber dabei irgendein Versehen oder Fehler unterlaufen. Denn der Punkt bei ι Andromedae hätte nicht 18°, sondern 30° Höhe gehabt. Die durch χ Cassiop. gelegte Verticale geht näher an o Androm. vorbei, welcher Stern wahrscheinlich auch gemeint war.

Man könnte, allerdings nur sehr hypothetisch, auch abschätzen, wo der Fall beiläufig stattgefunden hatte. Vorausgesetzt, dass es sich nach der Größenbezeichnung um eine kleinere Masse handelte, welche schon in größerer Höhe gehemmt wurde, z. B. in 45 bis 50 *km*, so wäre der Endpunkt über die Gegend von Freistadt in Oberösterreich oder etwa über die südlichen Grenzen Böhmens zu versetzen.

Kosmische Verhältnisse. Der hier ermittelte Radiationspunkt in $\alpha = 89°$, $\delta = 47 \cdot 5°$ ist, soviel mir bekannt, für Feuerkugeln in dieser Epoche noch nicht nachgewiesen worden. Einen hinsichtlich Epoche und Position naheliegenden Sternschnuppenradianten finde ich in Dennings General-Catalog,[1] p. 245, von Booths bestimmt, für Februar bis März 1889 in $\alpha = 84°$, $\delta = +44°$. Die angegebene Epoche ist jedoch zu unbestimmt und ausgedehnt, um ein Urtheil über die Zugehörigkeit zu gestatten. Da dieser Radiant nur aus fünf Meteoren bestimmt ist, kann von einem Nachweise der Stabilität innerhalb dieser Zeit nicht die Rede sein, und es kommt sehr darauf an, ob er für den Anfang, die Mitte oder das Ende der Periode gelten soll.

Ein anderer, etwas ferner liegender Sternschnuppenradiant wird ebendort p. 247 für Februar 1. bis März 1. in $\alpha = 101°$, $\delta = +44°$ (nach Den. Reduction italienischer Beobachtungen) angeführt. Obwohl es keineswegs ausgeschlossen ist, dass der Radiant unserer Feuerkugel etwas weiter gegen SE gelegen sein konnte, worauf unter anderem die Beziehung auf den

---

[1] General Catalogue of the Radiant Points of Meteoric Showers and of Fireballs and Shooting Stars observed at more than one Station. By W. F. Denning. Aus den Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol. LIII. London, 1899. Eine höchst wichtige und für Arbeiten über Meteor-Astronomie unentbehrliche Publication. Sie ist im folgenden mit Den. G. C. citiert, während das Citat Den. für sich das letzte englische Radiantenverzeichnis Dennings betrifft.

Mond in (11) hinweisen würde, so erscheint mir der Unterschied von etwa 9° insoferne zu groß, weil darnach die Zenithdistanz des Radianten ungefähr 18° gewesen wäre, wogegen alle Angaben über die scheinbare Bahnneigung sehr entschieden sprechen. Übrigens findet auch hier wieder die frühere Bemerkung über die Ausdehnung der Epoche Anwendung, da es in dieser Position und bei der zugehörigen Knotenlänge keine stabilen Radianten im eigentlichen Sinne geben kann. Würde unser Radiant z. B. auf den Anfang Februar mit einer plausibeln Geschwindigkeitshypothese, z. B. $v = 1 \cdot 8$ bis $2 \cdot 0$ zurück reduciert, so würde er sich allerdings sehr nahe an dem bezeichneten Sternschnuppenradianten befunden haben.

Um die Vergleichung mit Meteorradianten aus ferner liegenden Epochen zu erleichtern, nämlich die Berechnung der nöthigen Verschiebung unter Voraussetzung eines constanten kosmischen oder siderischen Ausgangsortes abzukürzen, habe ich den letzteren für die hier besprochene Feuerkugel versuchsweise mit mehreren Annahmen für die Geschwindigkeit berechnet. Denn eben dieses Element ist ja das unsicherste und übt doch den größten Einfluss auf die heliocentrische Bahn. Mit Rücksicht auf die gewöhnlich stattfindende Überschätzung der Dauer und auf den Verlust beim Durchgange durch die Atmosphäre ist der aus den Beobachtungen abgeleitete Wert der Geschwindigkeit vermuthlich zu klein. Ich habe daher auch noch größere Werte in Betracht gezogen, nämlich v: 1·65, 1·70, 1·75, 2·0 und 2·5, welche Zahlen also mit rund 30 *km* zu multiplicieren wären, um die Geschwindigkeit in Kilometern anzugeben.

Diese Geschwindigkeitshypothesen bestimmen zugleich durch die Beziehung $a = \frac{1}{2 - v^2}$ die betreffende Halbaxe der hyperbolischen Bahn. Die zugehörige heliocentrische Richtung beim Eindringen in das Sonnensystem ist dann in Länge (l) und Breite (b) durch folgende Resultate gegeben.

Für die aus den Beobachtungen abgeleitete Geschwindigkeit wird $l = 33 \cdot 4°$, $b = +8 \cdot 7°$.

Für v: wird	l:	b:
1·65	42·3°	+10·1°
1·70	45·9	10·7
1·75	49·2	11·3
2·00	59·5	13·4
2·50	69·4	16·2

Indem ich nun, wie auch in früheren ähnlichen Fällen, versuchsweise mit diesen verschiedenen Hypothesen Radiationen für andere Epochen berechnete und die Resultate mit dem vorhandenen Radiantenmaterial verglich, schien es mir, dass, soweit diese Hypothesen in Frage kommen, die besten Übereinstimmungen ungefähr für $v = 2$ oder 60 *km* bestünden, und da dieser Wert an sich gar nicht unwahrscheinlich ist, will ich einige solche Vergleichungen hier anführen.

Unter dieser Voraussetzung würde der Radiant schon im Februar bei wachsender Sonnenlänge in Länge rückläufig mit zunehmender Declination, indem er ziemlich rasch durch den Fuhrmann und die nördlichsten Partien des Perseus bis an die südlichen Grenzen der Cassiopeia wandert, sich durch die Andromeda zum Widder herabsenkt und dann rechtläufig ein wenig nördlich der Ekliptik durch Widder, Stier und Zwillinge wieder in den Fuhrmann zurückkehrt.

Es mögen hier für verschiedene Jahresepochen einige Vergleichungen der berechneten Radianten mit beobachteten angeführt werden.

1. Für $\odot = 0$, März 20. Nach der Rechnung würde der scheinbare Radiant sich befinden in $\alpha = 67·5°$, $\delta = 51·5°$. Den. G. C., p. 243 führt für März 9. bis 27. $\alpha = 74°$, $\delta = +47°$ (G. Z.) an.

2. $\odot = 30°$, April 19. Berechnet: $\alpha = 51·5°$, $\delta = +55·3°$. Für den 19. April 1872 fand ich nach zwei Angaben im Report of the Brit. assoc., 1872, p. 116 den Ort des Radianten einer in England beobachteten Feuerkugel, allerdings nur beiläufig in $\alpha = 56°$, $\delta = +55°$. Für den 22. April 1894 verzeichnet Denning in den Monthly notices, 55, p. 238 eine große Feuerkugel: »Radiant nicht sicher, in der Nähe von α Persei«. Im G. C. führt er ihn: $\alpha = 48$, $\delta = 44°$ an. Die Rectascension würde wohl

gut genug stimmen, in der Declination bliebe aber ein Unterschied von 11°.

Sternschnuppenradianten sind, wegen der Nähe der Sonne, um diese Zeit wohl nicht leicht nachweisbar.

Für Mai und Juni liegen sehr wenige Beobachtungen hinsichtlich dieser Partie des Himmels vor.

3. $\odot = 120°$, Juli 22. erhält man, berechnet: $\alpha = 28 \cdot 5°$, $\delta = +22 \cdot 5°$ und für $\odot = 145°$, August 17. $\alpha = 45 \cdot 5°$, $\delta = +26 \cdot 5°$.

Beobachtete Radianten:

Juli 5.	$\alpha = 21°$,	$\delta = +23°$	(Den.),
» 12.	$\alpha = 28°$,	$\delta = +30°$	»
» 30.	$\alpha = 42°$,	$\delta = +23°$	(Den. G. C., p. 233),
Juli 22. bis August 1.	$\alpha = 46°$,	$\delta = +26°$	» » » » »
August 2. bis 11.	$\alpha = 45°$,	$\delta = +27°$	» » » » »
» 5.	$\alpha = 47°$,	$\delta = +24°$	(Weiß),
» 6. » 12.	$\alpha = 45°$,	$\delta = +24°$	(Den. G. C., p. 236),
» 9. » 12.	$\alpha = 44°$,	$\delta = +25°$	» » » » »
» 12.	$\alpha = 42°$,	$\delta = +24°$	(Weiß).

Auf die Epoche des 12. August reduciert, würde die oben berechnete Position: $\alpha = 42°$, $\delta = 25 \cdot 5°$ sein. Der Unterschied ist gegenüber den Beobachtungen ein sehr geringer.

4. $\odot = 180°$, September 22. wäre berechnet: $\alpha = 59 \cdot 5°$, $\delta = +29°$.

Beobachtete Radianten:

September 6.	$\alpha = 60°$,	$\delta = +32°$	(Schiap.),
August 23. bis September 14.	$\alpha = 60°$,	$\delta = +28°$	(Den. G. C., p. 240).

Für September 26. 1865 ist eine große Feuerkugel in England (Rep., 1865, p. 124) mit dem Radianten $\alpha = 69°$, $\delta = +25°$, nicht sehr sicher, angeführt.

5. $\odot = 210°$, October 23. Man erhält nach der Rechnung: $\alpha = 73 \cdot 5°$, $\delta = 31 \cdot 5°$.

Beobachtete Radianten:

October 10. bis 27.	$\alpha = 71°$,	$\delta = +31°$	(Den. G. C., p. 244),
» 19. » 21.	$\alpha = 74°$,	$\delta = +31°$	» » » » »

October 14. bis 15. $\alpha = 76°$, $\delta = +33°$ (Den. G. C., p. 244),
» 12. » 31. $\alpha = 77°$, $\delta = +31°$ » » » » »

Möglicherweise käme auch die nach Herschels Bestimmung mit dem Radianten $\alpha = 77°$, $\delta = +34°$ für den 8. October 1877 angeführte Feuerkugel hier in Betracht.

6. $\odot = 240$, November 22. Berechnet: $\alpha = 86°$, $\delta = +33 \cdot 5°$.

Beobachtete Radianten:

November 7. $\alpha = 77°$, $\delta = +32°$ (Den.),
» 1. bis 18. $\alpha = 81°$, $\delta = +28°$ (Heis).
» 20. $\alpha = 85°$, $\delta = +33°$ (Den.).
October 17. bis November 15. $\alpha = 83°$, $\delta = +28°$ (Corder in Den. G. C., p. 244),
» 29. » » 13. $\alpha = 78°$, $\delta = +37°$ (Den. G. C., p. 244).
» 21. bis 31. » » 9. bis 12. $\alpha = 86°$, $\delta = +34°$ (ib. p. 246),
» 7. » 10. $\alpha = 86°$, $\delta = +36°$ (Corder ib.).

7. $\odot = 270$, December 21. Berechnet: $\alpha = 92 \cdot 5°$, $\delta = +36 \cdot 5°$.

Beobachtete Radianten:

November 18. bis 30. $\alpha = 90°$, $\delta = +36 \cdot 5°$ (Hnatek in Den. G. C., p. 292),
» 25. » 28. $\alpha = 90°$, $\delta = +38°$ (Herschel in Den. G. C., p. 249),
» 28. bis December 9. $\alpha = 94°$, $\delta = +37°$ (Herschel in Den. G. C., p. 249),
December 8. bis 15. $\alpha = 87°$, $\delta = +37°$ (Den. G. C., p. 246),
» 1. » 15. $\alpha = 95°$, $\delta = +33°$ (Heis).

December 7. bis 12. $\alpha = 100°$, $\delta = +35°$ (Sawyer in Den. G. C., p. 246),

» 22. bis 26. $\alpha = 102°$, $\delta = +35°$ (Den. G. C., p. 250).

8. $\odot = 300°$, Jänner 19. Berechnet: $\alpha = 99·5°$, $\delta = +40·5°$.

Beobachtete Radianten:

Jänner 1. bis 15. $\alpha = 100°$, $\delta = +42°$ (Den. G. C., p. 247),

» $\alpha = 105°$, $\delta = +44°$ (Schmidt ebenda).

Man kann, wenn die berechneten mit den möglichst zur selben Epoche gehörigen beobachteten Radianten verglichen werden, bemerken, dass letztere durchschnittlich in Rectascension um einige Grade voraus sind. Diese Differenz würde beseitigt werden, wenn der Radiant der Feuerkugel vom 19. Februar 1899, welcher der Rechnung zugrunde gelegt wurde, ebenfalls etwas weiter östlich, z. B. in $\alpha = 93$ bis $94°$ (statt wie ermittelt in $\alpha = 89°$) genommen würde, mit einer etwas größeren Declination. Es wäre dies keine sehr beträchtliche Änderung.

Allerdings bleiben diese und ähnliche Combinationen so lange hypothetisch, als nicht durch eine erheblich größere Anzahl von Bestimmungen das allmähliche Fortrücken des Radianten sichergestellt ist.

Schließlich möchte ich noch auf einige benachbarte Radiationen hinweisen, welche jedenfalls anderen Strömen entsprechen.

In Dennings Gen. Cat., Appendix II, p. 289 findet sich gelegentlich die Bemerkung, dass in der Zeit vom 10. bis 16. Februar häufig Meteore aus der Gegend von α Aurigae zu kommen scheinen. Es dürften damit jene gemeint sein, welche vorher (p. 243) unter »α Aurigids« für Februar 5. bis 10. mit dem Radianten $\alpha = 74°$, $\delta = +43°$ und für Februar 16. nach Schiaparelli in $\alpha = 74°$, $\delta = +48°$ angeführt erscheinen.

Aus dieser Gegend des Himmels kann die hier besprochene Feuerkugel unmöglich gekommen sein, denn sie lag zur Beob-

achtungszeit schon zu weit westlich. Dieser mehr westliche Radiant scheint jedoch in einem gewissen Zusammenhange zu stehen mit den im April für mehrere gut beobachtete Feuerkugeln in der Cassiopeia nachgewiesenen Radianten.[1] So gibt z. B. der Radiant für April 2. $\alpha = 29\cdot0°$, $\delta = +55\cdot2°$ mit der Geschwindigkeit $v = 1\cdot7$, Elemente, welche für Februar 7. bis 8. den scheinbaren Radianten in $\alpha = 71°$, $\delta = +42\cdot5°$ liefern würden. An der bezeichneten Stelle habe ich auch schon darauf hingewiesen, dass mit jenen Aprilradianten auch noch der für die erste Hälfte März in der Nähe von α Persei nachgewiesene (nach Greg für März 1. bis 15. in $\alpha = 50°$, $\delta = +48°$. Den. G. C., p. 238 führt ihn nach Heis in $\alpha = 55°$, $\delta = +52°$ für dieselbe Epoche an) zusammenhängen mag. In der That ergibt sich auch anderseits aus dem oben erwähnten »α Aurigids«-Februarradianten bis zur Epoche März 8. mit $v = 1\cdot7$ eine solche Verschiebung, dass der Radiant dann die Position $\alpha = 50°$, $\delta = +47°$ einnehmen würde.

Noch weiter westlich als jene »Aurigids« liegt endlich ein dritter Februarradiant, nämlich jener in $\alpha = 53°$, $\delta = +50°$, welchen ich für eine am 10. Februar 1875 in Frankreich beobachtete Feuerkugel abgeleitet und in den Monthly Not., Bd. 57, p. 172 mitgetheilt habe. Er entspricht wenigstens beiläufig auch dem Sternschnuppenradianten, den Heis für Februar 1. bis 14. in $\alpha = 60°$, $\delta = +51°$ (»Resultate«, p. 162) angeführt hat.

Wir hätten demnach für Februar drei, zu verschiedenen Elementensystemen gehörige, ungefähr in derselben Declinationszone hintereinander liegende Radianten zu unterscheiden:

$$\text{I: } \alpha = 53°, \ \delta = +50°$$

$$\text{II: } \alpha = 74°, \ \delta = +45\cdot5°$$

$$\text{III: } \alpha = 89°, \ \delta = +47\cdot5°$$

Da alle drei Radianten mit wachsender Sonnenlänge rückläufig sind, so erscheint im März (wie hier oben gezeigt) der

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, II. a, p. 13.

zweite und im April der dritte (siehe p. 506 unter 2) sehr nahe an derselben Stelle, welche im Februar der erste einnimmt, so dass also dreierlei verschiedene Elementensysteme während der Monate Februar bis April gleichsam einen Radianten in der Nähe von α Persei liefern können, solange die Beobachtungen nicht so zahlreich und genau sind, um die Zwischenglieder der Verschiebung sicherzustellen.

Zur Theorie der Lösungen

von

G. Jaumann.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. März 1900.)

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist: die Theorie der Lösungen von der Arrhenius'schen Ionenhypothese unabhängig zu machen und sie hingegen an die Faraday-Maxwell'sche Theorie anzuschließen.

I. Capitel.

Elektrische Wirbel als Ursache aller elektromotorischen Kräfte.

§. 1. Die Helmholtz-Nernst'schen Doppelschichten. Der Ablauf der elektromagnetischen Wellen in elektrolytischen Lösungen lässt nach Drude[1] auf die Giltigkeit der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für das Innere homogener elektrolytischer Lösungen schließen. Da es sich im folgenden hauptsächlich um nahezu stationäre Ströme handelt, interessiert uns von den Maxwell'schen Gleichungen nur der zeitfreie Theil:

$$\varkappa X = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} = J_x$$

$$\varkappa Y = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} = J_y \qquad \ldots 1)$$

$$\varkappa Z = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = J_z,$$

[1] Drude, Wied. Ann., 59, 60 (1896/97).

welcher die Ohm'sche Gleichung genannt werden möge. Hierin ist X, Y, Z der elektrische Vector der Maxwell'schen Gleichungen, L, M, N der magnetische Vector, dessen Quirl (curl) die Stromdichte J_x, J_y, J_z ist, und endlich $\varkappa$ die specifische Leitfähigkeit des Mediums.

Das Auftreten der elektromotorischen Kräfte, sowie der Peltier-Wärmen, beziehungsweise der elektrolytischen Ausscheidungen an der Grenzfläche zweier verschiedener Leiter erster und zweiter Ordnung fällt jedoch derart aus dem Rahmen der Maxwell'schen Gleichungen heraus, dass an die Giltigkeit derselben auch für diese Grenzflächen oder allgemeiner in einem inhomogenen Leiter bisher niemand gedacht hat.

Nach Helmholtz befindet sich an elektromotorischen Flächen (z. B. an der Berührungsfläche von Zink und Säure in einem Volta'schen Elemente) eine elektrische Doppelschichte. Die elektrische Kraft einer solchen Doppelschichte hat im Inneren derselben (zwischen den beiden entgegengesetzt geladenen Schichten) die entgegengesetzte Richtung wie außerhalb. Der Strom dieses Elementes hat jedoch innerhalb und außerhalb dieselbe Richtung. Die Ohm'sche Gleichung 1) scheint hienach im Inneren dieser Doppelschichte nicht einmal dem Vorzeichen nach giltig zu sein.

Bei Nernst tritt diese Negation der Ohm'schen Gleichung für inhomogene elektrolytische Lösungen mit voller Anschaulichkeit auf. Nach ihm hat der osmotische Druck elektromotorische Wirkung. In einem Elektrolyten, dessen Concentration η_0 in der Richtung x abfällt, ist auch bei Abwesenheit eines Stromes ($J_x = 0$) dennoch eine elektrische Kraft X' von der Größe:

$$X' = \text{const.} \frac{u-v}{u+v} \cdot \frac{\partial \log \eta_0}{\partial x}$$

vorhanden, worin u und v die Hittorf-Kohlrausch'schen Constanten (sogenannte Wanderungsgeschwindigkeiten) sind. Umgekehrt ist dann auch eine Stromdichte J_x möglich, ohne dass eine elektrische Kraft vorhanden ist, also es ist ein Strom möglich, welcher ausschließlich durch das Gefälle des osmotischen Druckes bewirkt wird, und zwar dann, wenn an

der betreffenden Stelle des Elektrolyten durch äußere elektromotorische Kräfte eine elektrische Kraft von der Größe $-X'$ bewirkt wird, welche also die durch innere elektromotorische Wirkung dort vorhandene elektrische Kraft X' gerade aufhebt.

Die freie Ladung in dem inhomogenen Elektrolyten ist proportional dem Werthe $\frac{\partial X'}{\partial x}$. Da außerhalb der ganzen Diffusionsschichte sowohl in der concentrierteren, als in der verdünnteren Lösung X' gleich Null ist, innerhalb der Diffusionsschichte jedoch constantes Vorzeichen hat, so hat $\frac{\partial X'}{\partial x}$ nach der einen Lösung hin positive, nach der anderen Lösung hin negative Werthe. Die Helmholtz'sche Doppelschichte ist also hier von endlicher Dicke, und die Vertheilung der elektrischen Ladung $\frac{\partial X'}{\partial x}$ in derselben ist bekannt.

Alle diese Resultate sind gut begründet, da sie Nernst im theilweisen Anschlusse an Helmholtz fast unabhängig von der Ionenhypothese aus dem Hittorf'schen Überführungsgesetze und dem van t'Hoff'schen Gesetze des osmotischen Druckes unter Zuziehung des Energieprincipes ableiten konnte. Es ist also sicher, dass die elektrische Kraft in einem inhomogenen Elektrolyten nicht allein von der Stromdichte und Leitfähigkeit abhängt, sondern auch von dem Concentrationsgefälle.

Dennoch kann ich mich nicht entschließen, deshalb die Giltigkeit der Ohm'schen Gleichung 1), also auch der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für inhomogene Leiter fallen zu lassen, denn ich sehe die Möglichkeit, dass der elektrische Vector X, Y, Z der Maxwell'schen Gleichungen mit der elektrischen Kraft X', Y', Z' in inhomogenen Leitern nicht identisch ist.

§. 2. Der elektrische Vector XYZ. Schreiben wir also dem elektrischen Vector XYZ zunächst ausschließlich folgende Eigenschaften zu:

1. Dass er die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen auch in inhomogenen Medien erfüllt;

2. dass in einem Leiter erster oder zweiter Ordnung die Stromwärme dW, welche pro Secunde in einem Raumelemente produciert wird, gleich ist

$$dW = \varkappa(X^2 + Y^2 + Z^2)\,dx\,dy\,dz, \qquad \ldots 2)$$

und endlich 3. dass in einem Nichtleiter der elektrische Vector XYZ gleich der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$ ist.

§. 3. Die elektromotorische Kraft. Die Stromdichte $J_x J_y J_z$ erfüllt aus geometrischen Gründen (weil sie als Quirl eines [und zwar des magnetischen] Vectors definiert ist) überall im Stromleiter die Laplace'sche Gleichung, sie hat weder Quellen, noch Sinkstellen, die Stromfäden sind ringförmig geschlossen. Wenn nun die Ohm'sche Gleichung 1) für das Innere eines auch inhomogenen Stomleiters ausnahmslos gilt, wie ich dies annehme, so hat, da $\varkappa$ niemals negativ ist, der Vector XYZ überall dieselbe Richtung wie $J_x J_y J_z$. Das Linienintegral des Vectors XYZ über einen geschlossenen Stromfaden ist also nicht gleich Null. Das Potential des Vectors XYZ ist also nicht eindeutig, sondern hat eine Periode E. Dass dieser Vector überhaupt ein Potential im Inneren des stromleitenden Kreises hat, folgt daraus, dass sein Quirl nach den Maxwell'schen Gleichungen im stationären Falle dort überall Null ist. Aus dem gleichen Grunde muss auch die Periode E für alle Stromfäden desselben Stromzweiges denselben Werth haben.

Dies vorausgeschickt, lassen sich die Gleichungen 1) und 2) erst über einen Stromfaden, dann über den ganzen Stromleiter leicht integrieren und ergeben:

$$LE = J \text{ und } W = EJ,$$

worin J die Stromstärke, L die Leitfähigkeit des Stromleiters, W die Wärmeproduction pro Secunde und E die Periode des Potentials von XYZ ist.

Es ist sonach die algebraïsche Summe der elektromotorischen Kräfte im Stromkreise nichts anderes als die Periode E des Potentials des elektrischen Vectors XYZ im Inneren des Stromleiters.

§. 4. Elektrische Wirbelringe als Grenzlinien der elektromotorischen Flächen. Die Thatsache der Periodicität

des Potentials des Maxwell'schen Vectors XYZ in stationär durchströmten Leitern ist, wie eben angeführt wurde, mit der Giltigkeit der Maxwell'schen Gleichungen im Inneren des ganzen (auch inhomogenen) Leitungskreises nicht unverträglich, jedoch beweist diese Periodicität, dass die Maxwell'schen Gleichungen nicht überall im Raume giltig sein können, denn irgendwo müssen die elektrischen Quirl ihren Sitz haben, welche die Periodicität des Potentials bestimmen, während nach den Maxwell'schen Gleichungen im stationären Falle nirgends elektrische Quirl vorhanden sein sollten. Diese irgendwo vorhandenen elektrischen Wirbelringe müssen mit den ringförmigen Stromfäden kettenringartig zusammenhängen.

Da nun die Maxwell'schen Gleichungen zweifellos auch in dem Isolator giltig sind, welcher den Stromleiter umgibt, so können die elektrischen Wirbelringe nur in der Oberfläche, welche den Leiter vom Isolator trennt, ihren Sitz haben. Wo diese elektrischen Wirbel in der Oberfläche verlaufen, kann man mit dem Elektrometer entscheiden. Außerhalb des Leiters kann man nämlich unbedenklich dem Maxwell'schen Vector XYZ die in §. 2, Punkt 3 angegebene Eigenschaft zuschreiben, dass er mit der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$ identisch ist. Ferner ist außerhalb des Leiters das elektrische Potential, also auch das Potential des Vectors XYZ eindeutig.

Das Potential des Vectors XYZ an der äußeren Seite der Oberfläche des Leiters hat den dem Ohm'schen Gesetze entsprechenden Abfall, also so weit der Leiter homogen ist denselben Abfall, welchen es im Inneren des Leiters hat. Es sind hier also die Fresnel-Maxwell'schen Grenzbedingungen erfüllt, und in der Oberfläche des Leiters, soweit dieser homogen ist, verlaufen sonach ebenfalls keine Wirbel des Vectors XYZ und gelten also ebenfalls die Maxwell'schen Gleichungen.

Anders an den Inhomogenitätsstellen oder elektromotorischen Flächen. Dort macht das Potential an der Oberfläche außerhalb des Leiters einen plötzlichen Sprung um den Betrag der elektromotorischen Kraft, an der inneren Seite der Oberfläche aber verläuft das Potential des Vectors XYZ nach Gleichung 1) continuierlich. Das Linienintegral des Vectors XYZ

über eine beliebig kleine, geschlossene Linie, welche kettenringartig mit der Grenzlinie der elektromotorischen Fläche zusammenhängt, hat also einen beträchtlichen Wert, nämlich den ganzen Wert der elektromotorischen Kraft der Fläche.

In dieser Grenzlinie, in welcher die beiden verschiedenen Leiter (z. B. Zink und Säure) mit dem umgebenden Isolator zusammentreffen, verläuft also ein Wirbelfaden des elektrischen Vectors XYZ, dessen Wirbelstärke gleich ist der elektromotorischen Kraft dieser Combination.

Die Maxwell'schen Gleichungen gelten hienach überall im Raume, auch in der Grenzfläche zwischen einem homogenen Leiter und einem Isolator und auch in der Grenzfläche zweier verschiedener Leiter. Nur in jenen geschlossenen Linien, welche diese Flächen voneinander trennen, in welchen also drei verschiedene Stoffe, nämlich zwei Leiter und ein Isolator, zusammenstoßen, gelten die Maxwell'schen Gleichungen nicht unverändert.

§. 5. Elektrische Wirbelzonen in der Oberfläche inhomogener Leiter. Der Übergang zweier Stoffe ineinander an ihrer Berührungsfläche ist niemals ein discontinuirlicher, sondern immer als stetig anzunehmen. Manchmal hat diese Übergangsschichte sogar beträchtliche Dicke, wie z. B. die Diffusionsschichte, in welcher eine concentriertere in eine verdünntere Lösung übergeht, oder z. B. die Übergangsschichte, in welcher warmes Kupfer in kaltes Kupfer übergeht.

Der inhomogene Leiter wird von einem Isolator umgeben. In der geschlossenen Linie, in welcher eine beliebige Fläche constanter Eigenschaft (z. B. constanter Concentration einer Lösung) die Oberfläche schneidet, stoßen zwei Leiter von ein wenig verschiedenen Eigenschaften und ein Isolator zusammen. In dieser Linie kann also ein unendlich schwacher elektrischer Wirbelring verlaufen. Die ganze Zone der Oberfläche des inhomogenen Leiters, in welcher die Übergangsschichten (die Flächen constanter Eigenschaften) zutage treten, kann also von einem Wirbelbande von endlicher Wirbelstärke eingenommen werden.



Der elektrische Vector XYZ erfüllt also in dieser Oberflächenzone die Fresnel-Maxwell'schen Grenzbedingungen nicht. Seine Tangentialcomponente unmittelbar außerhalb und innerhalb dieser Oberflächenzone unterscheiden sich um einen endlichen Betrag, welcher von der gleichgerichteten Componente des Eigenschaftsgefälles des inhomogenen Leiters abhängt.

§. 6. Unterscheidung zwischen dem elektrischen Vector XYZ und der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$. Erinnern wir uns daran, was Maxwell unter der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$ versteht. Es ist dies nicht etwa die Kraft, welche ein mit der Ladung 1 versehenes Körperchen erfährt. In dieser directen Weise darf die elektrische Kraft nur in einem Nichtleiter gemessen werden, dessen diëlektrische Constante $\varepsilon = 1$ ist, also nur in normaler Luft. In Leitern wäre ja eine derartige Messung überhaupt nicht denkbar.

Man versteht vielmehr nach Maxwell unter der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$ in einem beliebigen Medium einen physikalisch wichtigen, jedoch an sich nicht direct messbaren Vector, welcher gleich ist der wahren direct messbaren elektrischen Kraft, welche in einem sehr dünnen, mit Luft gefüllten Canale auftreten würde, wenn man diesen Canal an dem betrachteten Orte in der betreffenden Richtung in das Medium legen würde. Die so definierte elektrische Kraft $X'Y'Z'$ erfüllt stets die Fresnel-Maxwell'schen Grenzbedingungen, denn Wirbel der elektrischen Kraft von ungemein hoher Wirbeldichte (Quirl) gibt es nicht, am wenigsten in stationären Fällen.

Die elektrische Kraft $X'Y'Z'$ ist ferner in allen homogenen Medien dem Vector XYZ der Maxwell'schen Gleichungen gleich, aber nur deshalb, weil auch dieser Vector XYZ für die Trennungsfläche homogener Medien die Grenzbedingungen erfüllt. Es ist nämlich deshalb der Vector XYZ in dem homogenen Medium gleich dem Vector XYZ in dem unendlich dünnen, in seiner Richtung in das Medium gelegten Luftcanal. In diesem Canale, also in Luft, ist aber der Vector XYZ nach §. 2, Punkt 3 gleich der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$. Es ist sonach auch im Inneren jedes homogenen Mediums der elektrische Vector XYZ gleich der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$.

Anders jedoch in inhomogenen Medien. Da für die Oberfläche des Luftcanals der elektrische Vector XYZ nach dem vorigen §. 5 die Grenzbedingungen nicht erfüllt, hat er in dem Luftcanale und neben dem Luftcanale zwei um einen endlichen Betrag verschiedene Werthe, was für die elektrische Kraft $X'Y'Z'$ nicht der Fall ist, da diese die Grenzbedingungen stets erfüllt. Da nun in dem Luftcanale nach §. 2 der Vector XYZ gleich der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$ ist, so ist in dem inhomogenen Medium der elektrische Vector XYZ (welcher in allen Medien die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt) von der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$ der Richtung und Größe nach verschieden.

Die Größe dieser Differenz hängt ab von der Stärke des Wirbelbandes, welches nach §. 5 an allen Zonen der Oberfläche, wo die Schichtung des Mediums zutage tritt, vorhanden ist. Man ersieht, dass jene Componente des elektrischen Vectors XYZ, welche in eine dieser Schichten (z. B. in eine Fläche constanter Concentration) hineinfällt, auch in inhomogenen Leitern der gleichgerichteten Componente der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$ gleich ist.

Der größte Unterschied tritt auf für jene Componenten, welche in die Richtung des stärksten Eigenschaftsgefälles des inhomogenen Leiters fallen.

§. 7. Der Vector $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$. Die Unterscheidung der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$ und des Vectors XYZ lässt sich noch besser herausarbeiten. Man kann die beiden Vectoren nebst ihren eventuellen Quellen und Wirbeln rein darstellen, d. h. sie von einander wirklich trennen und unabhängig machen. Der Vector XYZ ist noch in den meisten Fällen der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$ gleich, also ersichtlich nicht von ihr unabhängig, er hat ferner sowohl Quellen, als Wirbel. Dieser Vector XYZ hat also keine besonders einfache physikalische Bedeutung, sondern nur einen rechnerischen Wert, wie das Potential und die elektromotorische Kraft.

Viel besser stellt man den neuen Vector der Maxwell'schen Gleichungen dar in der Form $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$, worin $\varkappa$ die Leitfähigkeit ist. Dieser Vector $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$ ist in statischen Fällen überall Null, in stationären Feldern wenigstens in Nichtleitern

Null. Ferner verschwindet sein Wert in stärker elektromotorischen Flächen gegen den Wert der elektrischen Kraft. In allen diesen Fällen hat man also die elektrische Kraft $X'Y'Z'$ ganz oder nahe zu von dem Vector $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$ befreit dargestellt.

In homogenen, stationär durchströmten Leitern ist jedoch umgekehrt $X'Y'Z'$ nahezu Null, während $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$ messbare Werte hat. Für inhomogene Leiter, ausgenommen stärker elektromotorische Flächen, gilt dasselbe. In stationär durchströmten Leitern ist also $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$ nahezu frei von $X'Y'Z'$ dargestellt.

Die beiden Vectoren $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$ einerseits und $X'Y'Z'$ anderseits treten also nie zusammen in vergleichbarer Stärke auf, ausgenommen in äußerst schwach elektromotorischen Flächen und in ungemein schlechten Leitern.

Ferner hat die elektrische Kraft $X'Y'Z'$ zwar Quell- und Sinkstellen, aber keine Wirbel. Hingegen hat der Vector $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$ (ebenso wie der magnetische Vector $\mu L, \mu M, \mu N$ der Maxwell'schen Gleichungen) zwar Wirbel, aber keine Quell- und Sinkstellen.

Die Trennung des Vectors $X'Y'Z'$ und des Vectors $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$ ist also natürlich und gerechtfertigt, und diese beiden Vectoren sind es, welche die einfachste physikalische Bedeutung haben.

§. 8. Zusammenfassung. Von der Richtigkeit der Helmholtz-Nernst'schen Resultate über die elektromotorischen Doppelschichten ausgehend, ist man zunächst versucht, die Giltigkeit der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für das Innere inhomogener Leiter zu bezweifeln. Man überzeugt sich jedoch, dass nicht diese Gleichungen fallen zu lassen sind, sondern nur die Grenzbedingungen ungiltig sind, und dies nur für jene Zonen der Oberfläche inhomogener Medien, in welchen die Inhomogenitätsschichten zutage treten.

Die Helmholtz-Nernst'schen Angaben beziehen sich auf die elektrische Kraft $X'Y'Z'$, welche überall die Grenzbedingungen erfüllt und deshalb elektrostatisch messbar ist, welche aber die Maxwell'schen Gleichungen im Inneren inhomogener Medien nicht erfüllt.

Der elektrische Vector XYZ hingegen erfüllt die Maxwell-schen Gleichungen überall, nur in den erwähnten Oberflächen-

zonen erfüllt auch er diese Gleichungen und damit auch die Grenzbedingungen nicht. Das Linienintegral dieses Vectors ist die elektromotorische Kraft. Nicht nur die elektromotorischen Kräfte der Faraday'schen Magnetinduction, sondern auch jene elektromotorischen Kräfte, welche chemischen oder thermoelektrischen Ursprung haben, werden durch elektrische Wirbelringe bewirkt.

Würde ich damit abbrechen, so hätte die oben vertretene Auffassung nur formale Vortheile. Ich gehe jedoch weiter und entscheide mich gegen die Annahme, dass die Helmholtz-Nernst'schen elektrischen Kräfte $X'Y'Z'$, welche in den elektromotorischen Schichten auftreten, durch ein directes Naturgesetz oder durch eine directe Wirkung bestimmt sind, wie eine solche nach der Arrhenius-Nernst'schen Hypothese vorliegen würde.

Vielmehr nehme ich an, dass die Wirbel des elektrischen Vectors $\varkappa X$, $\varkappa Y$, $\varkappa Z$ in den erwähnten Oberflächenzonen es sind, welche durch ein directes Naturgesetz bestimmt sind, und werde in dem Capitel II versuchen, dieses Gesetz aufzustellen. Aus diesem Gesetze muss es dann auch möglich sein, die Helmholtz-Nernst'schen elektrischen Kräfte zu berechnen.

II. Capitel.

Elektromotorische Wirkung der Kreuzgefälle.

§. 9. Einleitung. Es handelt sich nun um die Aufstellung eines neuen Gesetzes, welches bestimmt, dass in der geschlossenen Linie, in welcher drei verschiedene Stoffe, nämlich zwei Leiter und ein Isolator, zusammenstoßen, ein Wirbelring des elektrischen Vectors XYZ auftreten muss. In dieser und nur in dieser Hinsicht bedürfen die Maxwell'schen Gleichungen einer Vervollständigung, um die contactelektromotorischen Wirkungen darzustellen, da nach diesen Gleichungen nur dort ein elektrischer Quirl auftreten sollte, wo sich der magnetische Vector rasch ändert.

Um das gesuchte Gesetz in Form einer Differentialgleichung und als ein Nahewirkungsgesetz zu erhalten, sieht man sich im gegebenen Falle von Anfang an darauf hingewiesen, statt abstracte scharfe Grenzflächen und Grenzlinien anzunehmen,

die continuirlichen Übergänge zwischen den verschiedenen einander berührenden Stoffen, auf deren Gesetze es hier wesentlich ankommt, einer genaueren Analyse zu unterwerfen.

Diese Grenzschichten (Übergangsschichten, Oberflächenschichten) sind zwar gewöhnlich ungemein dünn. Umso heftiger sind jedoch die Gefälle der Eigenschaften in diesen Schichten. Hiedurch erhalten diese dünnen Schichten einen bestimmenden Einfluss auf viele physikalische Processe. Man wird die Ursache mancher lange bekannten Wirkung in diesen dünnen Schichten suchen dürfen, und ebenso wird man manche neue Wirkungen der Eigenschaftsgefälle nur in diesen dünnen Schichten auffinden können, weil nur dort die Gefälle in zureichender Stärke zu erhalten sind.

§. 10. Das Kreuzgefälle zweier Eigenschaften. Wenn zwei Leiter und ein Isolator sich berühren, so ist einerseits die Oberflächenschichte zu bemerken, in welcher der Übergang der Leiter in den Isolator stattfindet, anderseits die sogenannte elektromotorische Fläche, d. i. die Grenzschichte, in welcher die beiden Leiter ineinander übergehen.

Uns interessiert nur der geschlossene körperliche Ring, in welchem diese beiden Schichten miteinander confundieren. Dieser Ring zeichnet sich dadurch aus:

1. Dass in ihm zwei wesentlich verschiedene Eigenschaftsgefälle gleichzeitig auftreten, nämlich der Übergang der Leiter ineinander und der Übergang der Leiter in den umgebenden Isolator.

2. Diese beiden Eigenschaftsgefälle haben ferner nicht dieselbe Richtung. Das erstere ist der Oberflächenschichte ungefähr parallel, das zweite steht ungefähr senkrecht auf derselben.

3. Beide Eigenschaftsgefälle stehen ungefähr senkrecht auf der Richtung des elektrischen Wirbelfadens, welcher nach §. 4 in dem betrachteten Grenzringe auftreten muss, und als dessen Ursache diese zwei Eigenschaftsgefälle betrachtet werden müssen.

Diese drei Merkmale lassen erkennen, dass es das äußere vectorische Product der beiden Eigenschaftsgefälle

ist, welches den Quirl des elektrischen Vectors XYZ bestimmt.

Letzterer Quirl ist nämlich nach §. 4 überall Null, wo keines oder nur eines dieser beiden Gefälle vorhanden ist, oder wo diese beiden Gefälle gleiche Richtung haben. Wo dies nicht der Fall ist, steht der elektrische Quirl auf der Ebene der beiden Eigenschaftsgefälle senkrecht.

Der Kürze wegen soll jene Componente des äußeren vectorischen Productes der Gefälle zweier scalarer Eigenschaften a und b, welche in die Richtung x fällt, als das Kreuzgefälle dieser beiden Eigenschaften a und b nach der Richtung x bezeichnet werden. Dasselbe wird also durch den Ausdruck

$$\frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial y}$$

dargestellt.

§. 11. Einfluss der Leitfähigkeit $\varkappa$ auf die elektromotorische Kraft. Nach §. 4 und §. 10 ist es der Quirl des Vectors XYZ, welcher durch das Kreuzgefälle, also durch ein directes Nahewirkungsgesetz bestimmt ist, während man nach §. 7 erwarten muss, dass der Quirl des Vectors $\varkappa X$, $\varkappa Y$, $\varkappa Z$ durch ein directes Gesetz bestimmt wird, der einfacheren Bedeutung dieses Vectors wegen. Dies dürfte wirklich der Fall sein, doch zerlegt sich letzterer Quirl in folgender Weise (bezogen auf die beliebige y-Richtung):

$$\frac{\partial \varkappa X}{\partial z} - \frac{\partial \varkappa Z}{\partial x} = \left(X \frac{\partial \varkappa}{\partial z} - Z \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right) + \varkappa \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right).$$

Die zweite der rechts stehenden Componenten $\varkappa \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ ist es also, welche den Quirl des Vectors X, Y, Z enthält. Dieser hat nach §. 4 nur in dem Grenzringe der elektromotorischen Flächen einen von Null verschiedenen Wert, und zwar sowohl in stromlosen, als in durchströmten Leitern.

Die erste der rechts stehenden Componenten $\left(X \frac{\partial \varkappa}{\partial z} - Z \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right)$ hat jedoch ein ganz anderes Vorkommen, sie hängt nur vom Vorhandensein eines Stromes, hingegen nicht von der Beschaffenheit

der Leiteroberfläche ab. Sie ist für den stromlosen Zustand auf der ganzen Oberfläche eines inhomogenen Leiters Null, wenigstens ist kein Grund vorhanden, in dieser Beziehung zwischen den Grenzringen und der übrigen Leiteroberfläche zu unterscheiden. Der Satz, dass diese Componente $\left(X\frac{\partial \varkappa}{\partial z} - Z\frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right)$ für den stromlosen Zustand auch in inhomogenen Leitern Null ist, bedeutet, dass der Vector XYZ, also auch der Vector $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$ in stromlosen Leitern immer auf den Flächen constanter Leitfähigkeit $\varkappa$ senkrecht steht. Es bleibt also nur die zweite Componente $\varkappa\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$. Diese ist es also, welche durch das Kreuzgefälle in dem Grenzringe bestimmt wird.

Man sieht sofort, dass die elektromotorische Kraft cet. par. desto kleiner sein muss, je größer die Leitfähigkeit $\varkappa$ ist. Wenn man z. B. ein Concentrationsgefälle eines Elektrolyten herstellt, so stellt sich auch ein Kreuzgefälle an der Oberfläche ein, welches den Wert $\varkappa\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ bestimmt. Löst man nun außerdem einen zweiten Elektrolyten in höherer, aber constanter Concentration in dem Wasser, so hat dies auf das Kreuzgefälle wohl keinen großen Einfluss, während die Leitfähigkeit $\varkappa$ bedeutend vergrößert wird. Hiedurch muss also der Quirl $\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ und also auch die elektromotorische Kraft sinken, wie dies erfahrungsgemäß (Nernst) wirklich der Fall ist.

Es ist ferner hervorzuheben, dass außerdem wenigstens eine der beiden Eigenschaften a und b, deren Gefälle sich zu dem Kreuzgefälle zusammensetzen, von der Leitfähigkeit $\varkappa$ abhängen muss. Es geht dies daraus hervor, dass nicht die Grenzlinie der Berührungsfläche beliebiger Stoffe, sondern nur zweier Leiter erster oder zweiter Ordnung eine elektromotorische Linie sein kann.

§. 12. Elektromotorische Wirkung der Kreuzgefälle. Wir sind nun in der Lage, das gesuchte Differentialgesetz, welches zur Erklärung der thermoelektrischen und

chemischen elektromotorischen Wirkungen zu den Maxwell-Hertz'schen Gleichungen hinzugefügt werden muss, mit Aussicht auf Erfolg festsetzen zu können. Dasselbe dürfte keine andere als die folgende Gestalt haben:

$$\left.\begin{aligned} C\left(\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial z}\right) &= \varkappa\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \\ C\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial x}\right) &= \varkappa\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \\ C\left(\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}\right) &= \varkappa\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \mathrm{I)}$$

a und b sind jene zwei verschiedenen Eigenschaften des inhomogenen Mediums, deren Kreuzgefälle elektromotorisch wirkt; XYZ ist der in §. 2 definierte elektrische Vector, welcher auch die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt und dessen Linienintegral die elektromotorische Kraft ist; $\varkappa$ ist die specifische Leitfähigkeit; C ist ein nur von dem gewählten Maßsystem abhängender Reductionsfactor von unbekanntem Vorzeichen.

Die weitere Untersuchung muss sich darauf richten, die Eigenschaften a und b zu bestimmen, was wohl für jede Art elektromotorischer Grenzringe besonders geschehen muss, und woraus einige neue experimentelle Motive hervorgehen.

Betrachten wir z. B. die thermoelektrischen Wirkungen, so könnte für einen solchen Grenzring a gleich der Leitfähigkeit $\varkappa$ und ferner b gleich der Temperatur sein. Dies ließe sich experimentell entscheiden. Es könnten jedoch auch a und b Functionen von $\varkappa$ und der Temperatur sein.

Wir beschränken uns im folgenden auf die Betrachtung der elektromotorischen Kräfte, welche an der Berührungsfläche verschieden concentrierter, verdünnter elektrolytischer Lösungen auftreten. Diese Lösungen zeichnen sich durch den additiven (Ostwald) Charakter ihrer Eigenschaften aus, wir können also hoffen, dass sich auch die Eigenschaften a und b so einfach bestimmen, dass sich ihr Wert außer Zweifel setzen lässt.

§. 13. Leitfähigkeit der verdünnten elektrolytischen Lösungen. Nach Kohlrausch gilt für die specifische

Leitfähigkeit einer großen Gruppe verdünnter elektrolytischer Lösungen die Beziehung

$$\varkappa = \eta(u+v)+\gamma. \quad \ldots 3)$$

Hierin ist γ die Leitfähigkeit des reinen Wassers (Kohlrausch), η die Concentration des Elektrolyten in Grammäquivalent pro Cubikcentimeter, und u, v sind die Hittorf-Kohlrausch'schen Constanten (sogenannte Wanderungsgeschwindigkeiten). Jedem Elektrolyten kommt ein Wert u und ein Wert v zu. Die Werte für u sind für alle Elektrolyten mit gleicher Basis gleich, die Werte für v sind für alle Elektrolyten mit gleicher Säure gleich. Wenn man $\varkappa$ auf einen Stoff bezieht, dessen Centimeterwürfel 1 Ω Widerstand hat, so haben u und v nach Kohlrausch für 18° C. folgende Werte (beispielsweise für einige wenige Elektrolyten herausgegriffen):

	u		v
Kali- Salze und Laugen	65	Chloride Salze und Säuren	66
Natron- Salze und Laugen	44	Sulfate Salze und Säuren	70
Ammon- Salze und Laugen	64	Acetate Salze und Säuren	35
Säuren	318	Laugen	174

Ein solches einfaches Verhalten ist es, welches Ostwald als additiven Charakter einer Eigenschaft bezeichnet. Additiver Charakter kommt auch vielen anderen Eigenschaften, und zwar auch in ganz anderen Gruppen verwandter Stoffe, als es die verdünnten elektrolytischen Lösungen sind, zu z. B. verwandten organischen Verbindungen.[1]

[1] Die Arrhenius'sche Hypothese der völligen Dissociation der Elektrolyte in sehr verdünnten elektrolytischen Lösungen in zwei fictive Substanzen (die gelösten Ionen), welche nach Ostwald als Träger der Componenten der additiven Eigenschaften gedacht werden können, macht auch auf einen Gegner der atomistischen Hypothese den Eindruck einer freien und kühnen Idee. Ostwald hat wirklich schöne Seiten dieser Dissociationshypothese herausgearbeitet. Dennoch geht diese Hypothese so weit über das Thatsächliche und Nothwendige hinaus, dass ich mich ihr durchaus nicht anschließen kann. Siehe hierüber w. u. §. 32, 33.

Die Werte von u und v sind jedoch nicht bloß durch Gleichung 3) bestimmt, sondern ihre Bedeutung geht bekanntlich darüber weit hinaus und ist auch noch für solche Elektrolyten vorhanden, welche Ausnahmen von Gleichung 3) bilden.

Nicht nur die Summe $(u+v)$ dieser Constanten, sondern auch ihre Differenz $(u-v)$ hat für das elektrische Verhalten der Elektrolyten große Bedeutung. Diese Erscheinung ist es, welche eine (von der Arrhenius'schen Hypothese unabhängige) Erklärung fordert, welche ich im folgenden geben zu können glaube.

§. 14. Annahmen über den Zusammenhang der Eigenschaften a, b und $\varkappa$. Die Eigenschaften a und b sind, wie dies in §. 11 hervorgehoben wurde, jedenfalls abhängig von der Leitfähigkeit $\varkappa$, und da die Eigenschaften der verdünnten Lösungen additiven Charakter haben, dürfte diese Abhängigkeit von a, b und $\varkappa$ eine einfache lineare Beziehung sein.

Der Zusammenhang von a, b und $\varkappa$ soll nach folgenden Grundsätzen angenommen werden:

1. a, b und $\varkappa$ stehen in einer linearen Beziehung, was in der allgemeinsten Weise dadurch dargestellt werden kann, dass man die drei Größen a, b und $\varkappa$ als lineare Functionen weier Hilfsvariablen α und β darstellt.[1]

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \alpha + \beta \\ a &= m_1\alpha + m_2\beta \\ b &= n_1\alpha + n_2\beta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots 4)$$

2. Den constanten, von der speciellen Natur des Mediums unabhängigen Coefficienten $m_1 m_2 n_1 n_2$ muss die Bedingung auferlegt werden, dass das Kreuzgefälle der Eigenschaften a und b nicht identisch gleich Null sein darf.

[1] Es konnte in diesen Beziehungen das constante Glied, welches keine von den fünf Größen a, b, $\varkappa$, α, β enthält, überall weggelassen werden. Doch würde das Hinzufügen dieses Gliedes noch eine ganz nennenswerte Erleichterung mit sich bringen, nämlich die Bedeutung der Leitfähigkeit γ des reinen Wassers für das Folgende ganz herabsetzen, was möglicherweise auch das Richtige wäre, hier aber der Einfachheit wegen unterblieben ist.

Nun gilt nach Gleichung 4):

$$\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial x}=D\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial z}-\frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial \beta}{\partial x}\right), \qquad \ldots 5)$$

worin

$$D=\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Es darf also die Determinante D nicht verschwinden. Sonst ist den Coefficienten $m_1\, m_2\, n_1\, n_2$ keine Bedingung auferlegt, sie können ganz beliebig gewählt werden, z. B. alle positiv, oder alle numerisch gleich 1. Wegen der Beziehung 5), welche für Kreuzgefälle charakteristisch ist, erscheinen in der weiteren Rechnung überhaupt niemals mehr die Coefficienten $m_1\, m_2\, n_1\, n_2$ selbst, sondern nur ihre Determinante D.

Dies ist so günstig als möglich, weil es uns der Nothwendigkeit einer besonderen Wahl dieser Coefficienten ganz enthebt. Wir bleiben also auf ganz sicherem Boden. Gleichzeitig aber verlieren wir die Vortheile einer freien Wahl dieser Coefficienten. Es bleibt uns also überhaupt keine freie Annahme, und wir stehen vor einer scharfen Probe der Richtigkeit des Weges, auf welchem wir uns befinden.

3. Es handelt sich nun nur mehr um die richtige Annahme der Hilfsvariablen α und β. Es muss α nur von der Basis, β nur von der Säure abhängen, damit der additive (Ostwald) Charakter der Eigenschaften a, b und $\varkappa$ überhaupt in die Rechnung eingeführt wird.

Es soll jedoch die Abhängigkeit der Hilfsvariablen α von der Natur der Basis, sowie die Abhängigkeit der Hilfsvariablen β von der Natur der Säure genau die gleiche Form haben, so dass weder die Basis noch die Säure einen specifischen Vorzug erhält. Dann muss, damit die Kohlrausch'sche Gleichung 3) erfüllt ist, gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \eta u + {}^1/_2\gamma \\ \beta &= \eta v + {}^1/_2\gamma.\end{aligned}\right\} \qquad \ldots 6)$$

Man kann sicher sein, dass durch die Annahmen Gleichung 4) und Gleichung 6) die Säure von der Basis nicht

im mindesten willkürlich unterschieden ist, besonders nicht in Hinsicht auf das Vorzeichen willkürlich unterschieden ist. Sämmtliche Größen in Gleichung 4) und 6) können positiv angenommen werden.

Wenn nun doch aus diesen Annahmen der charakteristische elektrochemische Vorzeichenunterschied der Säure und Basis hervorgeht, so liegt derselbe schon in der Gleichung I) und ist also durch die Annahme der elektromotorischen Wirkung der Kreuzgefälle erklärt, denn diese Wirkung der Kreuzgefälle wurde in §. 1 bis 11 ohne Rücksicht auf dieses entgegengesetzte elektrochemische Verhalten der Säure und Basis abgeleitet, und die Gleichung I) gilt auch für ein viel größeres Gebiet als jenes der elektrolytischen Erscheinungen.

Eine äquivalente Leistung hat die Arrhenius'sche Theorie nicht aufzuweisen. Von dieser wird der elektrochemische Vorzeichenunterschied der Säure und Basis nicht erklärt, sondern von Anfang an angenommen, dass das Kation eine positive, das Anion eine negative Ladung hat, und dass diese Ionen diese entgegengesetzten Ladungen bei ihrer Lösung stets annehmen, ohne dass hiefür eine Erklärung gegeben wird.

§. 15. Annahmen über die Änderung des Mediums in der Oberflächenschichte. Da durch die Gleichungen 4) und 6) die Variablen a, b und $\varkappa$ auf die Variablen η und γ zurückgeführt sind, kommt es also nur darauf an, nach welchem Gesetze sich die Concentration η und die Leitungsfähigkeit γ des reinen Wassers in der Oberflächenschichte ändern. Wir nehmen

4. an, dass dieses unbekannte Gesetz für η und γ dieselbe Form hat. Thatsächlich ändert sich in der Normalen der Oberflächenschichte die Concentration η von dem Werte $\eta = \eta_0$, welchen sie auf der inneren Seite der Oberflächenschichte hat, bis zu dem Werte $\eta = 0$, welchen sie auf der äußersten Seite der Oberflächenschichte erreichen muss. Und ferner ändert sich die Leitfähigkeit γ des reinen Wassers von dem Werte $\gamma = \gamma_0$ auf der inneren Seite der Oberflächenschichte ebenfalls bis zu dem Werte $\gamma = 0$, welchen sie an der äußersten Seite der Oberflächenschicht erreichen muss.

Es ist also gestattet zu setzen:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\beta}{\beta_0}, \qquad \ldots 7)$$

welche Gleichungen sich auf irgend eine bestimmte Normale der Oberflächenschichte beziehen.

5. Über das unbekannte Gesetz, nach welchem sich die Concentration η in der Normalrichtung der Oberflächenschichte ändert, braucht keine Annahme gemacht zu werden, als die, dass längs der ganzen Oberfläche einer und derselben Flüssigkeitsmasse dieses unbekannte Gesetz dieselbe Form hat.

§. 16. Deductionen. *a)* Die elektromotorische Kraft der Concentrationsunterschiede. Wir sind nun in der Lage, die Potentialdifferenz, welche zwei einander berührende Lösungen eines Elektrolyten von verschiedener Concentration η_{01}, beziehungsweise η_{02} aufweisen, durch Integration der Gleichungen I) zu berechnen.

Wir beschränken der Einfachheit wegen die Rechnung auf eine inhomogene Lösung, deren Flächen constanter Concentration η_0 die Ebenen $x = \text{const.}$ sind und dessen cylindrische Oberfläche $z = \text{const.}$ auf diesen Ebenen senkrecht steht. Die Leitlinie dieses Cylinders, d. h. der Querschnitt der Lösung, kann beliebige Form haben.

Für $x < x_1$ soll die Concentration im Inneren der Lösung constant $= \eta_{01}$ sein, für $x > x_2$ soll sie constant $= \eta_{02}$ sein. Die Region des Concentrationsgefälles (die Diffusionsschichte) liegt also zwischen x_1 und x_2.

In den Flächen $x = \text{const.}$ ist die Concentration η_0 überall für $z < z_1$ constant. Dieses Gebiet heisst das Innere der inhomogenen Lösung. Für $z > z_2$, außerhalb der äußersten Oberfläche der Flüssigkeit, ist die Concentration gleich Null. Die Oberflächenschichte, in welcher die Concentration η von den Werten $\eta = \eta_0$, welche sie im Inneren hat, bis auf $\eta = 0$ abnimmt, liegt also zwischen z_1 und z_2. Die Dicke $(z_2 - z_1)$ dieser Schichte ist in Fig. 1 in übertriebenem Maße dargestellt.

In jenen Theilen der Oberflächenschichte, welche die Oberfläche der homogenen Theile der Lösung bilden (also für

$z_1 < z < z_2$ und $x < x_1$ oder $x > x_2$) haben die Eigenschaften der Flüssigkeit zwar ein Gefälle nach der z-Richtung, aber kein Gefälle nach anderen Richtungen. In der Region des Concentrationsgefälles im Inneren der Lösung (also für $z < z_1$ und $x_1 < x < x_2$) haben sie hinwieder nur ein Gefälle in der x-Richtung.

Ein Kreuzgefälle der Eigenschaften kann (wenn überhaupt) nur in jenem körperlichen Ringe der Oberflächenschichte vorhanden sein, welcher die Region des Concentrationsgefälles umschließt, also nur in dem Gebiete, welches von den Cylinderflächen $z = z_1$ und $z = z_2$, sowie von den Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ eingeschlossen wird (d. h. für $x_1 < x < x_2$

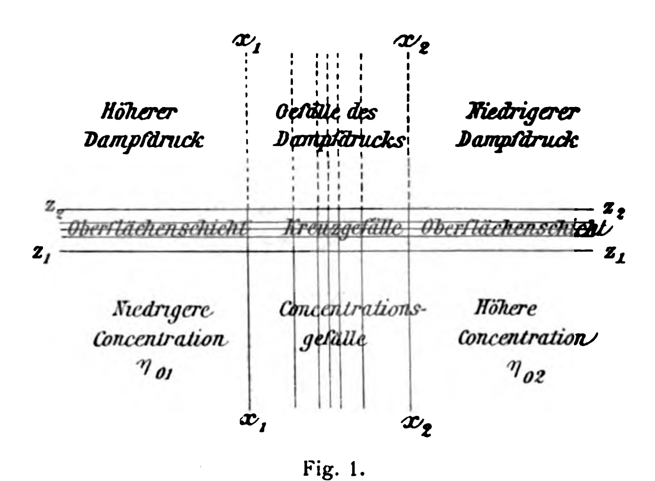


Fig. 1.

und $z_1 < z < z_2$). Nur in diesem körperlichen Ringe kann nach Gleichung I) der Quirl $\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ des Vectors X, Y, Z (dessen Linienintegral nach §. 3 die elektromotorische Kraft E ist) einen von Null verschiedenen Wert haben.

Die gesammte elektromotorische Kraft E, welche durch die Berührung der Lösungen von der Concentration η_{01} und η_{02} erweckt wird, bestimmt sich sonach durch das zwischen den angegebenen Grenzen genommene Integral:

$$E = \int_{x_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dx\, dz,$$

welches nach Gleichung I) und 5) folgende Gestalt hat:

$$E = CD\int_{x_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)dx\,dz.$$

Die Bedingung §. 15, Punkt 5, dass die Concentration η sich in jeder Normale der Oberflächenschichte nach demselben Gesetze ändert, lässt sich schreiben:

$$\frac{\partial\frac{\eta}{\eta_0}}{\partial x}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\eta}{\eta_0}\cdot\frac{\partial\eta_0}{\partial x},$$

worin η und η_0 auf dieselbe Normale bezogen ist, und wir haben nach Gleichung 6):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=u\,\frac{\eta}{\eta_0}\,\frac{\partial\eta_0}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}=v\,\frac{\eta}{\eta_0}\,\frac{\partial\eta_0}{\partial x}.$$

Nach Gleichung 7) haben wir ferner:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z}=\frac{\alpha_0}{\eta_0}\,\frac{\partial\eta}{\partial z}=\left(u+\frac{\gamma_0}{2\eta_0}\right)\frac{\partial\eta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial z}=\frac{\beta_0}{\eta_0}\,\frac{\partial\eta}{\partial z}=\left(v+\frac{\gamma_0}{2\eta_0}\right)\frac{\partial\eta}{\partial z}.$$

Hiemit ergibt sich:

$$E=\frac{\gamma_0}{2}\,CD(u-v)\int_{x_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{\eta}{\eta_0^2}\,\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial z}\,dx\,dz.$$

Dass die elektromotorische Kraft der Concentrationsunterschiede durch die Differenz $(u-v)$ der Hittorf-Kohlrausch-schen Constanten bestimmt wird, ist somit als eine directe Folge der elektromotorischen Wirkung des Kreuzgefälles zweier Eigenschaften a und b, welche mit der Leitfähigkeit $\varkappa$ verwandt sind, abgeleitet.

Wir können nun in der Gleichung 3) die Leitfähigkeit γ des reinen Wassers gegen den viel größeren Antheil $\eta(u+v)$

vernachlässigen, welchen der Elektrolyt zur Leitfähigkeit $\varkappa$ beiträgt und also

$$\varkappa = \eta(u+v)$$

setzen. Es darf deshalb aber nicht etwa γ an sich gleich Null gesetzt werden.

Setzen wir diesen Wert für $\varkappa$ ein, so erhalten wir:

$$E = \frac{\gamma_0}{2} CD \frac{u-v}{u+v} \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\eta_0^2} \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} dx dz,$$

und schließlich (da η_0 nicht von z abhängt und

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \eta}{\partial z} dz = \eta_0$$

ist) erhalten wir:

$$E = \frac{\gamma_0}{2} CD \cdot \frac{u-v}{u+v} \log \frac{\eta_{02}}{\eta_{01}}, \qquad \ldots a)$$

also denselben Ausdruck, welchen Nernst aus der Ionentheorie für die elektromotorische Kraft des Concentrationsunterschiedes $\eta_{02}-\eta_{01}$ abgeleitet hat.

Der constante Factor $\frac{\gamma_0}{2} D$ muss der absoluten Temperatur T ungefähr proportional sein. Es folgt dies aus dem II. Hauptsatze der Wärmetheorie, welcher nach Helmholtz zu der Gleichung

$$E - Q = T \frac{dE}{dT}$$

führt. Da die Wärmeproduction Q, welche bei der Mischung verschieden concentrierter Lösungen eines verdünnten Elektrolyten auftritt, gewöhnlich ganz vernachlässigt werden darf, muss

$$\frac{E}{T} = \frac{dE}{dT},$$

d. h. die elektromotorische Kraft E der Temperatur proportional sein. Setzen wir deshalb:

$$\frac{\gamma_0}{2} CD = BT, \qquad \ldots a')$$

so ist B für verdünnte Elektrolyten eine sowohl von ihrer speciellen Natur, als auch von der Temperatur unabhängige Constante.

§. 17. Deductionen. *b)* Die elektrische Kraft $X'Y'Z'$ in inhomogenen elektrolytischen Lösungen. Um diese zu berechnen, müssen wir nach §. 6 zunächst die Grenzbedingungen feststellen, welche die Tangentialcomponente des Vectors XYZ an der Oberfläche inhomogener Lösungen erfüllt. Die Stärke des Wirbels des Vectors XYZ in einer Zone der Oberflächenschichte, welche zwischen x und $x+\delta x$ liegt, beträgt nach Gleichung *a*), §. 16:

$$\delta E = BT \cdot \frac{u-v}{u+v} \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \delta x.$$

Dem Begriffe nach ist ferner:

$$\delta E = (X' - X_0) \delta x.$$

Bei letzterer Gleichung ist vorausgesetzt, dass die Dicke der Oberflächenschichte sehr klein ist, und dass in derselben der Vector XYZ keine ungemein hohen Werte annimmt, so dass jene Theile des Linienintegrals, welche die Oberfläche in der Normalrichtung durchsetzen, vernachlässigt werden konnten. Ferner bedeutet X_0 die Tangentialcomponente des Vectors XYZ an der inneren Seite der Flüssigkeitsoberfläche und X' die dort vorhandene elektrische Kraftcomponente. Diese ist nämlich der elektrischen Kraft X' an der äußeren Seite der Oberfläche gleich, weil die elektrische Kraft $X'Y'Z'$ die Maxwell'schen Grenzbedingungen erfüllt, und ferner ist außerhalb der Oberfläche (im Isolator) nach §. 2, Punkt 3 der Vector XYZ gleich der elektrischen Kraft $X'Y'Z'$. Es ist also berechtigt, dass wir in obiger Gleichung sofort statt des elektrischen Vectors X außerhalb der Flüssigkeit die elektrische Kraft X' im Inneren der Lösung gesetzt haben.

Letztere bestimmt sich sonach durch:

$$X' = X_0 + BT \frac{u-v}{u+v} \cdot \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \cdot \qquad \ldots b)$$

Man kann in derselben Weise statt an der freien Oberfläche der Flüssigkeit an der Oberfläche irgend eines im Inneren der Flüssigkeit gedachten Luftcanals (siehe §. 6) zeigen, dass die elektrische Kraft dieselbe Gleichung *b)* überall im Inneren der Lösung erfüllt. Für die auf dem Concentrationsgefälle senkrechten Componenten gilt:

$$Y' = Y_0 \quad \text{und} \quad Z' = Z_0.$$

$X_0 Y_0 Z_0$ sind die Componenten des Vectors XYZ im Inneren der Lösung. Bei ungeschlossenem Strome ist also $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$. Bei geschlossenem Strome entsprechen X_0, Y_0, Z_0 der Ohm'schen Gleichung.

Die Gleichung *b)* entspricht der Nernst'schen Gleichung für die in der Diffusionsschichte vorhandene elektrische Kraft.

§. 18. Deductionen. *c)* Das Hittorf'sche Überführungsgesetz. Das von Hittorf experimentell gefundene Überführungsgesetz beherrscht die ganze Gruppe der von Nernst behandelten Erscheinungen. Die Ionentheorie ist nur deshalb brauchbar, weil sie dem Hittorf'schen Gesetze angepasst ist. Wir werden weiter unten die Hittorf'sche Erscheinung in directer Weise erklären. Aber schon hier können wir das Hittorf'sche Gesetz aus dem bereits abgeleiteten Werte der elektromotorischen Kraft E der Concentrationsgefälle ableiten, also umgekehrt wie dies Nernst gethan hat (siehe §. 1).

Der osmotische Druck p hat den Wert

$$p = RT\eta,$$

worin R die Gasconstante ist. Die Arbeit δA die Salzmenge δS (gemessen in Grammäquivalent) aus einer Lösung von der Concentration η_{01} in eine solche von der Concentration η_{02} zu schaffen, beträgt also:

$$\delta A = \delta S . RT \log \frac{\eta_{02}}{\eta_{01}} \cdot$$

Wenn ein Strom von der Stärke J diese Arbeit in der Zeit δt leistet, so muss die Wärmeproduction in dem ganzen Stromkreise deshalb um den äquivalenten Betrag kleiner sein,

d. h. die gesammte elektromotorische Kraft des Stromkreises sich um den Betrag

$$E = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\delta A}{\delta t}$$

ändern. Diese gegenelektromotorische Kraft E ist nun nach Gleichung *a)* bekannt, man hat also

$$\delta A = JE.\delta t = JBT \cdot \frac{v-u}{u+v} \log \frac{\eta_{lo2}}{\eta_{lo1}} \delta t = \delta S.RT.\log \frac{\eta_{lo2}}{\eta_{lo1}}$$

und erhält endlich

$$\delta S = \frac{B}{R} \cdot \frac{v-u}{u+v} \cdot J\delta t. \qquad \ldots c)$$

Diese Gleichung entspricht dem Hittorf'schen Gesetze. Sie gibt an, dass die von dem Strome pro Secunde überführte Menge des Elektrolyten (in Grammäquivalent) nur von der Stromstärke und von der Differenz der Hittorf'schen Überführungszahlen

$$n = \frac{v}{u+v} \quad \text{und} \quad (1-n) = \frac{u}{u+v},$$

nicht aber von dem Concentrationsgefälle abhängt.

Die Constante $\frac{B}{R}$ muss also den Wert haben:

$$\frac{B}{R} = {}^1/_2 \nu, \qquad \ldots c')$$

worin ν das elektrolytische Äquivalent ist ($\nu = 0{\cdot}00001036$ Grammäquivalente pro 1 Ampèresecunde). Wenn nämlich 1 Grammäquivalent elektrolysiert wird, so verliert jeder Elektrodenraum deshalb $^1/_2$ Grammäquivalent.[1] Ferner werden aber $\frac{1}{2} \cdot \frac{v-u}{u+v}$ Grammäquivalent des Salzes aus dem Anodenraum in den Kathodenraum überführt. Der Anodenraum verliert also im Ganzen $\frac{u}{u+v}$, der Kathodenraum $\frac{v}{u+v}$ Grammäquivalente des Elektrolyten.

[1] Siehe hierüber §. 20.

III. Capitel.

Wirkung der Quellen der elektrischen Kraft.

§. 19. Wirkung der elektrischen Quellen. Bei einer theoretischen Untersuchung über die Kathodenstrahlen[1] habe ich die Überzeugung gewonnen, dass die Quellen und Sinkstellen der elektrischen Kraft eine Veränderung des Mediums bewirken können, und zwar ändert sich der Zustand σ der verdünnten Luft mit einer Geschwindigkeit, welche der Laplace'schen Function des Vectors $\sigma X'$, $\sigma Y'$, $\sigma Z'$ proportional ist:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \text{const.} \left(\frac{\partial \sigma X'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma Y'}{\partial y} + \frac{\partial \sigma Z'}{\partial z} \right).$$

Schon damals vermuthete ich, dass diese Erscheinung nicht auf die verdünnte Luft beschränkt sein dürfte. Thatsächlich bemerkt man die specifische Wirkung der elektrischen Quell- und Sinkstellen auch in allen Leitern, sowohl in Metallen, als in Elektrolyten.

In homogenen Leitern kann man diese Wirkung freilich nicht so deutlich erhalten, deshalb, weil man in ihnen stationäre Quellstellen der elektrischen Kraft nicht herstellen kann. Wenn jedoch ein stationärer Strom durch die Grenzfläche zweier verschiedener Leiter fließt, so erfüllt dort zwar der elektrische Vector $\varkappa X, \varkappa Y, \varkappa Z$, aber nicht der elektrische Vector $\sigma X'$, $\sigma Y'$, $\sigma Z'$ die Laplace'sche Gleichung, und es tritt dort je nach der Richtung des Stromes und der Natur der beiden Leiter eine Quellstelle oder Sinkstelle dieses letzteren Vectors auf. Thatsächlich bemerkt man an allen solchen stationär durchströmten Grenzflächen zweier Leiter energische Veränderungen des Mediums, deren Geschwindigkeit der ersten Potenz der Stromstärke proportional ist, und zwar treten 1. an der Grenzfläche zweier Leiter die Peltier'schen Wärmemengen, 2. an der Grenzfläche eines Metalles und eines Elektrolyten die elektrolytischen

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 104, S. 747 (Juli 1895); Wied. Ann., Bd. 57, S. 147 (1896).

Producte, und 3. in einem inhomogenen Elektrolyten Concentrationsänderungen zufolge der elektrischen Diffusion auf.

Diese drei Erscheinungen stehen also in einem wesentlichen Zusammenhange mit den Kathodenstrahlen, obwohl letztere ein so viel rascher verlaufendes Phänomen sind. Alle diese Erscheinungen werden bestimmt durch die specifische Wirkung der elektrischen Quellen, scalare Eigenschaften des Mediums der Zeit proportional zu verändern.

Ferner besteht aber auch eine bloß formale Analogie dieser Wirkung der elektrischen Quellen mit der Continuitätsgleichung der Hydrodynamik compressibler Flüssigkeiten. Wenn in einer solchen Quell-, respective Sinkstelle der Geschwindigkeit vorhanden sind, so findet an diesen Stellen eine der Zeit proportionale Änderung (der Dichte) des Mediums statt. Zufolge dieser formalen Analogie der oben angegebenen specifischen Wirkung der elektrischen Quellen mit dem Hauptgesetze der Strömung compressibler Flüssigkeiten kann man die angeführten vier elektrischen Erscheinungen auf hypothetische Strömungen von Eigenschaften oder Eigenschaftscomplexen in anschaulicher und formal richtiger Weise zurückführen, welche Strömungen dann mit einer überall dem elektrischen Vector $\sigma X'$, $\sigma Y'$, $\sigma Z'$ proportionalen Geschwindigkeit erfolgend gedacht werden müssen.

So durfte Kohlrausch das Peltier'sche Phänomen auf eine dem elektrischen Strome proportionale Strömung der Wärme zurückführen, Arrhenius und seine Vorgänger die elektrolytischen Ausscheidungen durch zwei entgegengesetzte Strömungen der Ionen erklären, endlich Hittorf die von ihm beobachteten Concentrationsänderungen als eine Überführung des Elektrolyten durch den Strom auffassen.

Diese Art der Darstellung der oben angenommenen specifischen Wirkung der elektrischen Quell- und Sinkstellen wird sogar vorgezogen werden, obgleich sie ein wenig mehr aussagt als nöthig ist, um die Beobachtungen vollkommen zu beschreiben, und zwar wird sie deshalb vorgezogen werden, weil die Producte der Wirkung der elektrischen Quellen, welche an der Grenzfläche zweier durchströmter Leiter auftreten, oft ponderable Substanzen sind.

§. 20. Vorläufige Mittheilung einer neuen Theorie der Elektrolyse. Die im vorigen Paragraph angenommene specifische Wirkung der elektrischen Quellen führt mit Nothwendigkeit zu einer wesentlich neuen Auffassung der Elektrolyse. Unmöglich kann das Auftreten des Anions, respective Kations eine directe Wirkung der an den Elektrodenflächen vorhandenen elektrischen Quellen sein, es gäbe sonst meiner Auffassung nach so viel voneinander specifisch verschiedene Wirkungen dieser elektrischen Quellen, als es verschiedene Ionen gibt.

Ich glaube vielmehr, dass die Elektrolyse ganz allgemein in nichts anderem besteht, als in dem Auftreten von Sauerstoff an der Anode und dem gleichzeitigen Verschwinden der gleichen Menge Sauerstoff an der Kathode.

Ein Strom von 1 Ampère produciert pro Secunde 0·00001036 Grammäquivalent Sauerstoff an der Anode und consumiert ebenso viel Sauerstoff an der Kathode, gleichgiltig welche Natur die leitende Flüssigkeit hat, wenn sie nur nicht metallisch ist.

Die Elektrolyse verdient hienach ihren Namen nicht, sie ist keine Zersetzung durch den Strom. Die Zerlegung des Elektrolyten in das Anion und Kation ist eine secundäre, rein chemische Reaction des durch die elektrischen Quellen an der Anode, beziehungsweise Kathode producierten, beziehungsweise consumierten Sauerstoffes.

Besonders wichtig ist die Anwendung dieser Theorie auf die Elektrolyse der Salze der Halogene Cl, Br, J.

Mit der Prüfung dieser neuen Theorie bin ich gegenwärtig beschäftigt. Hier beschränken wir uns auf die Betrachtung der specifischen Wirkung der elektrischen Quell- und Sinkstellen im Inneren inhomogener elektrolytischer Lösungen.

§. 21. Wirkung der Quellen des Vectors $\eta_0 X'$, $\eta_0 Y'$, $\eta_0 Z'$ im Inneren von Lösungen. Die specifische Änderung des Mediums, welche die elektrischen Quellen nach dem im §. 19 ausgesprochenen Principe bewirken, besteht in einer Änderung der Concentration η_0.

Es gilt das Gesetz:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = K\left(\frac{\partial \eta_0 X'}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0 Y'}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0 Z'}{\partial z}\right), \qquad \ldots \text{II})$$

worin $X'Y'Z'$ die elektrische Kraft und K eine von der Natur des gelösten Stoffes abhängende Constante ist.

§. 22. Die gewöhnliche Diffusion. Die nach Gleichung II) durch elektrische Wirkungen hervorgerufenen Änderungen $\frac{\partial \eta_0}{\partial t}$ der Concentration werden überdeckt durch die Concentrationsänderung, welche die gewöhnliche Diffusion bewirkt.

Diese Diffusion und alle anderen langsamen Ausgleichsvorgänge (Druckausgleich in Flüssigkeiten mit großem Reibungscoefficienten, Potentialausgleich in Halbleitern, Temperaturausgleich etc.) folgen bekanntlich Gesetzen von gleicher Form. Zwischen dem Coefficienten der inneren Reibung, der Wärmeleitungsfähigkeit und der elektrischen Leitfähigkeit bestehen ferner für verwandte Stoffe annähernde Proportionalgleichungen.

Uns interessiert hier die von Coleman, Long, R. Lenz und anderen untersuchte Beziehung, dass der Diffusionscoefficient der Salzlösungen der Leitfähigkeit $(u+v)$ ihrer Normallösungen annähernd proportional ist.

Man darf annehmen dass der Diffusionscoefficient sehr verdünnter elektrolytischer Lösungen von der Concentration η_0 unabhängig ist. Das Diffusionsgesetz lautet hienach:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = -K_1(u+v)\left(\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial z^2}\right), \qquad \ldots \text{III})$$

worin K_1 eine von der Natur des Elektrolyten unabhängige, jedoch mit der Temperatur wachsende Constante ist.

Es würde sich empfehlen, das Gesetz III) einer genaueren Prüfung zu unterwerfen für jene Salze, welche die Bedingung $u = v$ erfüllen, z. B. Kaliumchlorid, Rubidiumjodid, Natriumfluorid, Lithiumacetat, Silberchlorat etc., weil bei diesen nach Nernst die elektrische Diffusion nicht störend wirkt.

In Fig. 2 sind die Diffusionscoefficienten der Elektrolyte bei circa 10° C. als Function der Summe der Kohlrausch'schen

Coefficienten $(u+v)$ dargestellt. Die Werte der letzteren Coefficienten beziehen sich auf 18° C. Die Fig. 2 ist geeignet, die Sicherheit der Gleichung III) abzuschätzen. Die Diffusionscoefficienten sind wirklich mit einiger Annäherung dem Werte $(u+v)$ proportional, da sie ungefähr auf einer Geraden liegen, welche durch den Nullpunkt geht. Sie zeigen jedoch Abweichungen nach unten hin, welche am stärksten sind für die

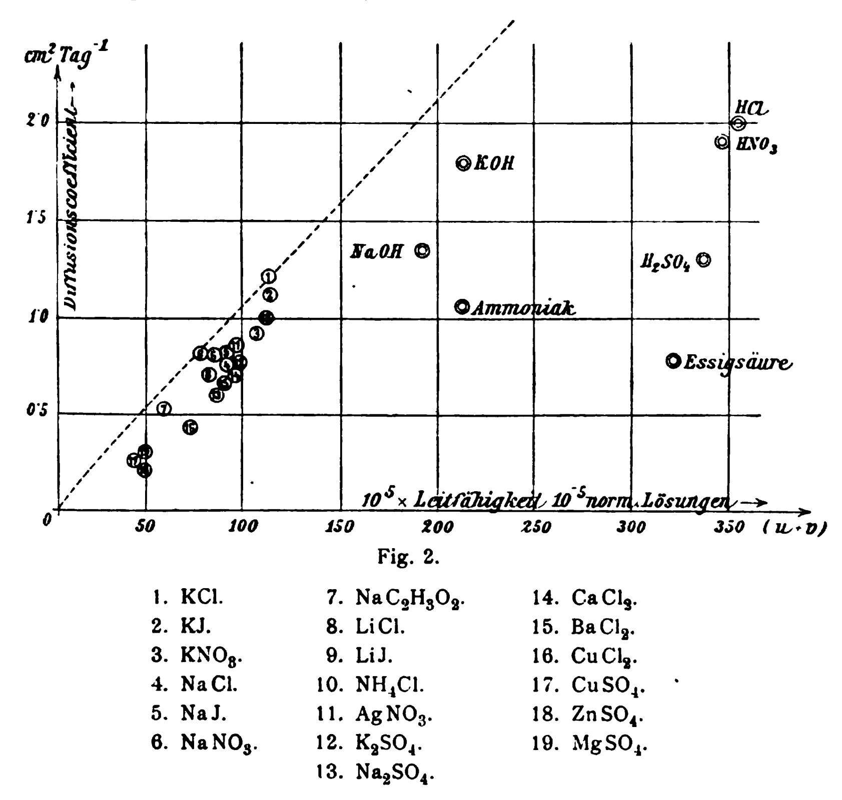


Fig. 2.

1. KCl.
2. KJ.
3. KNO_3.
4. NaCl.
5. NaJ.
6. $NaNO_3$.
7. $NaC_2H_3O_2$.
8. LiCl.
9. LiJ.
10. NH_4Cl.
11. $AgNO_3$.
12. K_2SO_4.
13. Na_2SO_4.
14. $CaCl_2$.
15. $BaCl_2$.
16. $CuCl_2$.
17. $CuSO_4$.
18. $ZnSO_4$.
19. $MgSO_4$.

Säuren und Laugen. Es ist die Idee von Nernst, dass diese Abweichung elektrische Ursache hat, weil sie am größten ist für jene Stoffe, für welche $(u-v)$ den größten Wert hat.

§. 23. Deductionen. *d)* Das Hittorf'sche Überführungsgesetz. Es wurde zwar bereits in §. 18 das Hittorf'sche Gesetz mit Hilfe des Energieprincips aus der elektromotorischen Kraft der Concentrationsgefälle abgeleitet. Doch ist hiemit das Erklärungsbedürfnis nicht befriedigt. Denn aus dem Energie-

principe kann man zwar die Größe der neu auftretenden Energie, aber nicht deren Wesen bestimmen. Man muss erst wissen, dass der Strom wirklich den Elektrolyten transportiert[1] und sonst keine Energieverwandlung bewirkt, dann kann man nach §. 18 die quantitative Form des Hittorf'schen Gesetzes ableiten. Es handelt sich also noch um die Angabe der Ursache, warum der Strom den Elektrolyten transportiert. Diese Ursache ist in Gleichung II), §. 21 ausgesprochen.

Setzen wir in Gleichung II) den Wert *b)* aus §. 17 für die elektrische Kraft X' ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = K\left(\frac{\partial \eta_0 X_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0 Y_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0 Z_0}{\partial z}\right) + $$
$$+ KBT\frac{u-v}{u+v}\left(\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial z^2}\right). \quad \ldots \text{II}')$$

Die Indices 0 bedeuten nichts anderes, als dass sich die Größen auf das Innere der inhomogenen Lösung beziehen. Die durch elektrische Wirkungen bestimmte Concentrationsänderung $\frac{\partial \eta_0}{\partial t}$ setzt sich also aus zwei Theilen zusammen. Der erste Theil ist Null, falls der Strom Null ist, weil der Vector $X_0 Y_0 Z_0$ dann nach §. 17 gleich Null ist. Der zweite Theil stellt also die bereits im stromlosen Zustande eintretende elektrische Diffusion dar.

Betrachten wir zunächst die Wirkung der Quellen des Vectors $\eta_0 X_0, \eta_0 Y_0, \eta_0 Z_0$ für sich. Diese ist nach Gleichung II'):

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = K\left(\frac{\partial \eta_0 X_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0 Y_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0 Z_0}{\partial z}\right).$$

Nun erfüllt dieser Vector allerdings oft die Laplace'sche Gleichung, so dass also $\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = 0$ wird. Doch tritt dies auch im stationären Falle nicht ein, wenn der Elektrolyt chemisch ungleichartig ist, z. B. in der Übergangsschichte der Lösung

[1] Nach der Ionentheorie soll ja überhaupt nicht der unzersetzte Elektrolyt nach einer Richtung, sondern die gelösten Ionen nach entgegengesetzten Richtungen vom Strome transportiert werden.

eines Salzes in die Lösung eines anderen Salzes, oder an der Grenze eines Elektrolyten gegen den metallischen Leiter. Es hat also Berechtigung, wenn wir obige Gleichung dahin deuten, dass in der Richtung x in der Zeit δt durch die Querschnittseinheit eine Salzmenge δS_x fließt, welche dem Vector $-\eta_0 X_0$ proportional ist, und ebenso für jede andere Richtung.

$$\delta S_x = -K . \eta_0 X_0 \delta t.$$

Wenn wir diese Gleichung auch für den stationären Fall gelten lassen und auch für den chemisch gleichartigen Elektrolyten, für welchen die Stromdichte

$$J_x = \eta_0 (u+v) X_0$$

ist, so erhalten wir

$$\delta S_x = -\frac{K}{u+v} \cdot J_x \delta t.$$

d. i. das Hittorf'sche Überführungsgesetz. Den quantitativen Wert der Constanten dieses Gesetzes kennen wir bereits aus §. 18, Gleichung *c)* und *c')*. Durch den Vergleich ergibt sich der Wert der Constanten K der Gleichung II):

$$K = \frac{1}{2} \nu (u-v). \qquad \ldots d)$$

§. 24. Deductionen. *e)* Das Nernst'sche Gesetz der elektrolytischen Diffusion. Betrachten wir hingegen den zweiten Theil der Concentrationsänderung, welcher nach Gleichung II') durch die Quellen der im stromlosen Zustande vorhandenen elektrischen Kraft $\eta_0 X'$, $\eta_0 Y'$, $\eta_0 Z'$ bewirkt wird, so haben wir unter Berücksichtigung von *d)*:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = \frac{1}{2} \nu B T \frac{(u-v)^2}{(u+v)} \left(\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial z^2} \right) \cdot \qquad \ldots II'')$$

Dass hier $(u-v)$ im Quadrat erscheint, stimmt damit überein, dass die Abweichung der Säuren und Laugen von dem Gesetze III (siehe Fig. 2) den gleichen Sinn hat, obwohl $(u-v)$ für Säuren positiv, für Laugen negativ ist.

Unter der Voraussetzung, dass das Gesetz III gilt und dass die Constante K_1 den Wert

$$K_1 = \frac{1}{2} \nu B T$$

hat, was freilich sehr zweifelhaft ist, kann man die durch gewöhnliche Diffusion bewirkte Concentrationsänderung in der Form schreiben:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nu B T (u+v) \left(\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial z^2} \right) \cdot \qquad \ldots \mathrm{III}')$$

Addiert man die beiden Concentrationsänderungen II′) und III′), wobei noch die Beziehung *c′)*, §. 18, berücksichtigt werden kann, so erhält man die ganze durch die elektrische und die gewöhnliche Diffusion bewirkte Concentrationsänderung:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} = -\nu^2 R T \cdot \frac{uv}{u+v} \left(\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial z^2} \right), \qquad \ldots e)$$

d. i. die Nernst'sche Form für den Diffusionscoefficienten elektrolytischer Lösungen, welche jedoch ebenso wie die Gleichung III), §. 22, vorläufig nur in den Hauptzügen verlässlich ist.

IV. Capitel.

Der osmotische Druck.

§. 25. Die Oberflächenspannungsreihe. Schon Laplace nahm an, dass auch an ebenen Flüssigkeitoberflächen eine beträchtliche Oberflächenspannung K vorhanden ist. Dieser möchte ich noch eine weitaus höhere Bedeutung beilegen, als dies bisher geschehen ist.

Schichtet man in einem U-Rohre mit zwei weiten Schenkeln zwei verschiedene Flüssigkeiten übereinander, so stellen sich die Niveauhöhen nach Maßgabe der specifischen Gewichte ein. Man erkennt dabei keinen Einfluss der Oberflächenspannung K. Ist eine Spannung ebener Oberflächen also überhaupt vorhanden, so ist sie an der Grenzfläche zweier Flüssigkeiten gleich der algebraischen Summe der Oberflächenspannungen der beiden Flüssigkeiten gegen Luft.

Hieraus folgt: Die Oberflächenspannung K ebener Grenzflächen bestimmt sich durch die Differenz zweier Größen K_1 und K_2, von welchen jede nur von der Natur eines der beiden Stoffe abhängt, welche sich berühren.

Dieses Gesetz lässt sich für die Grenzflächen beliebiger Stoffe (fester, flüssiger und gasförmiger) aufrecht erhalten, ist übrigens selbstverständlich und allgemein angenommen. Uns interessieren hauptsächlich die Ausnahmen von diesem Gesetze, wovon jedoch erst weiter unten die Rede sein soll.

Man erkennt leicht die formale Ähnlichkeit dieses Gesetzes mit dem Gesetze der elektromotorischen Spannungsreihe für Metalle.

§. 26. Identität der Spannung ebener Oberflächen, des Gasdruckes und des osmotischen Druckes. Da es nur auf die Differenzen der den verschiedenen Stoffen zugehörigen Constanten K_1, K_2 ankommt, so können wir diese Constante für das Vacuum gleich Null setzen. Fragen wir, wie groß dann die Constante K_1 für Quecksilber ist, so können wir darüber bekanntlich keine experimentelle Entscheidung treffen, obwohl sie doch einen ganz bestimmten Wert besitzen muss, der auch bereits auf theoretischem Wege zu ermitteln versucht wurde. Ebenso können wir die Constante K_1 weder für irgend eine andere Flüssigkeit, noch für einen festen Körper direct bestimmen.

Gebrauchen wir nun aber irgend ein Flüssigkeitsmanometer (oder auch ein Aneroid), so können wir uns sofort überzeugen, dass die Constanten K_1 sämmtlicher Gase einfach jene Größen sind, welche man Gasdrucke nennt, und welche durch die Gasdichte und Temperatur in der bekannten Weise bestimmt sind.

Der Gasdruck ist nur eine Theilerscheinung der Spannung K ebener Oberflächen. Er kann von ihr nicht getrennt werden, wenn man sich nicht von hypothetischen Vorstellungen bestimmen lassen will. Das Gleiche gilt von dem osmotischen Drucke.

Eine Möglichkeit, die Constanten K_1 auch für Flüssigkeiten experimentell zu bestimmen, würde z. B. dann vor-

handen sein, wenn es richtig wäre, dass die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit in einer unendlich dünnen Capillare nicht negativ unendlich, sondern gleich Null ist, was ich zwar vermuthe, aber nicht bestimmt behaupten will. In diesem immerhin möglichen Falle würde sich zeigen, dass die capillare Steighöhe bei Abnahme des Durchmessers der Capillare nicht bis ins Unendliche steigt, sondern sich einem Grenzwerte nähert. Der Druck der bei diesem Grenzwerte der capillaren Steighöhe gehobenen Flüssigkeitssäule ist dann nichts anderes als die Constante K_1, d. h. die Spannung einer ebenen Oberfläche dieser Flüssigkeit (bezogen auf $K_2 = 0$ für das Vacuum).

§. 27. Capillare Wirkung der Grenzringe. Die Grenzringe, in welchen die Oberfläche einer benetzenden Flüssigkeit die Wand des Gefäßes trifft, haben formal eine ähnliche Bedeutung wie die in Capitel I und II behandelten elektromotorischen Grenzringe. Sie bewirken eine Abweichung von dem Gesetze der Oberflächenspannungsreihe (§. 25), was unter anderem die capillaren Steighöhen und die Randwinkel erkennen lassen. Die in Capitel I und II begonnene Untersuchung der elektromotorischen Wirkung der Oberflächenschichte der Flüssigkeiten lässt sich vielleicht in ähnlicher Form auf die capillare Wirkung der Grenzringe, in welchen die Oberfläche einer Flüssigkeit die Wand des Gefäßes trifft, wiederholen. Es scheint sogar ein sachlicher Zusammenhang zwischen diesen zwei Wirkungen jener Grenzringe, in welchen Kreuzgefälle vorhanden sind, zu bestehen. Es folgt dies aus den elektrocapillaren Erscheinungen, ferner aus manchen Beziehungen des osmotischen Druckes zu elektrolytischen Erscheinungen. Doch kann ich mich dieser Frage gegenwärtig nicht annehmen.

§. 28. Die semipermeablen Membranen. Eine weitere Ausnahme von dem Gesetze der Oberflächenspannungsreihe (§. 25) bilden die semipermeablen Grenzflächen zwischen zwei Flüssigkeiten, und ich halte es für die Wirkung dieses Umstandes, dass die osmotische Niveaudifferenz oder Druckdifferenz sich einstellt.

Die osmotische Druckdifferenz ist gleich der algebraischen Summe der drei Laplace'schen Constanten K

(§. 25) der zwei Flüssigkeitsoberflächen und der semipermeablen Grenzfläche.

Würde ferner der Satz Geltung haben, dass die Laplace'sche Constante K für die Grenzfläche zweier Flüssigkeiten gerade Null ist, wenn diese Grenzfläche eine semipermeable Membran ist, so wäre die osmotische Druckdifferenz gerade gleich der Differenz der beiden Constanten K_1 der zwei Flüssigkeiten (siehe §. 26, Schluss). Doch kann ich diese letztere, ganz einfache Beziehung nicht bestimmt behaupten.

§. 29. Die van t'Hoff'schen Gesetze des osmotischen Druckes. Jene Componente der Oberflächenspannung K, welche man den Gasdruck nennt, zeigt bekanntlich ein sehr einfaches additives Verhalten. So ist der Gasdruck eines Gemisches von Gasen gleich der Summe der Gasdrucke der Bestandtheile, sämmtlich auf dasselbe Volum bezogen. Für uns ist folgende einfach additive Beziehung von Wichtigkeit:

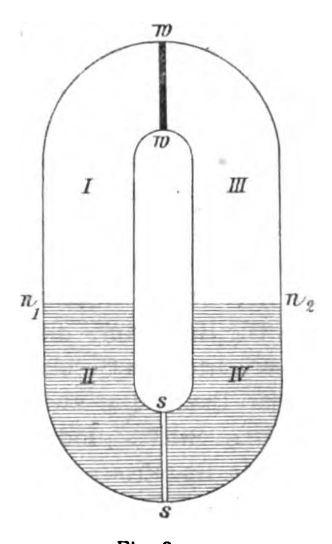


Fig. 3.

In eine ringförmig geschlossene Röhre (Fig. 3) sei eine Flüssigkeit bis zum Niveau $n_1 n_2$ eingefüllt, darüber ein beliebiges Gas. Nun bringt man bei ww in dem Gase eine undurchlässige feste Querwand an; sodann bringt man bei ss in der Flüssigkeit eine semipermeable Membran an. Beides stört das Gleichgewicht nicht.

Nun vergase man irgend einen Stoff S (für welchen die Membran ss nicht permeabel ist) in dem Raume III. Sofort ändert sich die Laplace'sche Constante K des Niveaus n_2 (anders ausgedrückt: es äußert sich der Gasdruck des Stoffes S), und es müsste die Flüssigkeit durch die Membran s aus dem Raume IV in den Raum II getrieben werden.

Wenn wir statt den Stoff S in dem Raume III zu vergasen, ihn in der Flüssigkeit des Raumes IV lösen, so ändert sich

ebenfalls die Laplace'sche Constante K des Niveaus n_2 (anders ausgedrückt: es äußert sich der osmotische Druck des Stoffes S). Diese Änderung hätte jedoch begreiflicherweise entgegengesetztes Vorzeichen wie die vorige, weil vorhin der Stoff S oberhalb, jetzt unterhalb des Niveaus n_2 vertheilt ist. Es dringt jetzt das Lösungsmittel aus dem Raume II in den Raum IV und die osmotische Niveaudifferenz stellt sich ein.

Wenn man jedoch gleichzeitig den Stoff S in dem Raume III vergast und ihn in genau derselben Dichte und womöglich in derselben allotropen Modification in dem Raume IV löst, so ändert sich die Laplace'sche Constante K des Niveaus n_2 nicht, und das Gleichgewicht bleibt bestehen. Diese einfache Beziehung enthält das wichtige Gesetz, welches van t'Hoff aus früheren Experimenten abgeleitet hat: dass der osmotische Druck eines gelösten Stoffes gleich groß ist wie der Gasdruck desselben Stoffes bei derselben Dichte und Temperatur.

Die Bedeutung dieses (an sich nur mühsam experimentell zu verwertenden Gesetzes) für die Chemie erkannte van t'Hoff in der Beziehung zwischen dem osmotischen Drucke eines gelösten Stoffes und dem Dampfdrucke des Lösungsmittels. Es müssen bekanntlich die Dampfdrucke des Lösungsmittels zweier verschiedener Lösungen in demselben Lösungsmittel sich um einen Betrag unterscheiden, welcher genau gleich ist dem Bodendrucke der Dampfsäule von der Höhe der osmotischen Niveaudifferenz, sonst wäre ein perpetuum mobile möglich.

Mit Hilfe der Clausius'schen Gleichung kann man außerdem diese Dampfdruckerniedrigungen durch die bequeme Beobachtung der Siedepunktserhöhungen, Gefrierpunktserniedrigung etc. bestimmen. Das von Raoult experimentell gefundene Gesetz der Dampfdruckerniedrigungen kann man in folgender Form aussprechen: Die Dampfdruckerniedrigung verhält sich zu dem ganzen Dampfdrucke des Lösungsmittels wie die wahre Dichte des gelösten Stoffes in der Lösung zu der wahren Dichte des Lösungsmittels, beide Dichten in Grammäquivalent pro Cubikcentimeter, ausgedrückt.

Dieses Gesetz stimmt mit den von van t'Hoff aufgestellten Gesetzen überein. Man kann also den osmotischen Druck eines gelösten Stoffes in einwurfsfreier, wenn auch nicht directer Weise aus der Siedepunktserhöhung oder Gefrierpunktserniedrigung berechnen.

Hiebei hat sich gezeigt, dass der osmotische Druck der sehr verdünnten elektrolytischen (Arrhenius) Lösungen doppelt (seltener dreimal) so groß ist, als nach dem van t'Hoff'schen Gesetze zu erwarten war. Dies veranlasste Arrhenius zu der Annahme, dass die Elektrolyten in verdünnter Lösung vollkommen dissociiert sind.

Dieser letzteren Annahme kann ich mich jedoch nicht anschließen. Da bei Annahme dieser Dissociation auch eine Ursache angegeben werden muss, warum die Ionen doch nur im stöchiometrischen Mengenverhältnisse auftreten, so ist man genöthigt, auch die Arrhenius'sche elektrostatische Ladung der Ionen anzunehmen, was meiner Ansicht nach dem voraussichtlichen Entwickelungsgange der theoretischen Physik nicht entspricht.

Die, wie ich glaube, wahre Ursache der scheinbaren Abweichung des osmotischen Druckes der verdünnten elektrolytischen Lösungen von dem van t'Hoff'schen Gesetze soll im folgenden eingehend erörtert werden.

§. 30. Das Gasvolumgesetz der chemischen Processe. In einer Jugendarbeit[1] bin ich zu einem Resultate gelangt, welches einer eingehenden Beachtung von Seite der theoretischen Chemiker nicht unwert gewesen wäre.

Es ist dies der Satz: Rein chemische Vorgänge ändern das Gasvolum nicht. Beziehen wir im folgenden die Gasvolume stets auf eine bestimmte Temperatur und einen bestimmten Druck, so können wir dieses neue Volumgesetz der chemischen Vorgänge in der Form aussprechen: Das Gasvolum des Verbindungsproductes AB ist (für rein chemische Vorgänge) stets gleich der Summe der Gasvolume der Bestandtheile A und B, nach der Formel:

$$1 \text{ Volum } A + 1 \text{ Volum } B = 2 \text{ Volume } AB. \quad \ldots \text{IV)}$$

[1] Versuch einer chemischen Theorie auf vergleichend-physikalischer Grundlage. Diese Sitzungsber., Bd. 101, S. 487 (1892).

Die Molecularhypothese erfordert hingegen als das Gesetz eines einfachen chemischen Vorganges, dass das Gasvolum des Verbindungsproductes höchstens gleich dem Gasvolum eines der Bestandtheile ist nach der Formel:

$$1 \text{ Volum } A + 1 \text{ Volum } B = 1 \text{ Volum } AB. \qquad \ldots \text{IV}')$$

Zwischen diesen beiden einander widersprechenden Volumgesetzen IV) und IV′) sollte man die Entscheidung nicht vom Standpunkte der Molecularhypothese, sondern nur an der Hand der Thatsachen treffen.

§. 31. Die Dimerie. Das Gasvolum der Verbindungsproducte ist thatsächlich sehr oft kleiner, jedoch in vielen Fällen so groß, als es das Gesetz IV) verlangt, es ist also in letzteren Fällen größer, doch in anderen Fällen so groß, als es das Gesetz IV′) verlangt.

Die Ursache, dass keines der beiden Gesetze ohneweiters mit der Erfahrung übereinstimmt, liegt darin dass das Volumgesetz der wahren chemischen Vorgänge in vielen Fällen überdeckt wird durch die Volumänderungen, welche eintretende Dimerisierungen (beziehungsweise deren Umkehrung: die Monomerisierungen) bewirken, durch welche bekanntlich das Volum eines Gases auf die Hälfte sinkt (beziehungsweise auf das Doppelte ansteigt).

Die Dimerie ist ein Vorgang, welcher zwischen den chemischen Vorgängen und der Condensation steht. Mit letzterer hat die Dimerie alle Merkmale gemeinsam, mit den chemischen Vorgängen nur die Ganzzahligkeit der Volumgesetze.

Die chemischen Producte dimerisieren häufig unmittelbar nach ihrer Entstehung, ebenso wie sie häufig condensieren. Es ist jedoch schwierig, die zweifellos oft vorkommenden Volum-{Verkleinerungen / Vergrößerungen} auf {die Hälfte, / das Doppelte,} welche durch {Dimerisierung / Momomerisierung} veranlasst werden, als solche zu erkennen und von den wahren chemischen Vorgängen zu trennen. Daher kommt es, dass über das wahre Volumgesetz der chemischen Vorgänge überhaupt noch eine Discussion nöthig ist.

§. 32. Vergleich des neuen Volumgesetzes IV) mit dem alten Volumgesetze IV′). Da das Volum des Verbindungsproductes oft kleiner ausfällt, als es das neue Gesetz IV) fordert, so ist es nöthig, anzunehmen, dass das Verbindungsproduct oft sofort nach seiner Entstehung dimerisiert.

Als Beispiel diene das Ammoniak. Dieses hat nach dem neuen Systeme die Formel $[NH_2]$, wobei die eckige Klammer andeutet, dass es in dimerem Zustande befindlich ist. Das Ammoniak bildet sich hienach aus dem natürlichen Stickstoffgase (neue Formel N) und Wasserstoffgase (neue Formel H) durch folgende Einzelprocesse:

$N + H = NH$	1 Vol. N + 1 Vol. H = 2 Vol. NH
$NH + H = [NH_2]$	2 Vol. NH + 2 Vol. H = 4 Vol. NH_2
	4 Vol. NH_2 = 2 Vol. $[NH_2]$.

Im Ganzen also ergibt sich:

1 Volum N + 3 Volum H = 2 Volum $[NH_2]$.

Einfache Reactionen nach dem neuen Systeme sind beispielsweise:

Stickoxyd: 1 Volum N + 1 Volum O = 2 Volum NO.
Salzsäure: 1 Volum H + 1 Volum Cl = 2 Volum HCl.

Hier sind also die entstehenden Producte nicht dimer und zeigt sich das reine Volumgesetz IV). Thatsächlich sieden Stickoxyd und Salzsäure bei so niedriger Temperatur, dass nicht zu erwarten ist, dass sie bei gewöhnlicher Temperatur noch in dimerem Zustande sich befinden.

Anders bei folgenden Processen:

Schwefelchlorür: 1 Volum S + 1 Volum Cl = 1 Volum [SCl].
Quecksilberjodid: 1 Volum Hg + 1 Volum J = 1 Volum [HgJ].
Cadmiumchlorid: 1 Volum Cd + 1 Volum Cl = 1 Volum [CdCl].

Diese Verbindungen sollen also nur in dimerem Zustande bekannt sein, und thatsächlich sind es hochsiedende Stoffe.

Die Annahme der Dimerisierung des Verbindungsproductes, welche nach dem neuen Volumgesetze IV) oft nothwendig und immer hinreichend ist, ist stets eine ganz zulässige und

natürliche. Das durch das Gesetz IV) bedingte neue chemische System würde viel einfachere und natürlichere Formeln als die jetzt gebräuchlichen bedingen.

Vergleichen wir hiemit das von der Molecularhypothese geforderte Volumgesetz IV').

Dasselbe stimmt für die einfachen Verbindungen HCl, NO etc. nicht, was man seit Gay-Lussac wusste. Sonst kannte man wenig Dampfdichten von Elementen und konnte deshalb das Gasvolumgesetz IV') nicht controlieren.

1. Als nun Dumas die Dampfdichten zahlreicher Elemente bestimmte, ergaben sich fast alle doppelt so groß, als man thatsächlich nach dem Volumgesetze IV') erwartet hatte, und es bedurfte der unnatürlichen Avogadro'schen Hypothese (dass gewöhnlicher Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff in dimerem Zustande bekannt sind, in monomerem aber in Verbindungen eingehen), um den Widerspruch zu beseitigen. Die Dampfdichten aller Elemente stimmen hingegen mit dem Volumgesetze IV) ohne Zusatzhypothese überein.

2. Als man dann die Dampfdichten höherer Verbindungen, des Salmiaks, Chloralhydrats etc. bestimmte, ergaben sie sich fast sämmtlich halb so groß, als sie nach dem Gesetze IV'), d. h. wieder gerade so groß, wie sie nach dem Gesetze IV) sein sollen. Um diesen Widerspruch zu beseitigen, hält man diese Dämpfe für dissociierte Verbindungen. Es bedeutet dies beinahe eine contradictio in adjecto. Denn der Salmiakdampf ist nach Deville noch bei einer weit höheren Temperatur beständig als der Zersetzungstemperatur des Ammoniaks; dem Dampfe des Chlorhydrates kann man durch schwache Trockenmittel kein Wasser entziehen etc.

3. Als endlich durch Raoult und van t'Hoff die osmotischen Drucke der verdünnten elektrolytischen Lösungen bekannt wurden, ergaben sie sich wieder fast sämmtlich doppelt so groß, als man trotz aller üblen Erfahrungen mit dem Volumgesetz IV') erwartet hatte. Hier musste Arrhenius mit der Hypothese der elektrolytischen Dissociation über den Widerspruch helfen.

Ich zweifle sonach nicht, dass das von mir aufgestellte Volumgesetz IV) das richtige ist, und dass das alte Volumgesetz IV') unhaltbar ist. Man müsste geradezu sanguinische Hoffnungen in Bezug auf die wahre Existenz der Atome haben, um das neue Volumgesetz IV) a limine abzulehnen.

§. 33. Dimerie der Elektrolyten in concentrierten Lösungen. Die verdünnten Lösungen der Elektrolyten zeigen den nach dem neuen Volumgesetze IV) zu erwartenden normalen osmotischen Druck.

In verdünnter Lösung stellen sonach die Elektrolyten ganz einfache monomere Verbindungen zweier Bestandtheile vor, von welchen der eine oxydierbar, der andere reducierbar ist.

In concentrierteren Lösungen wird der osmotische Druck kleiner, als ihn das Gesetz IV) fordert, weil ein Bruchtheil des Elektrolyten in der dimeren Modification auftritt, welche so wenig leitungsfähig ist wie die meisten anderen Stoffe, z. B. organische Stoffe.

Von der Arrhenius'schen Theorie acceptiere ich also immerhin die wichtige Bemerkung, dass der Elektrolyt in concentrierteren Lösungen in zwei verschiedenen Modificationen vorhanden ist, von welchen in verdünnten Lösungen jene vorwiegt, deren osmotischer Druck doppelt so groß ist, als man erwartet hatte, und welche allein leitungsfähig und elektrolysierbar ist.

Über explosive Gasgemenge

(III. Mittheilung über die Entzündlichkeit von dünnen Schichten explosiver Gasgemenge)

von

F. Emich.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. März 1900.)

Durch die bisherigen Versuche[1] ist festgestellt worden, dass wir in der Dicke derjenigen Schichte, in welcher sich die Entzündung in einem explosiven Gasgemische eben noch fortpflanzen kann, eine Constante erblicken müssen, welche etwa wie die Entzündungstemperatur zur Charakteristik des betreffenden Gemenges dienen kann. Auch habe ich nachgewiesen, welchen Einfluss Druck, Temperatur und chemische Zusammensetzung auf den Verlauf des Phänomens ausüben, wobei sich u. a. herausgestellt hat, dass die Entzündlichkeit der Mischungen von Wasserstoff und Sumpfgas mit Sauerstoff oder von Wasserstoff mit Chlor immer dann am größten ist, wenn von dem schwereren Gemengtheil ein gewisser Überschuss vorhanden. Schließlich wurde auch gezeigt, dass sich die Zusammensetzung der leichtest entzündlichen Methan-Sauerstoffmischung in einfachster Weise aus den Daten berechnen ließ, welche für die Wasserstoff- und Kohlenoxydgemenge gefunden worden waren.[2]

---

[1] Monatshefte für Chemie, *18*, 6 und *19*, 299; diese Sitzungsber., *106*. II. b und *107*, II. b.

[2] Es erschien wünschenswert, wenn möglich, auch für andere Kohlenwasserstoffe analoge Verhältnisse nachzuweisen. Vorläufig sind Versuche mit Acetylen ausgeführt worden. Wegen der geringen Dicke von nur 0·10 *mm*

Die angedeuteten Beziehungen erweckten die Hoffnung, dass vielleicht noch weitere gefunden und damit eine Art Erklärung des Phänomens gegeben werden könnte. Herr Hofrath Prof. Boltzmann hatte die Güte, mir auf meine Bitte einige Unterredungen zu gewähren, in welchen mit Rücksicht auf diese Fragen hauptsächlich erörtert wurde, in welcher Richtung etwa fernere Versuche anzustellen wären. Es ist mir eine angenehme Pflicht, ihm für die Anregung und Belehrung herzlichst zu danken, die er mir gegeben hat.

I.

Vorerst sei die Frage berührt, ob die Beimischung von Sauerstoff zum Knallgas vielleicht durch eine Beeinflussung der Entzündungstemperatur eine günstige Wirkung auf die Entzündlichkeit dünner Schichten ausübt.

Die bisher über diesen Gegenstand bekannten Thatsachen lassen eine solche Vermuthung kaum angebracht erscheinen. Denn wenn wir die von Fr. Freyer und V. Meyer[1] bestimmten Entzündungstemperaturen mit den in den früheren Mittheilungen angegebenen Daten vergleichen, so zeigt sich kein Parallelismus:

Gasgemisch	Entzündungs-tempertur	Dicke der dünnsten entzündlichen Schichte[2]
Wasserstoffknallgas	518—606°	65
Chlorknallgas	240—270°	87
Kohlenoxydknallgas	650—730°	170
Methanknallgas	606—650°	82

(gegen 0·22 *mm* beim Wasserstoffknallgas), welche der dünnsten entzündlichen Schichte zukommt, sind die Resultate leider nicht so ausgesprochen wie bei den bisherigen Gemischen; trotzdem kann gesagt werden, dass die gewonnenen Zahlen dem in der II. Mittheilung angegebenen Gesetze nicht widersprechen. Es dürfte deshalb für Kohlenwasserstoffe allgemein gelten. — Noch sei ergänzend bemerkt, dass das Maximum der Entzündlichkeit bei den Wasserstoff-Sauerstoff-Mischungen, wie es scheint, nicht dem Gemenge genau gleicher Raumtheile zukommt, sondern einem an Wasserstoff etwas reicheren.

[1] B. d. D. ch. G., 1893, R. 134.

[2] Eine Einheit entspricht 0·003414 *mm*.

Ferner ist die Beimischung von Stickstoff, beziehungsweise von Sauerstoff, wie wir gesehen haben, von gänzlich verschiedener Wirkung auf die Entzündlichkeit; dieser erhöht, jener verringert sie, und zwar sehr wesentlich. Stellt man dem gegenüber, dass die Entzündungstemperatur des Knallgases nach Mitscherlich[1] und nach Mallard und Le Chatelier[2] von der chemischen Zusammensetzung nicht sonderlich abhängt, so erscheint der gedachte Einfluss noch unwahrscheinlicher.

Immerhin schien es der Mühe wert, von diesem Gesichtspunkte aus die Entzündungstemperaturen der Stickstoffknallgasgemische neu zu bestimmen, umsomehr, als derlei Versuche nach dem von V. Meyer und seinen Schülern ausgebildeten Verfahren noch nicht angestellt worden sind.

Über die Entzündungstemperatur der Mischungen von Wasserstoffknallgas mit Stickstoff (nach Versuchen von Heinrich Walland).

Victor Meyer'sche Explosions-»Kugeln« wurden erst mittels der Quecksilberluftpumpe evacuiert und hierauf mit dem zu untersuchenden Gasgemisch — dem Quecksilbergasometer entnommen — gefüllt, in ein Metallbad getaucht, dessen Temperatur sich auf thermoelektrischem Wege feststellen ließ, wobei ein Le Chatelier'sches Element (Platin — Platinrhodium) zur Anwendung kam, dessen elektromotorische Kraft nach der Compensationsmethode bestimmt wurde. Als Fundamentalpunkte dienten die Siedetemperaturen von Schwefel und Selen.

Zur Prüfung des Apparates wurde zuerst eine Versuchsreihe mit reinem Knallgas ausgeführt, bei welcher sich die Entzündungstemperatur zu 589° ergab. Die Resultate zeigten eine unerwartete Constanz innerhalb weniger Grade, doch kann leider nicht angegeben werden, ob ein »Zufall« oder ein experimentell zu beherrschender Anlass vorlag.

In analoger Weise wurden Mischungen von Knallgas mit Wasserstoff, mit Sauerstoff und mit Stickstoff behandelt, wobei

---

[1] B. B., *26*, 164.

[2] B. B., *16*, 216.

sich im letzteren Falle die Daten zur folgenden Tabelle ergaben. Zu den erforderlichen Gasanalysen diente der große Hempel'sche Apparat.

Versuchs-reihe	Volum-procente Stickstoff	Die Entzündung trat ein	Die Entzündung blieb aus
		bei Graden Celsius	
1	10·6	565	—
2	16·3	565	560
3	21·9	569	560
4	32·7	547	543
5	34·4	554	—
6	34·4	556	554
7	44·4	581	577
8	46·7	—	600
9	54·5	614	—
10	55·2	617	609
11	63·3	600	—
12	71·4	615	608

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass ein Zusatz von Stickstoff die Entzündungstemperatur des Knallgases nicht wesentlich beeinflusst; immerhin wird sie zuerst ein wenig erniedrigt, später etwas erhöht; das Minimum liegt bei einem Gehalt von etwa dreißig Procenten.

Die Mischungen von Knallgas mit Wasserstoff oder mit Sauerstoff zeigten bei zunehmendem Gehalt an nicht verbrennendem Bestandtheil ein ähnliches Verhalten, indem sich die sauerstoffhältigen Gemenge zwischen 571° und 608° entzündeten, die wasserstoffhältigen zwischen 575° und 607°, wenn der Zusatz im ersten Falle von 27·9 bis 80·4%, im zweiten von 6·0 bis 67·7% schwankte. Leider reichen die bisher gewonnenen Daten zur sicheren Feststellung eines Gesetzes nicht aus.

All diese Verhältnisse zwingen zur Annahme, dass die Entzündungstemperatur in keine directe, geschweige

denn in eine einfache Beziehung gebracht werden kann zur Dicke derjenigen Schichte eines explosiven Gasgemisches, in welcher sich die Entzündung eben noch fortzupflanzen vermag.

II.

Die größere Entzündlichkeit von dünnen Schichten derjenigen Mischungen, welche reich an Sauerstoff sind, lässt sich mit dem geringeren Wärmeleitungsvermögen dieses Bestandtheiles in Zusammenhang bringen. Doch ergibt sich dabei insoferne eine Schwierigkeit, als man die Verdünnung mit dem im Überschusse zugesetzten Bestandtheile von der mit einem völlig indifferenten Mittel (wie Stickstoff) unterscheiden muss und zur Vorstellung veranlasst wird, dass jener Überschuss in irgendeiner Weise Antheil am Verbrennungsprocess nimmt.

Wir haben im Princip auf diesen Umstand schon in der zweiten Mittheilung hingewiesen, indem dort das Schema

$$\begin{matrix} H_2 & & O-\vdots-O & & H_2O & & O \\ & + & \vdots & = & & + & \vdots \\ H_2 & & O-\vdots-O & & H_2O & & O \end{matrix}$$

aufgestellt worden ist. Es ist auch schon bemerkt worden, dass es sich bei dieser Auffassung um eine Art von Sauerstoffentwickelung bei einem Reductionsprocesse handeln würde, d. h. um eine Reaction, welche der Einwirkung von Wasserstoff auf schwefelsaure Permanganatlösung an die Seite gestellt werden könnte.

Da sich bei unseren Versuchen das Chlorknallgas dem Wasserstoffknallgas analog verhält, so war die Frage naheliegend, ob sich vielleicht auch Chloride unter Chlorentwickelung mittels Wasserstoff reducieren lassen. Versuche solcher Art hat Herr Assistent Dr. V. v. Cordier ausgeführt. Er nahm hiebei zuerst Lösungen, welche neben einer größeren Menge freier Salzsäure noch MnO_2, Mn_2O_3, Mn_3O_4, $KMnO_4$, CrO_3 enthielten. Da dieselben aber zu rasch Halogen entwickelten, so wurden sie später durch solche von Co_3O_4 und AsH_3O_4 ersetzt. Das Resultat jedoch war stets dasselbe, negative: eine gegebenen

Falles eintretende Chlorentwicklung war nie wesentlich verschieden, wenn man einmal mit Wasserstoff, ein andermal mit Luft schüttelte. Auch die Anwendung von Hexachlorbenzol führte zu keinem positiven Ergebnisse. Man kann also in der angedeuteten Hinsicht vorläufig den Parallelismus, welcher bei den verbrennenden Gasgemischen besteht, im Verhalten der wässerigen Lösungen nicht wiederfinden.

III.

Wenn, wie oben angedeutet worden ist, der leichtere Zerfall der Sauerstoffmolecüle bei unserem Phänomen eine Rolle spielt, so ist von einem Zusatze von Ozon wohl ein besonders günstiger Einfluss auf die Entzündlichkeit dünner Schichten zu erwarten. Die folgenden Angaben bestätigen die Richtigkeit dieser Vermuthung.

Apparat. Eine elektrolytische Zelle I (U-Rohr nach Art der Zelle *B*, Fig. 2 der zweiten Mittheilung) lieferte einen Wasserstoff- und einen Sauerstoffstrom, welche getrennt mittels Schwefelsäure getrocknet wurden. Sollten sauerstoffreichere Mischungen verwendet werden, so ließ ich die erforderliche Menge des Gases aus einer anderen elektrolytischen Zelle II zum zweiten Strome hinzufließen. Der Sauerstoff passierte nach dem Trocknen eine Houzeau'sche Röhre,[1] welche aus einer verticalen, 1 *mm* weiten Glascapillare bestand. Die innere »Belegung« bildete ein 0·4 *mm* starker Platindraht (besser wie Al), die äußere eine Spirale aus 0·5 *mm* starkem Nickeldrahte. Die beiden Drähte wurden mit den Polen eines Inductoriums (Keiser & Schmidt, 8 *cm* Funkenlänge) verbunden. Die Röhre befand sich in einer weiteren (oben trichterartig gestalteten), welche circa 75 *cm* lang war und eventuell mit einer Mischung von fester Kohlensäure und Äther gefüllt werden konnte.[2] Der Apparat lieferte bei gewöhnlicher Temperatur Sauerstoff, der bis zu etwa **13%** ozonisiert war, unter Zuhilfenahme der Kältemischung ergab sich ein Ozongehalt von circa

[1] Chem. Centralblatt, *1872*, 242.

[2] Siehe Beill, Monatshefte für Chemie, *14*, 71.

30%. Der Sauerstoff passierte die Röhre mit einer Geschwindigkeit von etwa einem Cubikcentimeter in der Minute. Bei rascherem Strome nimmt der Ozongehalt ab. Leider behält die Houzeau'sche Röhre ihre anfängliche Wirkung nicht sehr lange, indem sich das Platin nach vier- bis sechsstündiger Benützung mit einer braunen Schichte (wohl Oxyd) überzieht, welche, wie es scheint, das Ozon durch »Contactwirkung« zerstört, respective die Ausbeute verringert. Wenn auch die ursprüngliche Beschaffenheit des Platins und damit die Wirkung der Röhre leicht wieder herzustellen ist, so liegt in der erwähnten Veränderung doch deshalb ein großer Übelstand, weil man gezwungen wird, die Leistungsfähigkeit des Apparates durch möglichst oft vorzunehmende Ozonbestimmungen zu controlieren.

Der ozonisierte Sauerstoffstrom trat schließlich mit dem Wasserstoff gemischt in die bekannte Explosionsröhre (Fig. 1 der zweiten Mittheilung).

Die Bestimmung der Zusammensetzung des Gasstromes geschah in einfacher Weise dadurch, dass ich die relative Stärke der beiden galvanischen Ströme (Zelle I und Zelle II) mittels eines astatischen Spiegelgalvanometers ermittelte, welches in entsprechende Zweigleitungen eingeschaltet werden konnte.[1]

Bei der Ozonbestimmung trat der aus dem Explosionsrohre kommende Gasstrom zuerst in ein mit Jodkaliumlösung beschicktes Absorptionsgefäß, dann in ein Messrohr. Die weiteren Einzelnheiten ergeben sich von selbst.

Die Bestimmung der Entzündlichkeit erfolgte in der bisher geübten Weise.

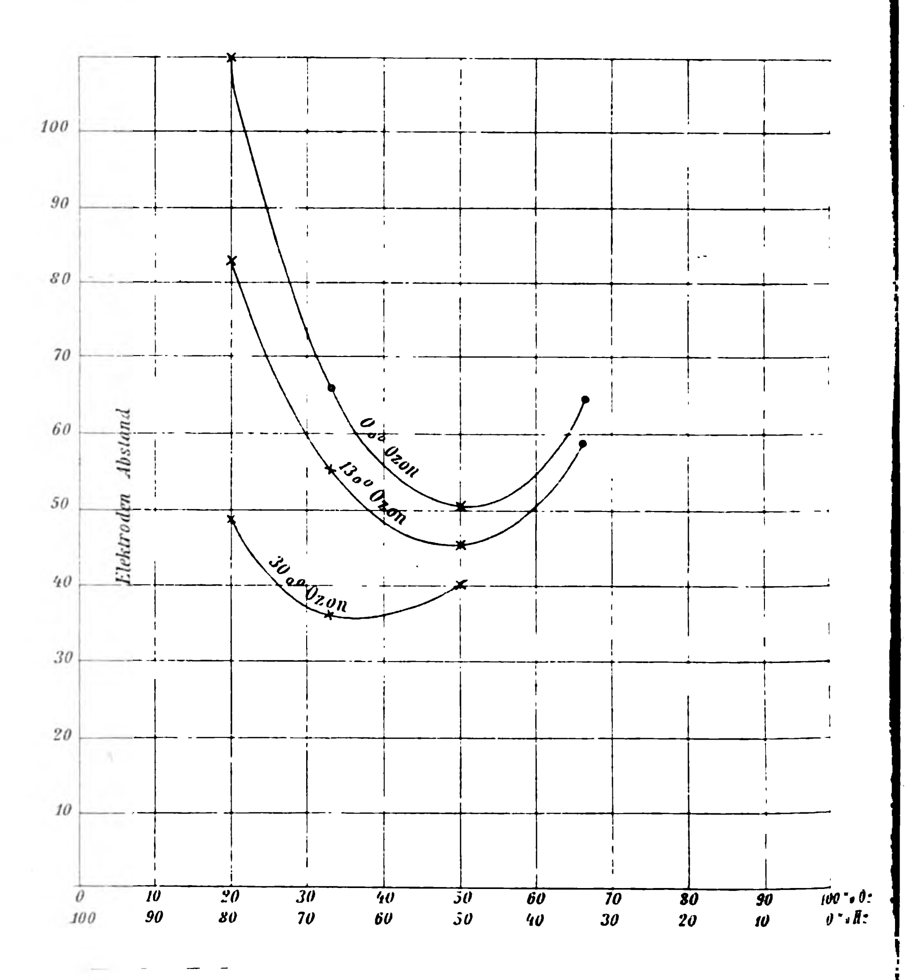
Die Resultate derjenigen Versuchsreihe, welcher ich das meiste Vertrauen schenke, sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten. In derselben bedeuten A_I und A_{II} die Galvanometerausschläge, welche den Intensitäten der galvanischen Ströme entsprechen (die Indices beziehen sich auf die Zellen). Die folgende Colonne enthält die daraus berechnete Zusammen-

[1] **Controle: In einem bestimmten Falle ergab sich durch die Galvanometerausschläge ein Gehalt von 50·8% Wasserstoff, während die Gasanalyse, mittels Hempels großem Apparate ausgeführt, die Zahl 50·6 lieferte.**

setzung des Gasstromes, wobei auf die durch die Ozonisierung herbeigeführte Contraction keine Rücksicht genommen worden ist, damit man die Resultate besser mit jenen der früheren Versuchsreihen vergleichen kann. Die nächste Colonne bringt die kürzesten Längen der zündenden Funken, d. h. die Dicke der dünnsten entzündlichen Schichte, ausgedrückt in dem bisherigen Maße, 1 Einheit = 0·003414 *mm*. Die letzte Colonne enthält den Gehalt des Sauerstoffes an Ozon, wieder ohne Rücksicht auf die Contraction (also in Gewichtsprocenten). »Oz« bedeutet, dass die Houzeau'sche Röhre in Thätigkeit war, und ein beigesetztes Sternchen, dass sie gekühlt wurde. Nach fünf bis sechs Explosionen wurde zur Controle des Apparates immer wieder die Entzündlichkeit gewöhnlichen Knallgases bestimmt, welche in Übereinstimmung mit Früherem Werte ergab, die 63 bis 65 Theilstrichen der Mikrometerschraube entsprachen.

Nr.		A_I	A_{II}	Zusammensetzung in Procenten		Elektrodenabstand	Ozongehalt
				Wasserstoff	Sauerstoff		
1	—	30	217			115	
2	—	30	214	19·7	80·3	113	
3	Oz	.	.			78	
4	Oz	.	.			.	13·4%
5	—	30·5	208·5			107	
6	—	30·5	208	20·2	79·8	107	
7	Oz*	30·2	210			48	
8	Oz*	.	.			47	
9	Oz*	66·5	209·5			36	
10	Oz*	67	210·2	32·7	67·3	35	
11	Oz*	.	.			.	29·0%
12	Oz*	137	132	50·4	49·6	40	
13	Oz*	.	.			.	32·0%
14	Oz	.	.			.	14·0%
15	—	28·2	211·5	19·1	80·9	115	
16	Oz	.	.			89	
17	Oz	66·8	211	32·5	67·5	55	
18	Oz	132	131·5			46	
19	Oz	132	131·5	50·0	50·0	45	
20	—	132	131·5			50	
21	Oz	.				.	11·7%

Werden die Zahlen in der in den vorigen Mittheilungen eingeführten Weise zur Construction von Curven benützt, so ergeben sich die folgenden Bilder, welche Wasserstoffsauerstoffmischungen entsprechen, deren Sauerstoff respective 0, 13 und 30 Gewichtsprocente Ozon enthält.[1]



[1] Die Curve, welche dem ozonfreien Knallgas entspricht, verläuft hier steiler wie die in der ersten Mittheilung enthaltene, was mit dem größeren Durchmesser der Wollaston'schen Elektroden zusammenhängt, der hier circa 6 *mm* betrug. Die Punkte ».« entsprechen Versuchsreihen, welche nicht angeführt worden sind.

Aus der graphischen Darstellung ist Folgendes zu entnehmen:

1. Das Ozon steigert die Entzündlichkeit dünner Knallgasschichten sehr bedeutend, z. B. ist ein Gemisch von etwa 40 Theilen Wasserstoff mit 60 Theilen 30procentigen Ozons fast doppelt so leicht entzündlich wie gewöhnliches Knallgas.

2. Das Maximum der Entzündlichkeit (Minimum des Elektrodenabstandes), welches bei den Wasserstoffsauerstoffmischungen etwa dem Gemenge gleicher Raumtheile zukommt, wird durch den Ozongehalt noch weiter zu Gunsten des Sauerstoffes verschoben, beim 30procentigen Ozon mag es jenseits von 60% Sauerstoff liegen.

Wir sehen also, dass dem Ozon gerade so wie dem gewöhnlichen Sauerstoff und dem Chlor eine specifische Wirkung bei dem Phänomen zukommt: dies geht namentlich daraus hervor, dass die Zunahme an Entzündlichkeit nicht allein auf die Zersetzungswärme des Ozons zurückgeführt werden kann, wie sich zeigt, wenn man die Entzündlichkeit des ozonisierten Knallgases mit derjenigen vergleicht, welche ein durch Compression entsprechend energiereicher gewordenes besitzen müsste. Wir wollen dabei einfachheitshalber annehmen, dass die Entzündlichkeit dünner Schichten dem Drucke vollkommen proportional sei.[1] Als Zersetzungswärme des Ozons ist der von Ostwald[2] als wahrscheinlichst angegebene Wert von 362 K für ein Molecül vorausgesetzt. Folgende Zusammenstellung enthält die näheren Daten (die Procentzahlen haben die Bedeutung von vorhin).[3]

---

[1] Vergl. die I. Mittheilung.

[2] Allgemeine Chemie, II, 48.

[3] Anmerkung während der Correctur. Nach der inzwischen erschienenen Mittheilung von O. Brunck, B. B. 1900, 1832 liefert die von mir angewandte und bisher im allgemeinen für einwandfrei gehaltene Methode der Ozonbestimmung — Einleiten des Gases in neutrale KJ-Lösung und Titrieren mit Thiosulfat — Zahlen, welche nur 50 bis 60% der wahren Werte entsprechen. Die Versuche bedürfen daher einer Überprüfung.



Gasgemisch		Ozongehalt	Verbrennungswärme pro Liter	Elektrodenabstand	
Sauerstoff	Wasserstoff			beobachtet	Aus der Verbrennungswärme berechnet
50	50	0	13 K	50	50
		13	13·8 »	45	47
		30	14·6 »	40	44
67	33	0	8·7 »	66	66
		13	9·7 »	55	59
		30	10·8 »	35	53
80	20	0	5·2 »	115	115
		13	6·3 »	89	95
		30	7·8 »	49	77

Als Grund für die günstige Wirkung des Ozons seien zwei (grundsätzlich identische) Vermuthungen aufgestellt. Es wäre möglich, dass die Gegenwart von freien Atomen, welche beim Zerfalle des Molecüls in größerer Menge auftreten dürften, den Verlauf der Verbrennungserscheinung so sehr beschleunigt oder dass die Reaction etwa im Sinne des Schemas

$$H_2 + O.O_2 = H_2O + O_2$$

1 Mol. : 1 Mol.

besonders leicht vor sich geht.

Die Gleichung erinnert insoferne an die beim nichtozonisierten Wasserstoffsauerstoffgemisch beobachteten Thatsachen, als hier auch das aus gleich viel Molecülen der beiden Art zusammengesetzte Gemisch in dünnster Schichte verbrennt. Aber auch mit dem Verhalten des Ozons als Oxydationsmittel überhaupt steht das Formelbild in Übereinstimmung.

IV.

Unter solchen Umständen erschien es wünschenswert, die Entzündlichkeit dünner Schichten an Zuständen zu studieren, in welchen wir eine größere Anzahl von freien Atomen annehmen.

Von den Mitteln, welche zu diesem Zwecke benützt werden können, sind im vorliegenden Falle einige durch die Natur der Sache ausgeschlossen. Vor allem die, welche z. B. bei der langsamen Oxydation des Phosphors etc. mitwirken; ebenso kann auch die Druckverminderung nicht in Betracht gezogen werden, da ihr ein besonderer (schon bekannter) Einfluss zukommt. (Sie dürfte bei den Versuchen von Mitscherlich[1] deshalb die Ursache der Herabsetzung der Entzündungstemperatur sein, weil sie die Bildung freier Atome begünstigt). Es bleiben also nur elektrische Schwingungen und Röntgenstrahlen übrig. Bei diesen sind chemische Wirkungen bisher fast noch nicht beobachtet worden, jene hingegen können, wie allgemein bekannt, nicht nur die Bildung zahlreicher Körper, wie Ozon, Ammoniak etc. aus ihren Bestandtheilen veranlassen, sondern sie haben auch noch in anderer Hinsicht vom chemischen Standpunkte Anlass zu interessanten Beobachtungen gegeben.[2]

Für die Versuche mit Röntgenstrahlen benützte ich ein Inductorium von 25 *cm* Schlagweite mit Deprez-Unterbrecher.[3] Die Röhren waren theils solche mit, theils solche ohne Antikathode;[4] sie wurden in die unmittelbare Nähe des Explosionsrohres gebracht, welches an passender Stelle ein circa 1 cm^2 großes Fenster aus paraffiniertem Kork oder Aluminiumblech hatte; dieses besaß im mittleren Theile eine Dicke von nicht ganz 0·2 *mm*.

Um elektrische Schwingungen auf das Knallgas einwirken zu lassen, wurde ein Explosionsrohr verwendet, an welchem beiderseits eprouvettenartige Gefäße angesetzt waren; dieselben enthielten Petroleum und in dieses eingesenkt die (kugelförmigen) Conductoren, welche mit der Lecher'schen oder der Tesla'schen Anordnung verbunden wurden. Im letzteren Falle

---

[1] B. B., *26*, 399.

[2] Hemptinne, Z. f. ph. Ch., *22*, 358; *23*, 483. — Kaufmann, daselbst, *28*, 673.

[3] Es stammte aus der Fabrik von Ernecke, Berlin und functioniert ausgezeichnet.

[4] Sie waren theils von Ernecke, theils von der Berliner Allg. Elektricitätsgesellschaft bezogen worden.

gelangte der eben erwähnte Inductor auch in Verbindung mit einem Wehnelt-Unterbrecher zur Anwendung.

Das Knallgas stand entweder unter gewöhnlichem oder unter vermindertem Drucke. Mittels der Teslaströme konnte es leicht zu schwachem Leuchten gebracht werden, ohne sich zu entzünden.

Trotz dieser mannigfachen Abänderungen blieben die Versuche stets von demselben negativen Erfolge begleitet, das Knallgas änderte seine Entzündlichkeit unter dem Einflusse der genannten Agentien nicht merklich.[1]

Dieses Resultat kann freilich ohne Weiteres auf die zu geringe Zahl von freien Atomen zurückgeführt werden, welche bei Anwendung von Röntgenstrahlen weniger als $\frac{1}{10^{12}}$, in Geißler'schen Röhren weniger als $\frac{1}{10^{9}}$ der Gesammtmenge betragen soll.[2]

V.

Es muss also vorläufig unentschieden bleiben, ob das überschüssig zugesetzte Chlor oder der überschüssig zugesetzte Sauerstoff wesentlich infolge ihres geringen Wärmeleitungsvermögens oder ob sie infolge der leichteren Dissociierbarkeit ihrer Molecüle günstig auf die Entzündlichkeit von dünnen Knallgasschichten einwirken oder ob noch andere Ursachen in Betracht kommen.

Wenn wir der Ansicht sind, dass die erste Auffassung allein nicht zur Erklärung der beobachteten Erscheinungen hinreicht, so liegt der Grund dafür vornehmlich in folgenden Momenten:

1. Trotz des verschiedenen Wärmeleitungsvermögens, welches Chlor und Sauerstoff besitzen, verhalten sich die beiden Wasserstoffmischungen insoferne analog, als die größte Entzündlichkeit annähernd dann erreicht wird, wenn die Menge

---

[1] Wenn ich das Mittel aus circa 20 Versuchen ziehe, so kommt allerdings dem von Röntgenstrahlen getroffenen Gas eine etwas größere Entzündlichkeit zu, aber der Unterschied (Elektrodenabstand 62·5 gegen 62·7 beim nicht leitenden Gase) ist so gering, dass er durch Versuchsfehler verursacht sein kann.

[2] Lehmann, Elektr. Lichterscheinungen, S. 129 und 213.

des Wasserstoffes die Hälfte der zur vollständigen Verbrennung erforderlichen beträgt.

2. Die Entzündlichkeiten der eigentlichen Knallgase (d. h. der vollständig verbrennenden Mischungen) und die der leichtest entzündlichen Mischungen stehen bei den beiden Gasgemengen in demselben Verhältnisse. Es wird durch die Zahlen

$$65 : 48 = 1 \cdot 35$$

und

$$87 : 63 = 1 \cdot 38$$

ausgedrückt. (Hiebei entspricht bekanntlich

65....der Entzündlichkeit des Wasserstoffknallgases,

87....der Entzündlichkeit des Chlorknallgases,

48....der Entzündlichkeit der leichtest entzündlichen $H_2 - O_2$-Mischung,

63....der Entzündlichkeit der leichtest entzündlichen $H_2 - Cl_2$-Mischung.)

An die Punkte 1 und 2 ließe sich die Vorstellung knüpfen, dass die Dissociationsverhältnisse für das Sauerstoffmolecül unter den hier bestehenden Bedingungen in der Knallgasflamme annähernd dieselben sind wie die für das Chlormolecül im verbrennenden Chlorknallgase.

3. Beim getrockneten Kohlenoxydknallgase vergrößert sich die Entzündlichkeit beträchtlich durch den Zusatz kleiner Wasserdampfmengen, welche vielleicht wohl die Dissociationsverhältnisse, nicht aber das Wärmeleitungsvermögen wesentlich beeinflussen können.

4. Ferner ist zu bedenken, dass sich die Zusammensetzung der leichtest entzündlichen Sumpfgas-Sauerstoffmischung aus den Daten leicht berechnen ließ, welche wir beim Kohlenoxyd- und beim Wasserstoffknallgase gewonnen haben. Dies könnte wohl kaum der Fall sein, wenn bei dem Phänomen wesentlich nur das Wärmeleitungsvermögen in Betracht käme.

5. Endlich sind noch die beim ozonhältigen Knallgase discutierten Resultate zu berücksichtigen, bei welchem die Zunahme an Entzündlichkeit größer ist, als man nach dem Energiewert erwarten würde.

Durch diese Auseinandersetzung sind übrigens auch die am Schlusse der vorigen Mittheilung angegebenen Reactionsschemen

$$\begin{array}{ccc} H_2O + O{-}O & & H_2O \quad O \\ & = & + \mid \\ H_2O + O{-}O & & H_2O \quad O \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} H \quad Cl{-}Cl & & HCl \quad Cl \\ \mid + & = & + \mid \\ H \quad Cl{-}Cl & & HCl \quad Cl \end{array}$$

bis zu einem gewissen Grade weiter begründet, denn in dem Augenblicke, in welchem man dem überschüssigen Sauerstoffe (oder Chlor) einen Antheil an der Reaction zuspricht, kommen die Dissociationsverhältnisse seines Molecüls in erhöhtem Maße in Betracht.

Indes kann die Rolle, welche irgendein Verdünnungsmittel spielt, gewiss auch noch in anderer Weise aufgefasst werden. Man könnte etwa Vorgänge in den Flammen annehmen, die durch die Bilder

$$O\,\boxed{H_2 + O} = O + H_2O \quad \text{oder} \quad H\,\boxed{OH + H} = H + H_2O$$

veranschaulicht werden und welche z. B. geeignet sind, die Analogie zwischen Flamme und elektrolytisch-dissociierter Lösung zum Ausdrucke zu bringen und an die Gegenwart von freien Atomen in den Flammen und Flammengasen zu erinnern, liegt doch hier wie dort das wesentliche Merkmal in einer enormen Beweglichkeit gewisser Complexe, ohne welche man sich z. B. die Bildung von salpetriger Säure, von Ozon, Cyan, Acetylen u. s. w. in den Flammen und viele andere Erscheinungen kaum erklären könnte.

Wenn wir bei unserem Phänomen das Hauptgewicht auf den leichten Zerfall der Sauerstoff-, beziehungsweise Chlormolecüle legen, so bleibt noch zu erklären, warum sonst der Wasserstoff, im Überschusse zugesetzt, einen günstigen, d. h. beschleunigenden Einfluss auf die Wasser-, beziehungsweise Salzsäurebildung ausübt. Man hat doch einen solchen

sowohl bei der Fortpflanzung der Flamme,[1] wie auch bei der Fortpflanzung der Explosionswelle[2] beobachtet.

Der Grund für diese Verschiedenheit kann vielleicht darin gefunden werden, dass unser Verbrennungsprocess wegen der abkühlenden Wirkung der Wollaston'schen Elektroden[3] bei einem Temperaturminimum vor sich gehen dürfte, für welches angenommen werden müsste, dass die Bedingungen für einen massenhaften Zerfall der Wasserstoffmolecüle noch nicht vorhanden sind.[4]

Allerdings besteht auch eine Reihe von Angaben, aus welchen man auf einen leichten Zerfall der Wasserstoffmolecüle schließen könnte. Wir erwähnen z. B. die Intensität des Dampfstrahlphänomens und die Ausführungen von Vaubel[5] und Sperber.[6] Für die Beschreibung der Erscheinungen, mit welchen wir uns in den vorliegenden Zeilen beschäftigen, wäre es sogar sehr bequem, den Wasserstoff gegenüber dem Chlor oder Sauerstoff völlig dissociiert anzunehmen: die Verbrennung würde dann in dünnster Schichte vor sich gehen, wenn die der atomistischen Zusammensetzung des Verbrennungsproductes entsprechende Anzahl Theilchen vorhanden wäre, d. h. bei den Gemengen

$H+Cl_2$	1 Vol. Wasserstoff + 2 Vol. Chlor	(1 Theilchen auf 1 Theilchen)
$H+H+O_2$ ..	1 » » + 1 » Sauerstoff	(2 » » 1 »)

Wenn man jedoch dem entgegenhält, dass z. B. bei der Einwirkung stiller elektrischer Entladungen auf Knallgas nur Ozon-, nicht aber Wasserbildung erfolgt,[7] oder dass umgekehrt Ozon auf fertigen Wasserstoff nicht einwirkt,[8] während »nascierender« Wasserstoff bekanntlich sehr reactionsfähig ist, so erscheint eine Annahme, welche den leichten Zerfall der Wasserstoffmolecüle zur Basis hat, höchst unsicher. Alle diese Überlegungen kranken eben an dem Übelstande, dass wir, wie mir Herr Prof. Boltzmann mittheilte und die ein-

[1] S. z. B. Michelson, Wiedemanns Annalen, *273* (1889), 1.

[2] Dixon, Z. f. ph. Ch., *12*, 141.

[3] Hiebei kommt wesentlich die Wärmeleitung (nicht -Strahlung) in Betracht, da berußte Elektroden wie blanke wirken.

[4] Nach Versuchen von M. Bodenstein (Z. ph. Ch., *29*, 628) wirkt bekanntlich ein Wasserstoffüberschuss beim Erhitzen von Knallgas auf die Temperatur von 572° C. beschleunigend auf den Process der Wasserbildung. Doch handelt es sich hier augenscheinlich um ganz andere Versuchsbedingungen, da die Vereinigung der Gase flammenlos erfolgt.

[5] Journ. f. prakt. Ch., [2], *55*, 546. — Vaubels Darlegungen haben bekanntlich mehrfachen Einwand erfahren.

[6] Z. f. anorg. Ch., *14*, 169.

[7] Berthelot, Compt. rend., *88*, 50; Dammer, anorg. Ch., I, 407.

[8] Schönbein, Dammer, anorg. Ch., I, 406.

schlägige Literatur[1] bestätigt, namentlich über die Dissociationswärme des Wasserstoffes nichts Bestimmtes wissen.

Durch das früher Gesagte soll natürlich nicht behauptet werden, dass die Wasserstoffatome bei der Verbrennung dünner Knallgasschichten keine Rolle spielen. Ich glaube vielmehr, dass ihnen ganz allgemein in den Flammen eine besonders wichtige Function zukommt, indem sie zufolge ihrer enormen Beweglichkeit mehr als alle anderen in Betracht kommenden Theilchen die Rolle eines Vermittlers übernehmen können.

Macht man in Anlehnung an die Hypothese von Armstrong[2] die Voraussetzung, dass Verbrennungsprocesse nur bei Wechselwirkung von Atomen möglich sind, und bedenkt man weiter, dass den Theilchen des schwer flüchtigen Kohlenstoffes jedenfalls eine sehr geringe Beweglichkeit zukommt, so kann man sich leicht vorstellen, dass es im trockenen Kohlenoxydknallgase zu keiner Flammenbildung kommen kann, wenngleich in der Nähe heißer Flächen eine Reaction erfolgt. Da es sich bei unserer Ansicht um keine specifische Wirkung des Wasserstoffes handelt, so ist auch erklärlich, dass bei genügend hoher Temperatur, z. B. beim Cyan- oder Schwefelkohlenstoff-Knallgase, etwa der Stickstoff oder Schwefel seine Rolle übernehmen können.

Dem Einwande von Dixon,[3] dass die Hauptschwierigkeit der Armstrong'schen Hypothese in der großen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosionswelle liege, könnte vielleicht damit begegnet werden, dass es sich im Sinne unserer Auffassung weniger um Übertragung einer chemischen Reaction von Molecül zu Molecül, als vielmehr um die eines Bewegungszustandes überhaupt handeln dürfte, womit die Beobachtungen von Öttingen und Gernett[4] und die von Wright[5] in gutem Einklange stehen.

Damit soll nicht gesagt sein, dass solche Vorstellungen für alle Fälle, bei welchen Feuchtigkeitsspuren eine Rolle

---

[1] Wiedemann, Ostwald, allg. Ch., *2*, 49. Vaubel, Sperber, l. c.

[2] Dixon, Chem. Centralbl., 1896, I, 950.

[3] L. c.

[4] Wiedemanns Annalen (1888), *33*, 586.

[5] Beiblätter zu Wiedemanns Annalen (1888), 461.

spielen, angebracht seien. Diese kann vielmehr bei anderer Gelegenheit auch wieder eine ganz andere sein. Gewiss sind z. B. die Reaction zwischen Chlorwasserstoff und Ammoniak oder die zwischen Sauerstoff und Stickoxyd Vorgänge, welche den Verbrennungserscheinungen nicht unmittelbar an die Seite gestellt werden dürfen. Dies geht insbesondere aus den Versuchen von Hemptinne[1] hervor, welcher gezeigt hat, dass die Zone, in welcher Salmiak oder Stickstofftetroxyd entstehen, dem elektrischen Strome den Durchgang nicht gestattet, während die Flammen im allgemeinen bekanntlich ein ziemlich beträchtliches Leitungsvermögen besitzen.

[1] Z. f. physik. Chemie, *12*, 254.

Preis des ganzen Heftes: 6 K 30 h = 6 Mk. 30 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerolds Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. VI. UND VII. HEFT.

JAHRGANG 1900. — JUNI UND JULI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 3 TAFELN UND 19 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1900.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 6. und 7. Heftes Juni und Juli 1900 des CIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XV. SITZUNG VOM 15. JUNI 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. IIa, Heft X (December 1899); Abth. III, Heft VIII bis X (October bis December 1899). — Bd. 109, Abth. IIb, Heft I und II (Jänner und Februar 1900). — Monatshefte für Chemie, Bd. XXI, Heft IV (April 1900).

Dankschreiben sind eingelaufen von den Herren:

1. Dr. Josef Halban in Wien für eine Subvention zum Zwecke von wissenschaftlichen Untersuchungen über die Menstruation;
2. Dr. Robert v. Sterneck für eine Subvention behufs Durchführung der numerischen Berechnung der Function
$$\sigma(n) = \sum_{1}^{n} \mu(x);$$
3. Dr. Karl Landsteiner für eine Subvention behufs Vornahme von Transplantationsversuchen von bösartigen Geschwulsten auf Thiere.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. landwirtschaftlich-chemischen Versuchsstation in Wien von Herrn Maximilian Ripper vor, betitelt: »Eine allgemein anwendbare maßanalytische Bestimmung der Aldehyde«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine Arbeit aus dem chem. Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz von Dr. V. v. Cordier, betitelt: »Über die Einwirkung von Chlor auf metallisches Silber im Licht und im Dunkeln«. (II. Mittheilung.)

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Dr. A. Bauer übersendet zwei Arbeiten von Prof. Dr. v. Georgievics aus dem Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz:

I. »Über die Azofarbstoffe aus β-Naphtol und den Monosulfosäuren des α-Naphtylamins«.

II. »Über das Verhalten der aus β-Naphtol und den Monosulfosäuren des α-Naphtylamins erzeugten Azofarbstoffe gegen Schafwolle«. (Gemeinschaftlich mit L. Springer bearbeitet.)

Herr Eduard Mazelle, Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Die tägliche periodische Schwankung des Erdbodens nach den Aufzeichnungen eines dreifachen Horizontalpendels zu Triest«.

Das w. M. Herr Hofrath F. Steindachner legt eine Arbeit des auswärtigen c. M. Geheimen Regierungsrathes Prof. F. E. Schulze in Berlin vor, betitelt: »Hexactinelliden des Rothen Meeres«.

Herr Prof. E. Lippmann übersendet eine im III. Wiener chemischen Universitätslaboratorium ausgeführte Arbeit »Über die Darstellung von Diphenylmethanderivaten aus *p*- und *o*-Aminobenzylanilin, sowie deren Homologen«, von Dr. Paul Cohn und Dr. Armin Fischer.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (20. Fortsetzung).

Das w. M. Herr Director F. Brauer überreicht eine Abhandlung von Herrn stud. med. Josef Bischof in Wien, welche den Titel führt: »Einige neue Gattungen von Muscarien«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei Abhandlungen aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien:

1. »Untersuchungen über die Veresterung unsymmetrischer zwei- und mehrbasischer Säuren«, von Rud. Wegscheider. I. Abhandlung: »Über die Veresterung der Nitroterephtalsäure«.

2. »Untersuchungen über die Veresterung unsymmetrischer zwei- und mehrbasischer Säuren«. II. Abhandlung: »Über die Veresterung der Brom- und der Oxyterephtalsäure«, experimentell bearbeitet von Karl Bittner.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung: »Über die allgemeinste Form der Gesetze der chemischen Kinetik homogener Systeme«, von Prof. Rud. Wegscheider.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Direction du Service Géologique du Portugal, Carte Géologique du Portugal.

Raoult F. M., Tonométrie. (Scientia Nr. 8.) 1900, 8°.

Weinek L., Photographischer Mond-Atlas, vornehmlich auf Grund von focalen Negativen der Lick-Sternwarte im Maßstabe eines Monddurchmessers von 10 Fuß. Prag, 1900, 4°.

Über den Zusammenhang von Refraction und Parallaxe

von

Dr. **Egon v. Oppolzer.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. April 1900.)

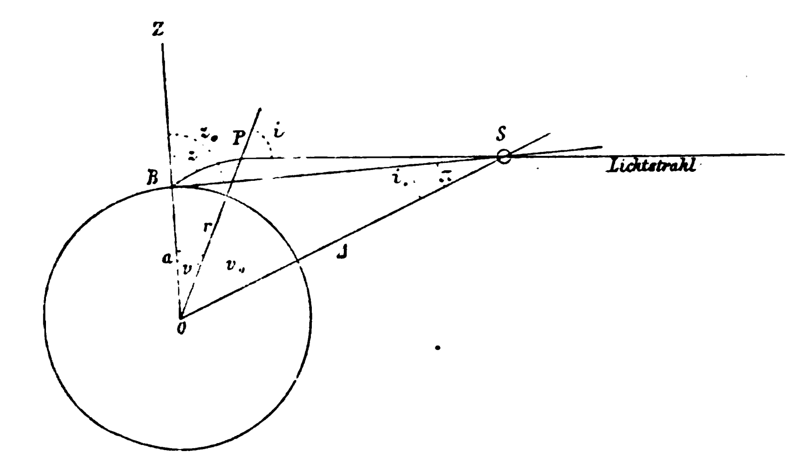
Hansen hat in seiner Arbeit: »Über den Einfluss der Strahlenbrechung auf Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen« (Astr. Nachr., Bd. 15, S. 185; 1838) zuerst aufmerksam gemacht, dass streng genommen die Strahlenbrechung nicht nur von der scheinbaren Zenithdistanz, sondern auch von der Entfernung des Himmelskörpers abhängt. Da sich die Hansen'sche Darstellung wesentlich einfacher und durchsichtiger machen lässt und dieselbe außerdem einer kleinen Correction durch Außerachtlassung eines Gliedes zweiter Ordnung bedarf, so dürfte es angezeigt sein, auf diesen interessanten Zusammenhang neuerlich einzugehen.

Die astronomische Refraction ist die Correction, die an die scheinbare Zenithdistanz anzubringen ist, um die Zenithdistanz zu erhalten, die bei Abwesenheit der Atmosphäre statthaben würde. Nennt man R_0 die astronomische Refraction, z die scheinbare, z_0 die wahre Zenithdistanz, so ist:

$$R_0 = z_0 - z.$$

Geht ein Lichtstrahl von dem Gestirne S durch den beliebigen Punkt P und durch die Erdatmosphäre, so wird er gebrochen und gelangt in B in das Auge des Beobachters. Führt man nun folgende Bezeichnungen ein:

$\overline{OB} = a$ Erdradius,
$\overline{OP} = r$ Radiusvector,
$OS = \Delta$ die Entfernung des Gestirnes S vom Erdcentrum,
$\sphericalangle\ BOP = v$ Polarwinkel,
$\sphericalangle\ BOS = v_0$,
$\sphericalangle\ BSO = \pi$ die Höhenparallaxe des Gestirnes,
$\sphericalangle$ bei $P = i$ (Winkel zwischen Radiusvector und Lichtstrahl),
$\sphericalangle$ bei $S = i_0$,
μ = der Brechungsexponent im Punkte P,
μ_0 = » » » » B,



so bestehen ja folgende Fundamentalgleichungen sphärisch geschichteter Medien:

$$\mu r \sin i = \text{constans} \qquad 1)$$

$$dv = \frac{dr}{r} \operatorname{tg} i. \qquad 2)$$

Differenzieren wir die Gleichung 1) logarithmisch und führen wir in das Resultat die Gleichung 2) ein, so erhält man:

$$dv + \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tg} i + di = 0.$$

Diese Gleichung ist nun vom Gestirne S bis zu dem Beobachter zu integrieren. Im Weltraume, also im Punkte S, kann

man den Brechungsexponenten gleich 1 setzen; so ergibt sich nach den eben angeführten Bezeichnungen:

$$v_0 + \int_{\mu_0}^{1} \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tg} i + i_0 - z = z_0 - \pi + \int_{\mu_0}^{1} \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tg} i + i_0 - z$$

und für die Refraction:

$$R_0 = z_0 - z = -\int_{\mu_0}^{1} \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tg} i - (i_0 - z).$$

Die Refractionstheorieen und die darauf basierenden Tafeln geben nur den Wert des Integrales, der mit R, die Tafelrefraction, bezeichnet werden möge.

Durch die eben erhaltene Gleichung ist der Zusammenhang von Refraction und Parallaxe ersichtlich, denn i_0 und π sind parallaktische Größen. Es handelt sich also, die Differenz $i_0 - z$ als Function der scheinbaren Zenithdistanz auszuwerten. Diese stellt dann eine Correction an die bereits von der Tafelrefraction befreiten Orte dar.

Aus der Gleichung 1) folgt, indem man sie auf die Punkte des Lichtstrahles B und S anwendet:

$$\mu_0 a \sin z = \Delta \sin i_0$$

und aus dem Dreiecke BOS:

$$a \sin z_0 = \Delta \sin \pi.$$

Da die Winkel i_0 und π stets kleiner als die Horizontalparallaxe des Gestirnes sind, so kann man selbst beim Monde von den Sinussen zu den Bögen übergehen; dann erhält man aber leicht aus den beiden letzten Gleichungen die gesuchte Größe:

$$i_0 - \pi = \frac{a}{\Delta} (\mu_0 \sin z - \sin z_0).$$

$\frac{a}{\Delta}$ ist die Horizontalparallaxe des Gestirnes und $z_0 = z + R$, wo R selbst im Horizonte 40 Bogenminuten nicht erreicht. Es reicht daher aus, $\sin(z+R)$ in eine Reihe zu entwickeln und

die Glieder dritter Ordnung zu übergehen; somit ergibt sich schließlich die Formel:

$$i_0-\pi = \frac{a}{\Delta}\sin z\left[(\mu_0-1)-R\operatorname{cotg} z+\frac{1}{2}R^2\right].$$

Die Klammergröße ist stets positiv, so dass die Correction infolge der Parallaxe mit negativem Zeichen anzubringen ist. Dass die Correction sehr klein ist, sieht man sofort daraus, dass R nach Laplace annähernd $(\mu_0-1)\operatorname{tg} z$ gesetzt werden kann, so lange man $z = 70°$ nicht überschreitet.

Entnimmt man die den scheinbaren Zenithdistanzen z entsprechenden Werte der mittleren Refraction (giltig für die Normalwerte 0° C. und 760 *mm*) den Radau'schen Tafeln[1] und legt die verbesserte Bessel'sche Constante $\mu_0-1 = 0\cdot00029315$ und die mittlere Hansen'sche Horizontalparallaxe des Mondes 57′3″ zugrunde, so erhält man die folgenden Correctionen an die bereits von der Tafelrefraction befreiten Mondorte in der dritten Columne:

Scheinbare Zenith-distanz	Mittlere Refraction nach Radau	Correctionen nach Oppolzer	Correctionen nach Hansen
50°	1′11″86	−0″002	−0″003
55	26·06	−0·003	.
60	44·26	−0·004	−0·007
65	2 8·87	−0·006	.
70	44·58	−0·010	−0·014
75	3 42·07	−0·017	.
80	5 31·40	−0·037	−0·042
82	6 48·77	−0·056	.
84	8 48·70	−0·092	.
86	12 15·45	−0·171	−0·176
88	19 12·36	−0·389	−0·389
89	25 44 91	−0·652	−0·651
90	36 47·68	−1·200	−1·226

[1] Radau, Essai sur les réfractions astronomiques. Paris, 1889.

Für jedes andere Gestirn findet man die Correctionen, wenn man die obigen Größen mit dem Verhältnisse der Horizontalparallaxe dieses Gestirnes zur Horizontalparallaxe des Mondes multipliciert. Für die Sonne muss man mit $\frac{1}{400}$ multiplicieren, für Eros im Maximum mit etwa $\frac{1}{40}$, so dass die Correction für andere Gestirne außer dem Monde unmerklich wird, hier aber dann die Ein- und Austritte bei Bedeckungen durch den Mond bis zu einigen Zeitsecunden beeinflussen kann. Für andere Luftzustände sind die Correctionen mit $\frac{b}{760}$ und $1+0\cdot0037\,t$ zu multiplicieren, wenn b und t der Barometerstand in Millimetern, t die Temperatur nach Celsius bedeuten.

Hansen erhält für die obige Correction die Formel:

$$i_0-\pi = \frac{a}{\Delta}\sin z\left[\frac{1}{2}(\mu_0^2-1)-R\operatorname{cotg} z+\frac{1}{2}R^2\frac{1+\cos^2 z}{\sin^2 z}\right].$$

Für $\frac{1}{2}(\mu_0^2-1)$ kann man ohneweiters μ_0-1 setzen. Der Factor von $\frac{1}{2}R^2$ ist jedoch 1 zu setzen. Hansen führt nämlich im Laufe der Rechnung statt $\sin z_0 \sin z$ ein »wegen der Kleinheit der Correction«, hiedurch geht aber ein Glied zweiter Ordnung $-\frac{a}{\Delta}\sin z . R^2 \operatorname{cotg}^2 z$ verloren, welches zur Hansen'schen Formel dazugegeben meine Formel genau wiedergibt.

Da dieser Factor im Horizonte der Einheit gleich wird, so hat er so geringen Einfluss, dass er überhaupt wegbleiben kann — er beeinflusst nicht einmal die dritte Stelle (0'001). Die Differenzen zwischen den Hansen'schen und meinen Werten rühren demnach nur von der Verschiedenheit der zugrunde gelegten Werte her, indem Hansen für $\frac{1}{2}(\mu_0^2-1) = 0\cdot000294047$ und für R die Bessel'schen Werte annimmt.

Beitrag zur Perspective des Kreises und anschließend zur Construction der Axen und Kreisschnitte für Flächen zweiten Grades

von

J. Sobotka in Brünn.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. März 1900.)

1. Es werden im vorliegenden zunächst einige Aufgaben besprochen, in denen aus gewissen gegebenen Daten einer räumlichen perspectiven Abbildung des Kreises die fehlenden Daten gesucht werden. Diese Aufgaben führen dann unmittelbar zu der Frage nach den Kreisschnitten und somit vorerst nach den Axen eines Kegels zweiten Grades.

Für die Ermittlung der Axen von Kegelflächen zweiten Grades besitzen wir einige hübsche und brauchbare Constructionen. Die einfachste und zweckmäßigste ist wohl die von Herrn J. Šolín in den Sitzungsberichten der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1885 veröffentlichte, die einen festen, vorgegebenen Kegelschnitt benützt. Hier gelangen wir zu dieser Construction auf Grund anderer, sehr einfacher Betrachtungen, aus denen hervorgeht, wie sich dieselbe mit einer das Axenproblem betreffenden Construction, welche Herr C. Pelz früher schon, nämlich im Jahre 1874, im Bd. 69 der Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften entwickelt hat, in Einklang bringen lässt.

Sind die Axen einer Fläche zweiten Grades bekannt, dann ist die Ermittelung von Kreisschnitten eine einfache quadratische Aufgabe. Man schneidet die Fläche mit irgendeiner sie

doppelt berührenden Kugel. Die Durchführung dieser üblichen Construction ist jedoch bei der vorausgesetzten allgemeinen Lage der Fläche ziemlich umständlich. Aus unseren Betrachtungen wird deshalb eine einfache, diesbezügliche Construction entwickelt, deren Durchführung von diesem Einwand befreit ist.

Schließlich wird eine einfache, aus den gepflogenen Betrachtungen sich ergebende Construction der drei durch einen Punkt gehenden Flächen einer confocalen Schar zweiter Classe angegeben.

I. Zur Perspective des Kreises.

2. Wir stellen uns folgende Frage:

Wie hat man das Projectionscentrum C zu wählen, damit ein in der Ebene II gegebener Kegelschnitt u' als die Centralprojection eines in einer gleichfalls gegebenen Ebene E liegenden Kreises sich darstelle?

Inhaltlich deckt sich diese Frage mit der folgenden:

Wie ist das Projectionscentrum C anzunehmen, damit sich ein gegebener Kegelschnitt in eine gleichfalls gegebene Ebene als Kreis projiciert?

Wir wollen uns an die erste Fassung unserer Frage halten, früher aber Einiges über die centrisch-collineare Lage eines Kegelschnittes u' mit einem in seiner Ebene liegenden Kreise u_0 bemerken.

Bekanntlich bilden die vier gemeinschaftlichen Tangenten von u' und u_0 ein Vierseit, dessen drei Paare Gegenpunkte auf drei mit u' confocalen Kegelschnitten liegen.[1] Die Tangenten an diese confocalen Kegelschnitte in den erwähnten Gegenpunkten gehen insgesammt durch den Mittelpunkt M von u_0. Die gemeinschaftlichen Sehnen von u' und u_0 ordnen sich, wie gleichfalls bekannt, zu drei Paaren, und jedem Sehnenpaare ist ein Gegeneckenpaar zugeordnet, so dass immer je eine Sehne und Gegenecke aus den so zugeordneten Paaren als Axe und Centrum einer centrischen Collineation zwischen u' und u_0 betrachtet werden können.

[1] Cf. Reye, Die Geometrie der Lage, 1. Abth., 4. Aufl., 1899, S. 181 und 182.

Nehmen wir nun in der Ebene von u' irgendeine Gerade e an und zeichnen einen Kreis u_0, welcher auf e dieselbe Involution conjugierter Punkte hat, wie der Kegelschnitt u', so ergibt sich aus der herangezogenen Beziehung, dass die beiden zu e gehörigen Collineationsmittelpunkte C_1^0, C_2^0 auf einem zu u' confocalen Kegelschnitte v liegen. Die Gerade $(C_1^0 C_2^0)$ verbindet die Pole P', P_0 von e in Bezug auf u', respective u_0, und diese Punkte sind durch C_1^0, C_2^0 harmonisch getrennt; die Polare von P_0 in Bezug auf v geht somit durch P'.

Nun liegt P_0 auf der Geraden p, welche durch den Mittelpunkt N der erwähnten, von e getragenen Involution normal zu e geführt wird. Da auf p auch der Schnittpunkt der Tangenten in C_1^0 und C_2^0 an v als Mittelpunkt des Kreises v_0 liegt, so ist p die Polare von P' in Bezug auf v.

Die Gerade $d = (NP')$ ist ein gemeinschaftlicher Durchmesser von u' und v, und es besitzen die beiden Kegelschnitte auf demselben eine gemeinschaftliche Involution conjugierter Punkte. Durch dieselbe ist der Kegelschnitt v vollkommen bestimmt, weil ja durch die Doppelpunkte derselben nur zwei confocale Kegelschnitte, also nur u' und v, gehen können. Da sich diese Involution nicht ändert, wie man u_0 auch annehmen mag, wenn nur e stets gemeinschaftliche Sehne von u', u_0 bleibt, so folgt daraus, dass die Punkte $C_1^0 C_2^0$ für jedes u_0 auf demselben zu u' confocalen Kegelschnitte v liegen. Die Kreise u_0 bilden nun einen Kreisbüschel $[u_0]$. Zu jedem Kreise dieses Büschels gehört ein Paar von Mittelpunkten der möglichen centrischen Collineationen zwischen u' und u_0. Diese Paare liegen auf dem Kegelschnitte v und bilden auf demselben eine Involution mit P' als Mittelpunkt. Die Doppelpunkte dieser Involution sind offenbar die Nullkreise in $[u_0]$.

Um darnach zu einer gegebenen Collineationsaxe e den Kegelschnitt v, auf dem die zugehörigen Collineationscentra liegen, zu ermitteln, legt man an u' eine zu e parallele Tangente. Alsdann ist v der durch deren Berührungspunkt bestimmte, zu u' confocale Kegelschnitt.

In der centrischen Collineation zwischen dem Kegelschnitte u' und irgendeinem der Kreise u_0 entspricht dem Durchmesser d von u' der Durchmesser p von u_0. Um also für

irgendein auf v gewähltes C^0 die Gegenaxe $\mathfrak{e}$, welche der mit u_0 verbundenen, unendlich fernen Geraden entspricht, zu finden, hat man von C^0 die Senkrechte auf e bis zum Schnitte $\mathfrak{A}$ mit d zu führen; alsdann ist $\mathfrak{e}$ die durch $\mathfrak{A}$ zu e geführte Parallele.

3. Betrachten wir nun die Ebene von u' als Projectionsebene Π, e als Spur der Ebene E, so bilden alle mit u' perspectiven, in E enthaltenen Kreise einen Büschel $[u]$, dessen Umklappung $[u_0]$ ist, und $\mathfrak{e}$ stellt die Fluchtspur der Ebene E für das jeweilige Centrum dar. Hat man nun für u' und irgendeinen Kreis u_0 ein Centrum C^0 und die zugehörige Axe $\mathfrak{e}$ ermittelt, so hat man nun noch C^0 um $\mathfrak{e}$ solange zu drehen, bis die Ebene $(\mathfrak{e}C^0)$ parallel zu E wird. Kommt dabei C^0 in die Lage C, so ergibt sich aus unserer Ableitung, dass u' von C aus in die Ebene E als Kreis projiciert wird. Verfahren wir analog für alle Punkte C^0, so erhalten wir die Antwort auf unsere vorangestellte Frage:

Der geometrische Ort des fraglichen Projectionscentrums C ist ein Kegelschnitt w.

Die Ebene dieses Kegelschnittes verbindet d mit der Centrallinie von $[u]$, und er wird als eine Parallelprojection von v erhalten, wobei die Richtungen der projicierenden Strahlen zu einer der winkelhalbierenden Ebene zwischen Π und E normal sind.

Würde von der Ebene E nur die Richtung der Spur gegeben sein, dann wäre der Ort des Projectionscentrums C offenbar eine zu u' confocale Fläche zweiter Classe F, welche den Kegelschnitt u' in seinen Berührungspunkten mit den zu e parallelen Tangenten orthogonal schneidet. Hiebei kommt F in gleicher Eigenschaft noch einer zweiten, zu e in Bezug auf die Axen von u' antiparallelen Richtung zu.

4. Wir fragen weiter:

Was ist der geometrische Ort G solcher Punkte S, von denen ein in der Ebene Π gelegenes Viereck $A'B'C'D'$ sich in eine gegebene Ebene E als Kreisviereck $ABCD$ projiciert?

Sämmtliche Punkte S in irgendeiner zu E parallelen Ebene E* bilden einen Kreis k, der seinen Mittelpunkt in Π hat und der durch die Doppelpunkte der Involution geht,

welche durch die Schnitte der Ebene E* mit den Gegenseitenpaaren des vollständigen Viereckes $A'B'C'D'$ hervorgerufen wird.[1] Der fragliche Ort G ist demnach eine Fläche, welche also ein System von Kreisen $[k]$ enthält, die in zu E parallelen Ebenen liegen.

Ferner geht durch die gegebenen Punkte A', B', C', D' ein Büschel $[u']$ von Kegelschnitten, und für jeden Kegelschnitt u' in diesem Büschel gelangen wir nach dem vorangehenden Artikel zu einem zweiten Kegelschnitte g, von dessen Punkten u' in die Ebene E als Kreis, somit $A'B'C'D'$ in ein Kreisviereck projiciert wird. Durchläuft u' den Büschel $[u']$, so ändert sich der Kegelschnitt g und beschreibt wieder die Fläche G.

Es enthält deshalb G weiter ein zweites System von Kegelschnitten $[g]$.

Um den Charakter der Fläche G zu erkennen, wollen wir die beiden Systeme $[k]$ und $[g]$ näher betrachten.

Jede zur Schnittgeraden $e = (E\Pi)$ parallele Gerade $\mathfrak{e}$ ist Durchmesser eines Kreises k, dessen Mittelpunkt M nach Früherem der Mittelpunkt derjenigen Involution ist, welche das Kegelschnittbüschel $[u']$ auf $\mathfrak{e}$ einschneidet.

Legen wir also durch A', B', C', D' und den unendlich fernen Punkt von e einen Kegelschnitt m, so schneidet dieser infolge dessen die Gerade $\mathfrak{e}$ noch im Punkte M. Es ist also m der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise k in $[k]$. Im allgemeinen ist somit m eine Hyperbel; ihre zu e parallele Asymptote heiße $\mathfrak{e}_\mu$. Man sieht, da hier der Punkt M unendlich weit liegt, dass der Kreis k von $[k]$, welcher in der durch $\mathfrak{e}_\mu$ parallel zu E gelegten Ebene E_μ enthalten ist, in die unendlich ferne Gerade r_∞ von E und eine allgemein im Endlichen liegende, zu e senkrechte Gerade t zerfällt.

Ein Doppelpunkt der auf $\mathfrak{e}_\mu$ durch $[u']$ hervorgerufenen Involution ist unendlich fern, somit halbiert der Spurpunkt T von t in der Ebene Π als zweiter Doppelpunkt die auf $\mathfrak{e}_\mu$ liegenden Sehnen sämmtlicher Kegelschnitte in $[u']$.

---

[1] Man vergleiche diesbezüglich beispielsweise die Abhandlung: »Zur Perspective des Kreises« im X. Jahrgange der Monatshefte für Mathematik und Physik.

Die unendlich ferne Ebene gehört auch zum Büschel der Ebenen E*, sie schneidet deshalb die Fläche G außer der Geraden r_∞ noch in einem Kegelschnitte k_∞ des Systems $[k]$. In dem Büschel $[u']$ liegen nämlich zwei Parabeln. Zieht man durch irgendeinen Punkt L in Π die Axenrichtungen dieser Parabeln bis zum Schnitte mit einer der Ebenen E* und betrachtet die durch diese Schnittpunkte begrenzte Strecke als Durchmesser eines in E* liegenden Kreises k', so trifft die Kegelfläche, welche von L gegen k' ausstrahlt, die unendlich ferne Ebene in k_∞.

Die Spurcurve s der Fläche G in Π wird durch die Endpunkte der in Π liegenden Durchmesser von $[k]$ erzeugt. Sie ist also der geometrische Ort der Doppelpunkte jener Involutionen, welche auf den zu e parallelen Strahlen durch $[u']$ festgelegt werden. Darnach ist s eine allgemeine Curve dritter Ordnung.

Bezüglich des Systems $[g]$ bemerken wir Folgendes:

Aus der im vorangehenden Artikel erläuterten Bestimmung von g entnehmen wir, dass dieser Kegelschnitt durch die Endpunkte des zum unendlich fernen Punkte E_∞ von e conjugierten Durchmessers von u' geht, woraus wir wieder s als Curve dritter Ordnung erkennen, die hier erzeugt wird durch den Büschel $[u']$ und den zu ihm projectiven Büschel der Polaren von E_∞ in Bezug auf $[u']$. Weiter ersieht man, dass T der Mittelpunkt dieses Polarenbüschels ist und somit auch auf s liegt. Da die Ebene von g parallel ist zu den zur Spur e normalen Geraden in E*, so liegen sämmtliche Kegelschnitte g in den Ebenen des von t getragenen Ebenenbüschels. Zugleich ist t conjugiert in Bezug auf jeden Kegelschnitt g mit der Spur seiner Ebene in Π. Es sind aus diesem Grunde die Schnittpunkte von g mit t, gleichgiltig ob sie reell oder conjugiert imaginär sind, gleich weit von T entfernt, sie bilden mithin eine Involution auf t, welche mit dem erwähnten Ebenenbüschel um t projectiv ist. T ist der eine Doppelpunkt dieser Involution, der zweite T_∞ liegt unendlich weit; diesem entspricht im Ebenenbüschel die Ebene E_μ, und der zugehörige Kegelschnitt g zerfällt in zwei Gerade; die eine ist r_∞, die zweite geht durch den zu T_∞ benachbarten Punkt und ist der ersten selbst benachbart.

Nun beschreiben wir in E_μ um T als Mittelpunkt Kreise h, welche durch die Punktepaare der Involution auf t gehen und einen Büschel $[h]$ von concentrischen Kreisen bilden, welcher offenbar auch zu dem Ebenenbüschel um t projectiv ist. Ferner ziehen wir in Π durch T eine Gerade, welche den Kegelschnitt m in den Mittelpunkten M_1, M_2 zweier Kreise k_1, k_2 aus $[k]$ schneiden wird.

Durch jeden Kreis h und durch die zwei Kreise k_1, k_2 lässt sich eine Fläche zweiter Ordnung H legen. Alle so erhaltenen Flächen H bilden einen besonderen Flächenbüschel zweiter Ordnung [H], der durch k_1 und k_2 geht, überdies mit $[h]$ perspectiv, somit mit dem Büschel der Ebenen um t projectiv liegt. Der Schnitt irgendeiner Fläche H mit der entsprechenden Ebene des Büschels um t ist ein Kegelschnitt g auf G.

Unsere Fläche G wird demnach durch einen Flächenbüschel zweiter Ordnung und einen zu ihm projectiven Ebenenbüschel erzeugt. Sie ist somit eine cubische Fläche, für die wir hier die zweite Steiner'sche Erzeugung nachgewiesen haben.

G ist, wie wir aus der Erzeugung entnehmen, eine specielle Fläche dritter Ordnung; sie besitzt zwei Knotenpunkte, nämlich die absoluten Punkte J_1, J_2 der Kreise k_1, k_2. Demnach liegen auf G 16 discrete Geraden, die wir sehr leicht auch nachweisen können.

Reell sind nur die bereits bemerkten Geraden t, r_∞.

Die Curve s geht durch die Grundpunkte A', B', C', D' des Büschels $[u']$; ihre Tangenten in diesen Punkten sind parallel zu e; die durch $[u']$ auf diesen Geraden festgelegten Involutionen arten aus, da ihre Doppelpunkte beziehungsweise in A', B', C', D' zusammenfallen. Die zugehörigen Kreise aus $[k]$ werden somit zu Nullkreisen. Sie arten also in die von A', B', C', D' nach dem Punktepaare J_1, J_2 gehenden Geraden aus, wodurch wir also zu acht neuen Geraden der Fläche gelangen.

Die Curve s geht auch durch die Diagonalpunkte

$$U = [(A'B')(C'D')],$$
$$V = [(B'C')(D'A')],$$
$$W = [(C'A')(B'D')]$$

des Viereckes $A'B'C'D'$.

Der Punkt T ist der Tangentialpunkt von E_{∞} für s und zugleich der Gegenpunkt des Kegelschnittbüschels $[u']$ in Bezug auf s, woraus folgt, dass die Geraden (TU), (TV), (TW) die Curve s beziehungsweise in den Diagonalpunkten U, V, W berühren.[1]

Die Kegelschnitte g in den Ebenen (tU), (tV), (tW) besitzen daher in U, V, W Doppelpunkte; sie arten deshalb in Geradenpaare aus, wodurch wir zu sechs neuen Geraden von G geführt werden. Dass diese Geradenpaare $u_1 u_2$, $v_1 v_2$, respective $w_1 w_2$ aus conjugiert imaginären Geraden gebildet werden, solange alle Punkte $A'B'C'D'$ reell vorliegen, lässt sich ohneweiters erkennen. In $[u']$ kommen drei Geradenpaare vor. Betrachten wir eines von ihnen, etwa $(A'B')$, $(C'D')$. Die Gerade $(A'B')$ schneide E im Punkte P_1, die Gerade $(C'D')$ im Punkte P_2. Durch P_1 und P_2 ist in E ein Kreisbüschel festgelegt, dessen Kreise sich in die Ebene Π nach dem erwähnten Geradenpaare projicieren sollen. Das ist nicht anders möglich, als dass für alle gewöhnlichen Kreise in diesem Kreisbüschel U der singuläre Projectionsmittelpunkt ist. In diesem Kreisbüschel liegen aber zwei Nullkreise mit den Mittelpunkten K_1, K_2, die unserer Annahme von A', B', C', D' gemäß, conjugiert imaginär sind. Diese Nullkreise bestehen offenbar aus den auch nach den Punkten J_1, J_2 gehenden Geradenpaaren $(P_1 K_1)(P_2 K_1)$ und $(P_1 K_2)(P_2 K_2)$. Soll jedes dieser Geradenpaare in das Geradenpaar $(A'B')(C'D')$ projiciert werden, so müssen die möglichen Projectionsmittelpunkte auf den Geraden $u_1 = (UK_1)$, $u_2 = (UK_2)$ liegen.

In gleicher Weise gelangen wir zu den Geradenpaaren $v_1 v_2$, $w_1 w_2$ unserer Fläche G, die von V, respective W ausgehen.

5. Wir legen uns nun folgende Aufgabe vor:

Es sind solche Kreise zu ermitteln, deren Centralprojection bei gegebenem Augpunkt C_1 ein in der Bildebene festliegender Kegelschnitt u' ist.

C_1 ist die Orthogonalprojection des Projectionscentrums C auf unsere Bildebene Π. Die durch dieses Centrum parallel zur

---

[1] Man vergleiche H. Schröter: »Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung«, Leipzig, 1888, S. 112.

Ebene G irgendeines der fraglichen Kreise u gelegte Ebene heiße Γ, ihre Spur g in Π ist die Fluchtspur von G. Der Fußpunkt 𝔊 der Senkrechten von C_1 auf g wird als Hauptpunkt der Ebene G bezeichnet. Auf dieser Senkrechten (𝔊C_1) liegt auch das in die Bildebene um g umgelegte Centrum C_0. Verbinden wir den Mittelpunkt M' von u' mit 𝔊, so muss der zu (M'𝔊) conjugierte Durchmesser von u' zunächst parallel mit g sein, wenn u' einen Kreis darstellen soll. Es ist somit (C_1𝔊) normal auf der zum Durchmesser (M'𝔊) in Bezug auf u' conjugierten Richtung. Daraus folgt:

Der geometrische Ort der Hauptpunkte 𝔊 der Ebenen aller Kreise, die sich für C_1 als Augpunkt in einen gegebenen Kegelschnitt u' projicieren, ist eine gleichseitige Hyperbel h, welche durch C_1, den Mittelpunkt M' und die unendlich fernen Punkte der Axen von u' geht.

Bekanntlich schneidet die Hyperbel h unseren Kegelschnitt u' in den Fußpunkten der von C_1 an u' gehenden Normalen. Weiter folgt:

Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf der Hyperbel h und geht ein Schenkel desselben beständig durch C_1, so beschreibt der zweite Schenkel eine Curve dritter Classe, welche die unendlich ferne Gerade in deren Schnittpunkten mit h berührt und deren Tangenten die Fluchtspuren für die Ebenen aller solcher Kreise sind, die sich in den Kegelschnitt u' projicieren, wenn C_1 als Augpunkt angenommen wird.

Wählt man irgendeine Tangente dieser Curve dritter Classe als Fluchtspur g für die Ebene des gesuchten Kreises, so hat man auf derselben bloß zwei in Bezug auf u' conjugierte Punkte zu wählen und die durch sie festgelegte Strecke als Durchmesser einer Kugelfläche aufzufassen, welche den früheren Erläuterungen zufolge das Perpendikel n in C_1 zu Π in zwei Projectionsmittelpunkten C, C^* schneidet. Der Kegel, welcher von C, respective C^* nach u' ausstrahlt, wird von jeder zu (Cg), respective (C^*g) parallelen Ebene nach einem Kreise geschnitten, welcher unserer Aufgabe genügt.

Wir sind also in der Lage, auf einfache Weise zu jeder die Curve dritter Classe berührenden Geraden $\mathfrak{g}$ zwei Punkte auf u zu ermitteln, von denen jeder in Verbindung mit $\mathfrak{g}$ eine Stellung Γ für die gesuchten Kreisebenen darstellt. Die umgekehrte Aufgabe zu irgendeinem Punkte C die zugehörigen Tangenten $\mathfrak{g}$ zu suchen, ist nicht mehr so einfach; sie verlangt die Construction der Kreisschnittebenen eines Kegels zweiten Grades, in erster Reihe also die Construction der Axen für denselben.

Das Axenproblem ist öfters schon gelöst worden. Aus dem eingangs angeführten Grunde wird hier trotz dem auf dasselbe näher eingegangen. Zur Lösung desselben bedienen wir uns einfacher Hilfssätze über Kegelschnitte, die wir zunächst besprechen wollen.

II. Zwei Hilfssätze über Kegelschnitte.

6. Wir gehen von folgendem Satze aus:

Schreibt man einem Polardreieck eines Kegelschnittes a einen zweiten Kegelschnitt b um, so lassen sich unzählig viele Polardreiecke von a dem Kegelschnitte b einschreiben; schreibt man diesen Polardreiecken Kegelschnitte um, welche durch zwei feste, irgendeinem Punkte von b in Bezug auf a conjugierte Punkte A, B laufen, so bilden dieselben einen Büschel von Kegelschnitten, die sich in einem Punkte D auf b schneiden.

Der erste Theil des Satzes ist allgemein bekannt. Weiter sieht man, da alle solche Polardreiecke MNP dem Kegelschnitte b eingeschrieben sind, dass sie einem anderen Kegelschnitte c umgeschrieben sind und dass (AB) eine Tangente von c ist. Die von (AB) verschiedenen, durch A und B an c gehenden Tangenten mögen sich im Punkte C schneiden. Da jedes Dreieck MNP und das Dreieck ABC dem Kegelschnitte c umgeschrieben sind, so lässt sich beiden gleichfalls ein Kegelschnitt umschreiben. Das besagt, dass jeder Kegelschnitt x, welcher einem unserer Polardreiecke umgeschrieben ist und durch A und B geht, auch durch den Punkt C gehen muss.

Da nun dem Kegelschnitte x bereits ein Polardreieck von a umgeschrieben ist, so lassen sich ihm noch unzählig viele andere Polardreiecke einschreiben. Es kann jeder Punkt von x, also auch der Punkt A als Eckpunkt eines solchen Dreieckes gewählt werden. Demnach schneidet x die Polare p von A in Bezug auf a in zwei bezüglich a conjugierten Punkten.

Sämmtliche Kegelschnitte x durch die drei Punkte A, B, C schneiden mithin auf p eine Involution von in Bezug auf a conjugierten Punkten ein. Daraus folgt, dass diese Kegelschnitte einen Büschel $[x]$ bilden und deshalb noch einen weiteren Punkt D gemeinsam haben.

Wäre D nicht schon selbst auf b, dann müsste b von x außer in den drei Eckpunkten des erwähnten Polardreieckes MNP noch in einem weiteren vierten Punkte D_1 geschnitten werden. Träfe dann die Polare von D_1 in Bezug auf a den Kegelschnitt b in den Punkten D_2, D_3, so wäre $D_1 D_2 D_3$ ein Polardreieck von a, und der durch die Ecken dieses Dreieckes, sowie durch A und B gelegte Kegelschnitt x_1 müsste als ein Element von $[x]$ auch noch durch C und D gehen. Es musste also x_1 mit x zusammenfallen, da beide Kegelschnitte alsdann die Punkte A, B, C, D und D_1 gemeinschaftlich hätten. Dann hätte aber dieser Kegelschnitt $x = x_1$ mit b bereits sechs Punkte gemeinsam, nämlich die Ecken der Polardreiecke MNP, $D_1 D_2 D_3$, was nicht möglich ist, da kein x mit b zusammenfallen kann. Es muss also der vierte Grundpunkt D des Kegelschnittbüschels $[x]$ in der That auf b liegen. Hiemit ist unser Satz erwiesen.

Wir sehen also, dass:

Irgend zwei Punkte A', B', die einem beliebigen Punkte von b in Bezug auf a conjugiert sind, einen derartigen Kegelschnittbüschel $[x']$ veranlassen. Je zwei von den so definierten Kegelschnittbüscheln $[x]$, $[x']$ sind projectiv. Es entsprechen sich in ihnen solche Kegelschnitte der beiden Büschel, welche demselben Polardreieck von a umgeschrieben sind. Das Erzeugnis zweier projectiver Kegelschnittbüschel ist im allgemeinen eine Curve vierter Ordnung, welche durch die Grundpunkte der Büschel hindurchgeht. In unserem Falle ist aber b selbst ein Theil des Erzeugnisses von $[x]$ und $[x']$. Folglich

wird sich als Restschnitt ein zweiter Kegelschnitt b ergeben, welcher durch die Punkte A, B, A', B', ferner durch C und durch den Schnittpunkt C' der beiden von $(A'B')$ verschiedenen Tangenten durch A' und B' an c geht. So kennen wir vom Kegelschnitte b sechs Punkte, und er ist somit schon mehr als hinreichend bestimmt; er ist der Ort der vierten Schnittpunkte entsprechender Kegelschnitte in $[x]$ und $[x']$.

Liegen die Punkte A, B, A', B' auf derselben Tangente von c, dann ist diese Tangente selbst ein weiterer Bestandtheil des Erzeugnisses von $[x]$ und $[x']$, und das eigentliche Erzeugnis ist eine Gerade b_1: die Verbindungslinie der Punkte C, C'.

Wir gelangen zu den soeben besprochenen Gebilden auch auf Grund des zuvor abgeleiteten Satzes kurz auf rein synthetischem Wege.

Zu dem Behufe betrachten wir die beiden Dreiecke ABC, $A'B'C'$, durch deren Eckpunkte man thatsächlich einen Kegelschnitt $\mathfrak{b}$ legen kann. Diese zwei Dreiecke kann man, da sie demselben Kegelschnitte eingeschrieben werden können, als Polardreiecke eines neuen Kegelschnittes $\mathfrak{a}$ betrachten. Dem Kegelschnitte $\mathfrak{b}$ sind Polardreiecke ABC, $A'B'C'$ des Kegelschnittes $\mathfrak{a}$ eingeschrieben. Diese Dreiecke ABC, $A'B'C'$ sind ebenso wie sämmtliche Dreiecke MNP, wie wir früher gesehen haben, dem Kegelschnitte c umgeschrieben; aus diesem Grunde sind irgend zwei Eckpunkte, etwa M und N, zu einem Punkte von $\mathfrak{b}$ bezüglich $\mathfrak{a}$ conjugiert. Daraus folgt in Anwendung unseres obigen Satzes, dass die Kegelschnitte durch A, B, C, M, N und A', B', C', M, N sich außer in P noch in einem Punkte auf $\mathfrak{b}$ schneiden.

Es beschreiben also thatsächlich die vierten Schnittpunkte der durch A, B gehenden, je einem Polardreiecke MNP umgeschriebenen Kegelschnitte mit den Kegelschnitten, welche durch A', B' gehen und je demselben Polardreieck umgeschrieben sind, einen Kegelschnitt $\mathfrak{b}$.

Wenn nun die Punkte A, B, A', B' alle auf einer Tangente von c liegen, dann artet der Kegelschnitt $\mathfrak{b}$ in diese Tangente selbst und die Gerade $\mathfrak{b}'$, welche C mit C' verbindet, aus.

Wir haben daher den Satz:

Jedem Punktepaare A, B des vorigen Satzes entspricht ein Kegelschnittbüschel; die noch freien Schnittpunkte der correspondierenden Kegelschnitte in zwei derartigen Kegelschnittbüscheln beschreiben im allgemeinen einen Kegelschnitt $\mathfrak{b}$; sind aber die diese Kegelschnittbüschel festlegenden Punktepaare AB, $A'B'$ demselben Punkte von b in Bezug auf a conjugiert, so zerfällt dann der Kegelschnitt in die diese Punktepaare tragende Gerade und in eine zweite Gerade $\mathfrak{b}'$, welche das eigentliche Erzeugnis der beiden Kegelschnittbüschel ist.

III. Axenconstructionen für Flächen zweiten Grades.

7. Die angeführten Sätze werden uns nun die folgende Aufgabe lösen:

Die drei Axen x, y, z eines Kegels zweiten Grades K, der durch einen Kegelschnitt a als Leitlinie und durch seine Spitze S gegeben ist, sollen construiert werden.

Die Ebene von a nehmen wir als Projectionsebene Π an, und die Spitze S stellen wir durch ihre Orthogonalprojection S' und ihren Distanzkreis s in dieser Ebene dar; der Mittelpunkt von a heiße A.

Legen wir durch S irgendeine Ebene und lassen in derselben eine Gerade durch S einen Strahlenbüschel durchlaufen, so werden ihre in Bezug auf K normalconjugierten Strahlen eine Kegelfläche zweiten Grades beschreiben, auf der die gesuchten drei Axen liegen. Die Spurpunkte X, Y, Z in Π für die Axen liegen auf dem Spurkegelschnitt dieser normalconjugierten Kegelfläche. Wird die angenommene Ebene durch S parallel zu Π angenommen, dann ist dieser Spurkegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel b, welche mit der im Artikel 5 gefundenen gleichseitigen Hyperbel identisch ist.

Für das Folgende brauchen wir den Mittelpunkt B von b. Diese Hyperbel geht durch den Punkt A, durch den Punkt S', wird im letzteren Punkte von der Geraden t berührt, welche senkrecht steht auf dem zu (AS') bezüglich a conjugierten Durchmesser, und schließlich enthält sie die unendlich fernen Punkte der Axen von a. Bestimmt man nun aus einem der

hier zutage tretenden Pascal'schen Sechsecke zunächst eine Asymptote von b, so ergibt sich dann die zweite Asymptote und somit auch der Mittelpunkt B ohneweiters.

Man erhält B auch folgendermaßen: Die zu $(S'A)$ in Bezug auf die Axen des Kegelschnittes a symmetrische Gerade ist eine zu $(S'A)$ conjugierte Sehne von b. Sie geht also durch den zweiten Endpunkt D_1 des Durchmessers (SB). Dieser Durchmesser schließt mit den Axen von a dieselben Winkel ein wie t, ist also dadurch bestimmt und mithin auch der Punkt D_1 selbst; dadurch lässt sich B als Mittelpunkt von $S'D_1$ construieren. Der Punkt D_1 spielt, wie wir sehen werden, auch im weiteren Verlaufe eine Rolle.

Wir sehen, dass die Hyperbel b davon unabhängig ist, wo der Punkt S auf der durch S' zu II geführten Normalen g liegt. XYZ ist ein Polardreieck von a, welches der gleichseitigen Hyperbel b eingeschrieben ist. Jedem Punkte von g als Spitze entspricht ein solches Dreieck, und jedem b eingeschriebenen Polardreieck von a sind zwei auf g in Bezug auf II symmetrisch liegende Punkte als Spitzen von Kegelflächen zugeordnet, deren Axen durch die Eckpunkte dieses Dreieckes gehen. Die Seiten der Polardreiecke von a, welche b eingeschrieben sind, berühren die zu b in Bezug auf a duale Curve c, welche eine Parabel ist, weil b durch A geht. Die Gerade (AS') ist die Directrix dieser Parabel; denn da das durch die Axen von a und die unendlich ferne Gerade u von II gebildete Dreieck ein b eingeschriebenes Polardreieck bezüglich a ist, so berühren diese Axen die Parabel, und es ist deshalb A ein Punkt der Directrix. S' ist der gemeinschaftliche Höhenschnittpunkt aller der Parabel umgeschriebenen Polardreiecke, also ein zweiter Punkt der Directrix von c.

8. Nach dieser Vorbereitung wollen wir daran gehen, das Spurendreieck XYZ für die Axen des gegebenen Kegels mit Zirkel und Lineal zu construieren, wenn überdies vorausgesetzt wird, dass der Kegelschnitt a vollständig verzeichnet vorliegt.

Aus diesem Grunde wollen wir den Kreis k_1 und den zu a ähnlich liegenden Kegelschnitt k_2 ermitteln, die beide dem fraglichen Dreieck XYZ umgeschrieben sind.

Sämmtliche Kreise, die den der Hyperbel b eingeschriebenen Polardreiecken von a — unter denen sich ja auch XYZ befindet — umgeschrieben sind, bilden dem ersten Satze des Artikels 6 zufolge einen Kreisbüschel $[k_1]$, da ja diese Kreise alle durch die absoluten Punkte $J_1 J_2$ von Π gehen und diese auf der unendlich fernen Geraden u von Π, welche c berührt, liegen. Der eine Grundpunkt C_1 des Kreisbüschels ist nach den Erläuterungen des citierten Artikels der Schnittpunkt der von J_1 und J_2 an c gehenden, im Endlichen liegenden Tangenten, das ist also der Brennpunkt der Parabel c, was auch daraus hervorgehen würde, dass alle Kreise, welche Tangentendreiecken einer Parabel umschrieben werden, durch deren Brennpunkt gehen.

Der zweite Grundpunkt D_1 liegt dem herangezogenen Satze zufolge auf der gleichseitigen Hyperbel b. Die Chordale von $[k_1]$ repräsentiert mit u denjenigen Kreis dieses Büschels, welcher dem durch u und die Axen von a gebildeten Polardreieck umschrieben ist. Dieselbe ist somit die Verbindungsgerade von A mit C_1. Es ist als D_1 der von A verschiedene Schnittpunkt dieser Geraden mit b. Die Axen von a halbieren als Tangenten der Parabel c von einem Punkte A der Directrix die Winkel, welche die Directrix mit der von dem Punkte A zum Brennpunkte C_1 gehenden Geraden einschließt; infolge dessen ist (AC_1) symmetrisch zu (AS') in Bezug auf die Axen von a. Somit sind $S'A$ und AD_1 zwei conjugierte Sehnen von b; es liegt also D_1 dem Punkte S' auf b diametral gegenüber und wurde als solcher Punkt bereits im vorangehenden Artikel construiert.

Übrigens ist bekannt, dass die Kreise in $[k_1]$, da sie Polardreiecken von a umgeschrieben sind, denjenigen Kreis (für a als Parabel, die Directrix dieser Parabel) orthogonal schneiden müssen, von dessen Punkten rechtwinkelige Tangenten an a kommen; es müssen deshalb C_1 und D_1 auf einer Geraden durch A liegen und bezüglich dieses Orthogonalkreises conjugiert sein, was uns wieder zu einer Bestimmung von D_1 führt.

Die Senkrechte d in C_1 auf (AC_1) schneidet die Axen von a in deren Berührungspunkten G, H mit c. Bilden wir dies polar

in Bezug auf *a* ab, so entsprechen den Axen von *a* die unendlich fernen Punkte auf *b*, somit den Punkten *G*, *H* die Asymptoten von *b*, und deshalb entspricht der Geraden *d* der Mittelpunkt *B* unserer Hyperbel. Es ist also *d* die Polare von *B* in Bezug auf *a*.

9. Denken wir uns weiter durch die Ecken der betrachteten Polardreiecke *XYZ*,... Kegelschnitte gelegt, die zu *a* ähnliche Lage haben. Diese Kegelschnitte schneiden die Tangente u von *c* in den unendlich fernen Punkten $L_1 L_2$ von *a* und bilden deshalb dem Artikel 6) zufolge einen Kegelschnittbüschel $[k_2]$. Es sollen nun die zwei weiteren Grundpunkte C_2, D_2 von $[k_2]$ gesucht werden.

Der Punkt C_2 ist wieder der Schnittpunkt der von u verschiedenen Tangenten an die Parabel *c* durch L_1 und L_2. Diese Punkte sind die Doppelpunkte der Involution, welche durch die Durchmesserinvolution des Kegelschnittes *a* auf u eingeschnitten wird. Daraus folgt, dass die Verbindungsstrahlen der Berührungspunkte von Tangentenpaaren an *c*, die parallel zu den conjugierten Durchmesserpaaren von *a* sind, durch den Punkt C_2 als Mittelpunkt der so auf *c* hervorgerufenen Tangenteninvolution gehen.

Da die Polare *d* von *B* in Bezug auf *a* die Berührungspunkte von *c* mit den Axen des Kegelschnittes *a* verbindet, so sieht man daraus, dass auf ihr der Punkt C_2 liegen wird.

Einer von den Kegelschnitten in $[k_2]$ zerfällt in u und die Gerade $(C_2 D_2)$, die durch *A* gehen muss, da dieser degenerierte Kegelschnitt dem durch u und die Axen von *a* bestimmten Polardreieck umgeschrieben ist.

Weiter legen wir diejenigen Tangenten an *c*, welche zu dem in Bezug auf die Axen symmetrisch gelegenen conjugierten Durchmessern *q*, *r* von *a* parallel sind. Die Verbindungsgerade *e* der Berührungspunkte dieser Tangenten geht gleichfalls durch C_2. Diese Tangenten sind polarreciprok in Bezug auf *a* zu den zweiten Schnittpunkten *Q*, *R* der Durchmesser *r*, respective *q* mit der gleichseitigen Hyperbel *b*. Die Gerade *e* ist also die in Bezug auf *a* genommene Polare des Schnittpunktes *U* für die Tangenten in *Q* und *R* an *b*. Aus der Entstehungsweise von *b* folgt, dass $(S'Q) \perp (AR)$, $(S'R) \perp (AQ)$. Es ist somit *S'*

der Höhenschnittpunkt des Dreieckes AQR, und es ist auch $(QR) \perp (AS')$.

Da AQ, AR zwei conjugierte Sehnen von b sind, so ist (QR) ein Durchmesser von b, und der Punkt U liegt unendlich weit auf der zu (QR) in Bezug auf die Asymptoten von b symmetrischen Geraden f, woraus folgt, dass $f \perp (AC_1)$; da auch $d \perp (AC_1)$ ist, so ist $f \parallel d$.

Aus alledem erkennen wir, dass e derjenige Durchmesser von a ist, welcher zu der Richtung von d conjugiert ist.

Weil ferner B der Pol von d bezüglich a ist, so ergibt sich schließlich e als die Verbindungsgerade der Mittelpunkte A und B, und der Punkt C_2 ist der Schnitt von (AB) mit d. Nun ist (AC_2) in Verbindung mit $\mathfrak{u}$ ein Element von $[k_2]$, demnach ergibt sich der vierte Grundpunkt D_2 von $[k_2]$ als der von A verschiedene Schnitt der Geraden (AC_2) mit b, das heißt D_2 ist der zu A diametral gegenüberliegende Punkt der gleichseitigen Hyperbel b.

Ein Kreis aus $[k_1]$ und ein Kegelschnitt aus $[k_2]$, welche demselben Polardreieck von a umgeschrieben sind, schneiden sich dem zweiten Satze in Art. 6 gemäß, da sowohl J_1, J_2, als auch L_1, L_2 auf der Tangente $\mathfrak{u}$ von c liegen, noch in einem Punkte T auf der Geraden $d = (C_1 C_2)$.

$D_1 T$ ist ein Durchmesser von k_1, weil $d \perp (AC_1)$, also der Winkel $D_1 C_1 T$ ein rechter ist. $(D_2 T)$ ist ein Durchmesser des zugehörigen Kegelschnittes k_2, weil (AC_2) und d die Richtungen zweier conjugierter Durchmesser von a, somit $D_2 C_2$, $C_2 T$ zwei conjugierte Sehnen von k_2 sind.

10. Das gesuchte Spurendreieck XYZ ist das gemeinsame Polardreieck des Kegelschnittes a und des gleichfalls in Π liegenden Kreises $\mathfrak{a}$, welcher S' zum Mittelpunkte, $h\sqrt{-1}$ zum Radius hat, wobei h die Entfernung der Spitze S von Π bezeichnet, und welcher durch den reellen Distanzkreis s vertreten ist.

Nun können wir uns die gleichseitige Hyperbel b auch in folgender Weise beschrieben denken. Wir haben um A die Durchmesserinvolution von a und um S' eine Rechtwinkelinvolution als Durchmesserinvolution um S' von $\mathfrak{a}$; wir nehmen die zu einer veränderlichen Richtung conjugierten Durchmesser

in beiden Durchmesserinvolutionen; alsdann beschreibt ihr Schnittpunkt die Hyperbel b.

Demnach ist b einzig und allein von diesen Involutionen abhängig, unabhängig also von der Größe des Kegelschnittes a und der Entfernung h des Punktes S von Π.

Nehmen wir a als gegeben und unveränderlich an, während sich h ändert, also $\mathfrak{a}$ einen Büschel $[\mathfrak{a}]$ von concentrischen Kreisen durchläuft, so ist aus unserer Entwickelung ersichtlich, dass dabei der dem gemeinsamen Polardreiecke des Kegelschnittes a und des veränderlichen Kreises $\mathfrak{a}$ umschriebene Kreis a den Kreisbüschel $[k_1]$ beschreibt, während die allen so bestimmten Polardreiecken umgeschriebenen, mit a ähnlich liegenden Kegelschnitte den Büschel $[k_2]$ bilden.

Wir können aber auch umgekehrt den um S' als Mittelpunkt mit dem Radius $h\sqrt{-1}$ gelegten Kreis $\mathfrak{a}$ festhalten und den Kegelschnitt a so verändern, dass er stets dieselbe Durchmesserinvolution beibehält, wodurch wir einen Büschel $[a]$ von ähnlich liegenden Kegelschnitten erhalten.

Die Seiten der gemeinsamen Polardreiecke des Kreises $\mathfrak{a}$ mit den Kegelschnitten in $[a]$ werden analog, da diese Dreiecke der Hyperbel b eingeschrieben sind, eine neue Parabel c_1, nämlich die polarreciproke Curve zu b in Bezug auf $\mathfrak{a}$ berühren, und es werden demzufolge die diesen Polardreiecken umgeschriebenen Kreise einen Büschel $[k'_1]$, die ihnen umgeschriebenen, mit a ähnlich liegenden Kegelschnitte einen Büschel $[k'_2]$ bilden.

Die beiden Büschel $[k_1]$ und $[k'_1]$ schneiden sich alsdann in einem Kreise k_1 und die beiden Büschel $[k_2]$, $[k'_2]$ in einem Kegelschnitte k_2, welche beide dem gesuchten Dreieck XYZ umgeschrieben sind.

In der dualen Beziehung zwischen b und c_1 entsprechen den unendlich fernen Punkten von b die durch S' parallel zu den Asymptoten von b gezogenen Tangenten an c_1, und die Verbindungslinie p ihrer Berührungspunkte ist die Polare von B in Bezug auf $\mathfrak{a}$. S' ist ein Punkt der Leitgeraden von c_1; deshalb ist der Fußpunkt der Senkrechten von S' auf p der Brennpunkt C'_1 von c_1.

Aus denselben Gründen wie früher ist C_1' ein Grundpunkt von $[k_1']$. Der zweite Grundpunkt dieses Büschels ist offenbar der Punkt $D_1' \equiv D_1$ auf b, weil ja auch D_1' auf b liegen muss und weil weiter beide Büschel $[k_1]$, $[k_1']$ den Kreis gemeinschaftlich haben, welcher außer in X, Y, Z noch in D_1 die Hyperbel b überschreitet.

Ebenso könnte man den Büschel $[k_2']$ festlegen. Denkt man sich die von L_1, L_2 an c_1 ausgehenden, von $\mathfrak{u}$ verschiedenen Tangenten in C_2' zum Schnitte gebracht, so liefert C_2' einen Grundpunkt für $[k_2']$. Analog den Erörterungen des vorangehenden Artikels ergibt sich, dass C_2' auf der Geraden p liegt und die Gerade $(C_2'S')$ die Berührungspunkte derjenigen Tangenten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ von c_1 verbindet, welche zu den in Bezug auf die Axen symmetrisch liegenden conjugierten Durchmessern q, r von a parallel sind.

Um $(C_2'S')$ zu erhalten, denken wir uns am einfachsten durch S' die Senkrechten zu diesen besonderen Durchmessern von a gezogen, welche die Hyperbel b weiter in den Punkten Q, R eines Durchmessers derselben schneiden; die Senkrechte durch S' zu der zu (QR) in Bezug auf die Asymptoten von b symmetrischen Geraden f ist bereits die gesuchte Gerade $(C_2'S')$, welche also p im Punkte C_2' trifft.

Die Richtigkeit dieser Construction erhellt sofort aus der polaren Beziehung zwischen b und c.

Da f parallel ist zu der Geraden d, so wird C_2' einfach als Schnittpunkt der Senkrechten von S' auf d mit p erhalten.

Die nun entwickelte Construction ist in dieser Form auch dann anwendbar, wenn es in a kein reelles, zu den Axen symmetrisch liegendes Paar conjugierter Durchmesser gibt, da unsere Entwickelung von C_2 und C_2' von dieser Bedingung unabhängig ist.

Ist aber a speciell eine Hyperbel, dann sind die Punkte L_1, L_2 reell, und man kann die Punkte C_2 und C_2' auch einfach als Schnittpunkte der an c, respective c_1 zu den Asymptoten von a parallel geführten Tangenten ermitteln. Alsdann sind die Fußpunkte der Senkrechten von S' auf die Asymptoten des Kegelschnittes a die Endpunkte eines Durchmessers für b, und dadurch ist B auch sofort bestimmt. Der Pol dieses Durch-

messers in Bezug auf a ist der Punkt C_2 und in Bezug auf $\mathfrak{a}$ der Punkt C_2'.

11. Der Kreis k_1 ist als Schnitt von $[k_1]$ mit $[k_1']$ durch die Punkte C_1, D_1, C_1' und der Kegelschnitt k_2 als Schnitt von $[k_2]$ mit $[k_2']$ durch die Punkte C_2, D_2, C_2' vollkommen bestimmt.

Man kann aber zuerst den Punkt T construieren, welcher als Endpunkt eines Durchmessers von k_1 auf p liegt und sich mithin als Schnitt von p mit d ergibt, so dass wir schließlich genau zu der von Prof. Šolín angegebenen Construction gelangen:

»Man construiere D_1 und D_2 und bringe die Polaren von B in Bezug auf a und $\mathfrak{a}$ in T zum Schnitte; alsdann ist D_1T ein Durchmesser von k_1 und D_2T ein Durchmesser von k_2. Nun bilde man den Kegelschnitt k_2 in a durch Ähnlichkeit ab, so dass dem Durchmesser D_2T von k_2 der zu ihm parallele Durchmesser von a entspricht. Durch diese Abbildung entspricht dem Kreise k_1 ein Kreis $k_1{}^*$, der den Kegelschnitt a außer in dem T entsprechenden Punkte noch in drei weiteren Punkten schneidet, denen durch unsere ähnliche Lage auf dem Kreise k_1 die fraglichen Punkte X, Y, Z entsprechen.

12. Die gegebene Lösung ist auch anwendbar, wenn a eine Parabel ist; die Construction vereinfacht sich noch. Die Axe n von a ist hier schon eine Asymptote von b; zieht man zu n die Parallele m durch S' und führt im Schnittpunkte M derselben mit a die Tangente $\mathfrak{t}$ an a, so ist die Tangente t an b in S' senkrecht zu $\mathfrak{t}$, und die durch S' gehende, in Bezug auf n zu t antiparallele Gerade $S'B$ schneidet n im Mittelpunkte B der gleichseitigen Hyperbel b.

Ist N der Scheitel von a und macht man NB_1 äquipollent BN, so geht die Polare d von B in Bezug auf a durch B_1 und ist senkrecht zu n. Die Polare p von B in Bezug auf $\mathfrak{a}$ wird wie früher ermittelt und liefert im Schnitte mit d den Punkt T; alsdann ist analog dem Früheren (D_1T) ein Durchmesser von k_1. Die Bestimmung dieses Kreises liefert also nichts Neues; sein Mittelpunkt liegt bekanntlich auf der Leitgeraden von a.

Die Kegelschnitte von $[k_2]$ sollen nun mit a ähnlich liegende Parabeln sein. Hier ist $C_2 = B_1$, und D_2 liegt unendlich weit auf n.

Die Parabeln von $[k_2]$ haben somit nicht nur die beiden unendlich fernen Punkte, sondern auch den denselben unmittelbar benachbarten Punkt gemein und schneiden sich deshalb außerdem nur noch im Punkte B_1. Daraus sieht man ferner, dass der Ähnlichkeitspunkt von je zwei Parabeln in $[k_2]$ unendlich weit liegt, dass also alle Parabeln in $[k_2]$ congruent sind.

Die fragliche Parabel k_2 geht auch durch den Punkt C_2', der hier der Schnitt von m mit p ist. Dadurch ist schon k_2 hinreichend bestimmt.

Wir bemerken aber noch Folgendes:

Verändert S seine Lage auf (SS'), so verschiebt sich p parallel, und T verschiebt sich auf d. Denken wir uns nun die Lage S_1 von S so, dass die entsprechende Lage p_1 von p durch B_1 geht. Fällt man also von B_1 die Senkrechte auf $(S'B)$, so trifft dieselbe die Gerade m im Punkte C_2^*, und der dieser Lage von S entsprechende Kegelschnitt k_2^* aus $[k_2]$ ist diejenige Parabel, welche d zur Scheiteltangente, B_1 zum Scheitel hat und durch C_2^* geht.

Weiter ist die Länge der Tangente t an b zwischen S' und n gleich der Länge der Normale in M an a zwischen M und n. Die Abscisse für C_2^* von B_1 aus gemessen ist gleich der Subtangente des Punktes M für die Parabel a. Es ist also bei gleich langen Ordinaten der Punkte M und C_2^* von a, respective k_2^* die Subtangente der zweiten Parabel doppelt so groß wie die Subtangente der ersten und somit die Subnormale von k_2^* nur halb so groß wie die von a. Daraus ergibt sich, dass der Parameter der fraglichen Parabeln k_2 die Hälfte des Parameters von a ist.

Zieht man somit durch T die Parallele zu n, bis sie a im Punkte $\mathfrak{T}$ schneidet, so ist die durch $\mathfrak{T}$ gehende, auf n normale Sehne $\mathfrak{T}\mathfrak{B}$ von a doppelt so groß wie die Sehne TB_1 von k_2, also entsprechen sich beide Sehnen in der ähnlichen Lage von a und k_2. Man hat deshalb bloß die Strecke $B_1\mathfrak{T}$ in drei gleiche Theile zu theilen; alsdann ist der erste Theilungspunkt bei B_1 der Ähnlichkeitspunkt zwischen k_2 und a.

Über den weiteren Vorgang der Lösung ist nichts weiter zu bemerken.



Auch dieses Ergebnis stimmt mit der Šolín'schen Construction überein.

13. Im vorhergehenden ist der Vorgang der Lösung auch für den Fall vorgezeichnet, dass die Spurcurve a des Kegels nicht verzeichnet vorliegt, dass man aber überhaupt einen festen, genau verzeichneten, allgemeinen Kegelschnitt q besitzt. Dessenungeachtet soll dennoch die Durchführung der Axenconstruction unter dieser Voraussetzung entwickelt werden, schon aus dem Grunde, weil diese Construction praktischen Wert hat, so beispielsweise, wenn es sich um die Axen irgendeiner Fläche zweiten Grades handelt, für die man ohnedies in der Regel wenigstens einen Kegelschnitt, etwa den Contourkegelschnitt, an und für sich genau zu verzeichnen hat. Da wird man diesen Kegelschnitt bereits zur Construction benützen und nicht erst die Spur des asymptotischen Kegels, beziehungsweise den sie vertretenden Kegelschnitt verzeichnen. Denn wenn man erst einen Kegelschnitt nur behufs der Axenermittlung genau verzeichnen müsste, so wäre es dann sicherlich die gleichseitige Hyperbel b, welche den Kreis k_1 unmittelbar in den Spurpunkten XYZ der Axen schneidet.

Ist der feste Kegelschnitt q die Spurcurve der Fläche zweiten Grades, dann erfährt die früher erläuterte Lösung offenbar keine Änderung.

Ist aber q irgendein Kegelschnitt, dessen Ebene oder eine zu ihr parallele Ebene wir als Π annehmen, so wird die Construction von k_1 hiedurch nicht beeinflusst, und es wird sich nur darum handeln, den mit q ähnlich liegenden Kegelschnitt k_3, welcher dem Dreieck XYZ umgeschrieben ist, zu finden.

Wir können hier geradeso schließen, wie bei der Ermittlung von k_2; wir wollen aber, wie wir es auch für k_2 hätten analog thun können, hier folgendermaßen vorgehen.

14. Wir ermitteln den Kegelschnittbüschel $[k_3]$, welcher aus Kegelschnitten besteht, die analog wie früher durch die unendlich fernen Punkte H_1, H_2 von q gehen und den auf b sich stützenden Polardreiecken von a umgeschrieben sind. Zuerst suchen wir die Gerade g, welche zusammen mit $\mathfrak{u}$ ein Element in $[k_3]$ ausmacht. $(\mathfrak{u}, g)$ ist offenbar derjenige mit q

ähnlich liegende Kegelschnitt, welcher dem bei A rechtwinkeligen Dreiecke, das A und die unendlich fernen Punkte von b zu Eckpunkten hat. umgeschrieben ist. S' ist auch hier, wie für jedes andere unserer Polardreiecke als Höhenschnitt für dieses rechtwinkelige, unendlich große Dreieck aufzufassen; infolge dessen ist (AS') die zur Hypothenuse desselben gehörige Höhe.

Nun denken wir uns irgendein rechtwinkeliges Dreieck AEF, dessen Katheten mit den Axen von a zusammenfallen und dessen Hypothenuse zu (AS') normal ist und denken uns weiter diesem Dreiecke einen zu q ähnlich liegenden Kegelschnitt $\mathfrak{k}_3$ umgeschrieben. Ziehen wir durch E die Gerade, welche zur Richtung von (AE), und durch F die Gerade, welche zur Richtung von (AF) in Bezug auf q conjugiert ist, so werden sich beide so gezogenen Geraden in einem Punkte G schneiden, und (AG) ist ein Durchmesser von $\mathfrak{k}_3$. Bringen wir (EF) durch Parallelverschiebung in eine neue Lage, so bekommen wir auch einen neuen, zu q ähnlich liegenden Kegelschnitt $\mathfrak{k}_3$, und alle derartigen Kegelschnitte werden sich in A berühren. Rückt (EF) ins Unendliche, so zerfällt $\mathfrak{k}_3$ in $\mathfrak{u}$ und die gemeinsame Tangente in A an alle Kegelschnitte $\mathfrak{k}_3$; diese Tangente ist offenbar die gesuchte Gerade g.

Hat man somit (AG), wie angegeben, construiert, so construiert man die zu (AG) in Bezug auf q conjugierte Durchmesserrichtung; alsdann erhält man g in der durch A gehenden Geraden dieser Richtung. g schneidet b außer in A noch in dem leicht construierbaren Punkte D_3; es ist beispielsweise der Abschnitt auf g zwischen A und einer Asymptote von b gleich dem Abschnitte zwischen der zweiten Asymptote und D_3.

Der Punkt D_3 gehört bereits dem Kegelschnitte k_3 an.

Auf g liegt auch der Grundpunkt C_3 von $[k_3]$. Derselbe ist der Schnittpunkt der im Endlichen liegenden Tangenten von H_1 und H_2 an c. Durch C_3 gehen also die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte solcher Tangentenpaare von c, welche zu den Paaren conjugierter Durchmesser von q parallel sind.

Es geht durch C_3 insbesondere die Verbindungsgerade l der Berührungspunkte der zu den Axen h_1, h_2 von q parallelen Tangenten an c. Diese Tangenten schneiden sich in einem

Punkte der Directrix (AS') von c. Die von (AS') durch diese Tangenten harmonisch getrennte Gerade geht durch den Brennpunkt C_1 unserer Parabel, und die zu ihr durch C_1 geführte Senkrechte ist die Gerade l.

Daraus folgt folgende Construction von l.

Man ermittle eine Gerade, welche zu (AS') in Bezug auf die Axen von q antiparallel ist und führe durch C_1 die Senkrechte zu dieser Geraden; dieselbe ist bereits die Gerade l und $C_3 = (lg)$.

Die Gerade $l = (C_1 C_3)$ trifft den Kreis k_1, dem zweiten Satze des Artikels 6 zufolge in einem Punkte V, welcher gleichfalls dem Kegelschnitte k_3 angehört.

Der Kegelschnitt k_3 ist nun vollständig durch die drei Punkte C_3, D_3, V bestimmt. Wir können etwa den durch V gehenden Durchmesser VW desselben construieren, indem wir die zu den Richtungen (VC_3), (VD_3) in Bezug auf q conjugierten Richtungen durch C_3, respective durch D_3 führen. Der Schnitt beider ist der Punkt W. Nun ermitteln wir aus der Strecke (VW) und dem zu ihr parallelen Durchmesser von q einen Ähnlichkeitspunkt zwischen q und k_3. Durch diese ähnliche Lage wird k_3 in q und k_1 in einen Kreis überführt; den Schnittpunkten dieses Kreises mit q entsprechen dann auf k_1 außer V die Spurpunkte XYZ der Axen.

15. Wir hätten ebenso die Parabel c_1 zur Construction von k_3 benützen können. Für dieselbe haben wir den Brennpunkt C_1' früher schon construiert; die Tangente in S' an b ist die Leitgerade derselben. Infolge dessen ist die Gerade l', welche man durch C_1' senkrecht zu einer Antiparallelen von t in Bezug auf die Axen des Kegelschnittes q führt, die Verbindungsgerade der Berührungspunkte solcher Tangenten an c_1, die zu den Axen von q parallel sind.

Da diese Gerade l' identisch ist mit $(C_1'C_3')$, so trifft sie nach dem im vorigen Artikel schon citierten Satze den Kreis k_1 gleichfalls in einem Punkte von k_3. Es müssen sich also l' und l in dem Punkte V auf k_1 schneiden.

16. Ist q eine Parabel, so sind H_1, H_2 auf u benachbart; man findet hier C_3 einfach als den Berührungspunkt von c mit der zur Axe von q parallelen Tangente. Man bringt dann (AC_3)

mit b in D_3 und $(C_1 C_3)$ mit k_1 in V zum Schnitte; dadurch ist die Parabel k_3 bestimmt.

Übrigens kann (AC_3) leicht auch als Tangente in A an eine Parabel, welche durch A, dann durch die Schnittpunkte irgendeiner zu (AS') senkrechten Geraden mit den Axen von a geht und deren Axe parallel zu der von q ist, construiert werden.

Ebenso einfach kann c_1 benützt werden, um den Punkt C_3' zu erhalten.

Bestimmt man etwa zu einer der construierten Sehnen der Parabel k_3 den conjugierten Durchmesser und seinen Endpunkt, so bildet dieser mit den Endpunkten der Sehne ein Dreieck; das ähnlich liegende Dreieck, welches q eingeschrieben, lässt sich leicht ermitteln, wodurch der weitere Verlauf der Construction bestimmt ist.

Sind beide Kegelschnitte a und q Parabeln, so bestimmt man die Parabel k_3 einfach durch C_3, C_3' als Berührungspunkte der Tangenten an c, respective c_1, die zur Axe von q parallel sind.

Die weitere Construction ist wie zuvor. Selbstverständlich könnte man auch den Punkt D_3 bestimmen und zur Construction benützen.

17. Angenommen, dass q und a coaxial sind. Diesen Fall wird man vortheilhaft voraussetzen, wenn man eine genaue Ellipsenschablone besitzt.

Für $[k_3]$ ist hier, anlehnend an das Vorangehende, g derjenige Durchmesser von q, welcher zu der Richtung der Geraden d in Bezug auf q conjugiert ist. Die Gerade l fällt mit d zusammen, so dass auch hier $(C_1 C_3) \equiv d$. Es ist somit nur der zweite Schnittpunkt D_3 von g mit b zu construieren. Schneidet d den Kreis k_1 in T, so ist DT ein gemeinschaftlicher Durchmesser von k_1 und k_3, weil ja g conjugiert ist zu d in Bezug auf q.

Hiemit ist die weitere Construction gegeben.

18. Als Anwendung soll hier die Construction der Axen eines Ellipsoids, das durch drei conjugierte Durchmesser AB, CD, EF gegeben ist, durchgeführt werden.

Die Construction der Axen einer allgemeinen Fläche zweiten Grades ist graphisch wohl zum erstenmal von W. Fiedler in seinem Meisterwerke über darstellende Geometrie entwickelt worden.[1]

Des Vergleiches halber soll hier dieselbe Anordnung der Darstellung getroffen werden, wie bei Fiedler an der citierten Stelle, nämlich, der Durchmesser CD sei parallel zur ersten, der Durchmesser EF zu zweiten Projectionsebene und der Durchmesser AB sei parallel zur Schnittgeraden beider; der Punkt F liege in der ersten Projectionsebene. Die erste Projection u' des Diametralkegelschnittes u, welcher durch die Punkte A, B, C, D geht, werde wie dort als genau gezeichnet vorausgesetzt; wir wollen sie für die weitere Construction zugrunde legen.

Betrachten wir den asymptotischen Kegel K unseres Ellipsoids. Derselbe schneidet die erste Projectionsebene in einem imaginären Kegelschnitte a, dessen Mittelpunkt in der Projection F' von F liegt. Wir denken uns nun den Kegel K in der Richtung (AB) um die Strecke $F'M'$ parallel nach K^* verschoben. Dadurch gelangt der Kegelschnitt a in die Lage a^*, in welcher er durch den reellen Kegelschnitt u' repräsentiert wird.

Nun ermitteln wir zunächst die Axen des Kegelschnittes u' aus den conjugierten Durchmessern $A'B'$, $C'D'$. Die gleichseitige Hyperbel b ist dann bestimmt. Sie geht durch die unendlich weiten Punkte der soeben ermittelten Axen, weiter durch M' und E'; ihre Tangente t in E' ist senkrecht zu $(C'D')$. Man kann also ohneweiters wie früher den Mittelpunkt $\mathfrak{B}$ von b linear construieren. Machen wir nun auf der Geraden $(\mathfrak{B}M')$ die Strecke $M'\mathfrak{B}'$ gleich $(\mathfrak{B}M')$, so ist die Polare d von $\mathfrak{B}'$ in Bezug auf u' schon auch die Polare von $\mathfrak{B}$ in Bezug auf a^*. Weiter ermittelt man die den Punkten E' und M' auf der Hyperbel b diametral gegenüberliegenden Punkte D_1, respective D_2 und bringt die Gerade d mit der Geraden p im Punkte T zum Schnitte. Dabei wurde p als die erste Spur der durch die Spitze von K^* gehenden und zum Verbindungsstrahle dieser Spitze mit $\mathfrak{B}$ normalen Ebene construiert.

[1] Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage im II. Bd. der 3. Auflage, S. 329, Taf. XI.

Nach Früherem hätte man mit Hilfe von u' die weiteren Schnittpunkte X^+, Y^+, Z^+ des über D_1T als Durchmesser beschriebenen Kreises k^+, dessen Mittelpunkt mit O^+ bezeichnet werden möge, mit dem zu u' ähnlich liegenden Kegelschnitte u^+, der die Strecke D_2T zum Durchmesser hat, zu ermitteln und hierauf das Dreieck $X^+Y^+Z^+$ äquipollent der Strecke $E'M'$ nach XYZ zu verschieben, um die Spurpunkte X, Y, Z der fraglichen Axen zu erhalten.

Wir suchen zuerst den zu D_2T parallelen Durchmesser $\mathfrak{D}_2T_1$ in u', verbinden T mit T_1 und D_2 mit $\mathfrak{D}_2$. Der Schnittpunkt P dieser Verbindungsgeraden ist das äußere Ähnlichkeitscentrum für die ähnliche Lage von u^+ und u'. Wir schneiden weiter (D_1P) mit der durch T_1 zu TD_1 gezogenen Parallelen in $\mathfrak{D}_1$; dann entspricht dem Kreise k^+ der über $T_1\mathfrak{D}_1$ als Durchmesser beschriebene Kreis k_1 mit dem Mittelpunkte O_1. Dieser Kreis schneidet u' in den Punkten X_1, Y_1, Z_1, denen auf k^+ die Punkte X^+, Y^+, Z^+ durch unsere ähnliche Lage entsprechen würden. Statt aber k^+ und diese Punkte zu construieren, machen wir O^+O äquipollent der Strecke $E'M'$ und beschreiben um O als Mittelpunkt den Kreis k, dessen Halbmesser gleich ist TO^+ und auf dem die gesuchten Punkte X, Y, Z somit liegen werden.

Nun liegen die Kreise k^+, k, k_1 zu zweien ähnlich. Ihre Ähnlichkeitsaxe, welche die äußeren Ähnlichkeitspunkte verbindet, ist die durch P zu $(M'B')$ gezogene Parallele, welche von (OO_1) in dem äußeren Ähnlichkeitspunkte Q von k_1 und k geschnitten wird. Die Dreiecke $X_1Y_1Z_1$ und XYZ liegen mithin auch ähnlich für Q als äußeren Ähnlichkeitspunkt. Infolge dessen schneiden die Geraden (QX_1), (QY_1), (QZ_1) auf k die gesuchten Punkte X, Y, Z ein.

19. Bemerkung. Aus unserer allgemeinen Construction entnehmen wir sofort die Construction des gemeinsamen Polardreieckes zweier Kegelschnitte m, n in einer Ebene mit Hilfe eines festen, in der Ebene liegenden Kegelschnittes q und des dem Polardreiecke umgeschriebenen Kreises.

Wir haben da zuerst den Kegelschnitt b festzulegen, welcher der unendlich fernen Geraden der Ebene doppelt conjugiert ist. Derselbe geht durch die Mittelpunkte M, N

von m, respective n; die Polarcurve von b in Bezug auf m ist infolge dessen eine Parabel c, in Bezug auf n eine Parabel c', die Brennpunkte dieser Parabeln seien C_1, respective C_1'. Die zweiten Schnittpunkte von (MC_1) und (NC_1) mit b seien D_1, D_2. Alsdann liegen die vier Punkte C_1, C_1', D_1, D_1' auf dem Kreise, welcher dem gesuchten Polardreiecke umgeschrieben ist.

Ferner bestimmen wir den Mittelpunkt C_2, respective C_2' der Tangenteninvolution von c, respective c', deren Paare parallel sind zu den conjugierten Durchmesserpaaren von q.

Dem Kegelschnitte b ist ein Polardreieck von m umgeschrieben, dessen eine Ecke M ist, dessen zwei andere Ecken auf der unendlich fernen Geraden u liegen und das gemeinsame Paar der durch m und n auf u festgelegten Involutionen conjugierter Punkte vorstellen, also auch imaginär sein können. Jedenfalls geht die Gerade g des früher mit $[k_2]$ bezeichneten Kegelschnittbüschels, welche mit u ein Element desselben bildet, durch M. Analoges gilt bezüglich des Kegelschnittes n.

Die Gerade (MC_2) schneidet q also noch in D_2 und die Gerade (NC_2') in D_2'.

Die Punkte C_2, C_2', D_2, D_2' liegen also auf einem mit q ähnlich liegenden Kegelschnitte k_3, der dem gesuchten Dreiecke umgeschrieben ist und durch drei der eben ermittelten Punkte bestimmt ist.

Wie diese ähnliche Lage zur Vollendung der Construction dient, ist hier schon wiederholt erwähnt worden.

Hat man das gemeinsame Polardreieck gefunden, so ist die Construction der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte auf quadratische Aufgaben zurückgeführt und somit hier mitenthalten.

III. Construction der Kreisschnitte einer Fläche zweiten Grades.

20. Sind die Axen einer Fläche zweiten Grades F bekannt, dann lässt sich die Ermittlung der Stellungen für die Kreisschnittebenen derselben leicht vollziehen.

Dazu benützen wir die Eigenschaften derjenigen gleichseitigen Hyperbel b in der Projectionsebene Π, die auch den

früheren Betrachtungen zu Grunde gelegt wurde. Dabei ist zu bemerken, dass die Kreisschnitte der Fläche auch die ihres Asymptotenkegels sind, und dass b demnach der zur unendlich fernen Geraden doppelt conjugierte Kegelschnitt ist in Bezug auf die Schnittcurve von F mit Π und auf den gleichfalls in Π liegenden Kreis, dessen Mittelpunkt S' die Orthogonalprojection des Mittelpunktes S von F auf Π ist, und dessen Halbmesser die Länge $SS'.\sqrt{-1}$ besitzt. Durch jede der drei Axen (SX), (SY), (SZ) gehen zwei Stellungen von Kreisschnittebenen der Fläche, die wir als die verbundenen Kreisschnittebenen bezeichnen. Von den drei Paaren verbundener Kreischnittebenen ist nur eines reell.

Die Ebene des durch (SX) etwa gehenden Paares möge K_1, K_2, ihre Spuren in Π mit s_1, s_2 bezeichnet werden. Der Spurpunkt in Π für die in der ersten Ebene durch S geführte, zu ihrer Spur s_1 normale Gerade heiße S_1; der analoge Punkt von K_2 heiße S_2.

Wir haben in Artikel 5 gesehen, dass diese Punkte S_1, S_2 gleichfalls auf $\bar{b}$ liegen müssen. Beschreiben wir deshalb über der Strecke $S'X$ als Durchmesser einen Kreis u, so wird derselbe die Hyperbel b in den Punkten S_1, S_2 schneiden, wodurch die Geraden s_1, s_2, also auch die Ebenen K_1, K_2 festgelegt sind.

Unsere Aufgabe reduciert sich also darauf, die Schnittpunkte S_1, S_2 des Kreises u mit b zu ermitteln, wenn die beiden anderen Schnittpunkte S', X gegeben sind. Dies kann, wie folgt, geschehen.

Wir beziehen sowohl u als b perspectiv auf das Strahlenbüschel um S', wodurch auf u und b zwei perspective Punktreihen $[u]$, respective $[b]^*$ entstehen. Letztere Punktreihe projicieren wir von X auf u nach $[b]$, so erhalten wir auf u zwei projective Punktreihen $[u]$, $[b]$, deren Doppelpunkte die fraglichen Punkte S_1, S_2 sind.

Ziehen wir durch S' und X die Parallelen zu den Asymptoten von b, so erhalten wir ein Rechteck $S'KXL$, für das $(S'X)$ eine Diagonale ist, und dessen zweite Diagonale KL durch den Mittelpunkt B von b geht, da sie für b der zur Sehne $S'X$ conjugierte Durchmesser ist.

Die Endpunkte K, L dieser Diagonale entsprechen sich in den projectiven Punktreihen $[u]$, $[b]$ gegenseitig; infolge dessen bilden beide Punktreihen eine Involution; das Centrum derselben liegt auf (KL), und somit ist die Axe der Involution $(S_1 S_2)$ senkrecht auf (KL) und die Sehne $S_1 S_2$ wird durch (KL) halbiert. Da $S_1 S_2$ auch eine Sehne von b ist, so haben wir diese zum Durchmesser (KL) von b senkrechte Sehne so zu führen, dass sie durch denselben halbiert wird. Fällt also (KL) nicht mit einer Axe von b zusammen, so muss $(S_1 S_2)$ durch den Mittelpunkt B gehen. Aber $(S_1 S_2)$ geht auch dann durch B, wenn (KL) eine Axe von b ist, denn es ist bekannt, dass die Kreise, welche die zu einer Axe einer gleichseitigen Hyperbel parallelen Sehnen zu Durchmessern haben, einen Büschel bilden, dessen Grundpunkte die Endpunkte der zu den Sehnen parallelen Axe von b sind. Daraus folgt:

Die Spuren s_1, s_2 der durch die Axe (SX) gehenden Kreisschnittebenen von F werden erhalten, indem man über der Strecke $S'X$ als Durchmesser einen Kreis beschreibt und zu dem nach B gehenden Durchmesser derselben in B die Senkrechte errichtet; diese schneidet den Kreis in den Punkten S_1, S_2, und es ist $s_1 = (XS_1)$, $s_2 = (XS_2)$.

Man erkennt leicht, dass von den drei Axenspurpunkten XYZ einer, nennen wir ihn X, auf dem einen, die beiden übrigen (mit S') auf dem zweiten Hyperbelaste liegen. Construieren wir für alle drei Strecken $S'X, S'Y, S'Z$ als Diagonalen Rechtecke, deren Seiten parallel zu den Asymptoten von b sind, und deren zweite Diagonalen, wie wir wissen, durch B gehen, so sieht man, dass nur für die erste Axe $(S'X)$ sich reelle Punkte S_1, S_2 ergeben. Es gehen somit nur durch diese Axe reelle verbundene Kreisschnittebenen, während die übrigen imaginär sind; ihre Construction ist aber auch durch unsere Ausführung erledigt.

Da $(S_1 S_2)$ ein Durchmesser von b ist, so sind die Geraden s_1, s_2 zu den Asymptoten von b, also auch zu den Axen der Spurcurve von F in Π antiparallel, was auch die folgende Erwägung bestätigt.

Durch zwei verbundene Kreisschnitte lässt sich eine Kugel legen, welche Π in einem Kreise o schneidet; die Ebenen dieser Kreisschnitte schneiden Π in zwei o und der Spurcurve von F gemeinsamen Sehnen, und von diesen weiß man, dass sie zu den Axen der Spurcurve, also auch zu den Asymptoten von b antiparallel sind. Somit sind auch die Geraden s_1, s_2 zu diesen Asymptoten antiparallel und schneiden b in den Endpunkten eines Durchmessers.

In unserer Figur sind darnach die Spuren $s_1 \parallel (XS_1)$, $s_2 \parallel (X_2S_2)$ für die Kreisschnittebenen (Ms_1), (Ms_2) des Ellipsoids construiert worden. Es wurde $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ parallel und gleich $E'M'$ gemacht und über $M'X$ als Durchmesser der Kreis w beschrieben und zur Verbindungsgeraden seines Mitlelpunktes mit $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{B}_1$ die Senkrechte gefällt, welche w bereits in den Punkten S_1, S_2 schneidet.

21. Bemerkung. Durch den Kegelschnitt a als Focalkegelschnitt ist eine confocale Flächenschar zweiter Classe bestimmt. Durch jeden Punkt S gehen drei Flächen dieser Schar; eine von ihnen P schneidet a reell; die Normale dieser Fläche in S ist die reelle Kreisschnittebenen tragende Axe (SX) des Kegels Q, welcher S zur Spitze hat und durch a geht; die durch (SX) gelegten, zu den reellen Kreisschnittebenen von P normalen Ebenen sind die durch die Axe (SX) verbundenen Kreisschnittebenen von Q.

Dies ist eine unmittelbare Folge des in Artikel 3 und 5 Gesagten und gibt uns ein Mittel auf die Hand, die durch einen Punkt S gehenden drei Flächen einer confocalen Schar bequem zu construieren, wenn die Focalkegelschnitte der Schar ermittelt sind.

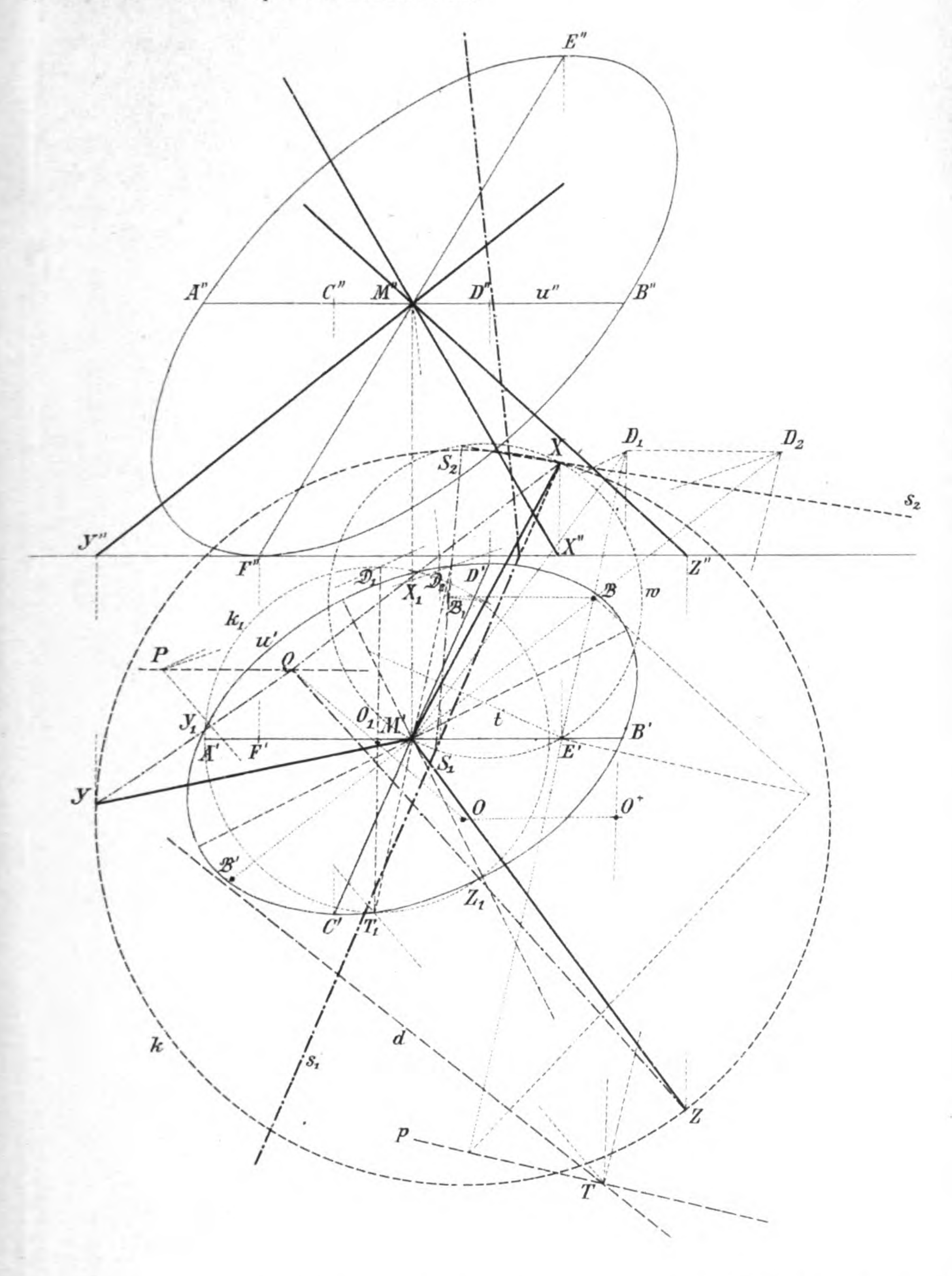
Man verbindet S mit einem der Focalkegelschnitte, am besten mit der Ellipse a durch eine Kegelfläche, und ermittelt deren Hauptaxen x, y, z, sowie die reellen Kreisschnittebenen S_1, S_2 durch S mit ihren Spuren s_1, s_2 in der Ebene von a und weiter in bekannter Weise die reellen Focalaxen f_1, f_2 dieses Kegels.

Durch S geht ein einschaliges Hyperboloid, und f_1, f_2 sind zwei Geraden auf demselben, wodurch es bestimmt ist; man kann seine Schnitte mit den Symmetrieebenen sofort ermitteln,

dass man dann auch die Summe, beziehungsweise die Differenz der Leitstrahlen für den betreffenden Kegelschnitt kennt.

Legt man an *a* zu den Ebenen S_1, S_2 parallele Tangenten, so gehören die Berührungspunkte derselben demjenigen Kegelschnitte an, in welchem die Ebene der Ellipse *a* von dem durch *S* gehenden zweischaligen Hyperboloid der Schar getroffen wird. Dadurch ist dieser Kegelschnitt festgelegt. Da die zu s_1 und s_2 senkrechten Ebenen das zweischalige Hyperboloid nach Kreisen schneiden, so ist dasselbe dadurch vollständig dargestellt.

Ferner denken wir uns *S* mit der Focalhyperbel *h* der Schar durch einen Kegel verbunden; derselbe hat die Geraden x, y, z gleichfalls zu Axen. Wir ermitteln seine reellen Kreisschnittebenen und legen die zu ihnen parallelen Tangenten an *h*, die immer reell sein werden, da das Ellipsoid die Focalhyperbel reell schneidet. Dadurch ist der Schnitt des Ellipsoids mit der Ebene von *h* festgestellt, und da die Kreisschnittebenen desselben zu den soeben erwähnten Tangenten normal sind, so lässt sich auch diese Fläche leicht darstellen.



Autor del. Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.
Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CIX. Abth. IIa. 1900.

XVI. SITZUNG VOM 21. JUNI 1900.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Rollett übersendet eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Oscar Zoth, Assistenten am physiologischen Institute in Graz, welche den Titel führt: »Über die Drehmomente der Augenmuskeln, bezogen auf das rechtwinkelige Coordinatensystem des Drehpunktes«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit von mag. pharm. Leo Stuchlik: »Über Papaverinol«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner legt eine Arbeit von Herrn stud. med. Albert Aigner in Wien vor, welche den Titel führt: »Über das Epithel im Nebenhoden einiger Säugethiere und seine sekretorische Thätigkeit«.

Herr Dr. J. Holetschek, Adjunct der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Über die Unsichtbarkeit von Kometen für den Äquator und für höhere geographische Breiten«.

Das w. M. Herr Hofrath Lieben überreicht eine Arbeit aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien: »Untersuchungen über die Veresterung unsymmetrischer zwei- und mehratomiger Säuren«, von Rudolf Wegscheider. III. Abhandlung: »Über die Veresterung der 3- und 4-Nitrophtalsäure«, experimentell bearbeitet von Alfred Lipschitz.

Herr Hofrath Lieben überreicht ferner eine in seinem Laboratorium von Herrn F. X. Schmalzhofer ausgeführte

Arbeit: »Über die Condensation von Acetaldehyd mit Propionaldehyd«.

Das w. M. Herr Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Fische aus dem Stillen Ocean. Ergebnisse einer Reise nach dem Pacific (Schauinsland, 1896—1897)«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung des Herrn Dr. H. Mache vor, betitelt: »Über die Regenbildung«.

Derselbe legt ferner eine Abhandlung des Herrn Dr. Felix M. Exner vor: »Messungen der täglichen Temperaturschwankungen in verschiedenen Tiefen des Wolfgangsees«.

Derselbe legt weiters eine Arbeit des Herrn Dr. H. Benndorf vor, betitelt: »Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. VI. Über die Störungen des normalen atmosphärischen Potentialgefälles durch Bodenerhebungen«.

Das w. M. Herr Prof. G. v. Escherich legt eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. O. Biermann in Brünn vor, betitelt: »Über die Discriminante einer in der Theorie der doppelt periodischen Functionen auftretenden Transformationsgleichung«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Barbera L., Critica del newtonianismo ovvero delle cause dei moti planetarii. Bologna, 1900, 8⁰.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XVII. SITZUNG VOM 5. JULI 1900.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXI, Heft V (Mai 1900).

Der Secretär Herr Hofrath V. v. Lang legt eine im physikalischen Cabinet der Universität Wien ausgeführte Arbeit von Dr. Anton Lampa vor, welche den Titel führt: »Eine Studie über den Wehnelt'schen Unterbrecher«.

Ferner legt der Secretär folgende von Herrn Prof. J. Herzig eingesandte Arbeiten aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien vor:

I. »Zur Kenntnis der Äther des Monomethylphloroglucins«, von F. Theuer.

II. »Zur Kenntnis der Äther des Dimethylphloroglucins«, von M. Hauser.

III. »Über den Trimethyläther des Phloroglucins«, von H. Kaserer.

IV. »Über den Einfluss der eintretenden Radicale auf die Tautomerie des Phloroglucins«, von F. Kaufler.

V. »Über einige Derivate des Brenzcatechins«, von O. Wisinger.

VI. »Über den Stellungsnachweis im Monomethyläther des Dimethylphloroglucins«, von C. Bosse.

Endlich legt derselbe zwei Arbeiten aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck vor, und zwar:

1. »Untersuchungen über permanente Magnete. IV. Bemerkungen über die Abnahme des Momentes«, von Herrn Prof. Ignaz Klemenčič.
2. »Über den Verlauf der Geschwindigkeit eines Projectils in der Nähe der Gewehrmündung«, von Dr. M. Radaković.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Zd. H. Skraup in Graz übersendet eine von ihm im chemischen Institute in Graz ausgeführte Arbeit, betitelt: »Zur Constitution der Chinaalkaloide. VI. Mittheilung: Die Überführung der Cincholoiponsäure in eine stickstoffreie Säure«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Hann übersendet eine Arbeit von Herrn Prof. Dr. Paul Czermak in Innsbruck, betitelt: »Eine neue Beobachtungsmethode für Luftwirbelringe«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendet zwei im chemischen Institute der k. k. deutschen Universität ausgeführte Arbeiten von Herrn Dr. Hans Meyer:

I. »Zur Kenntnis der Aminosäuren«.

II. »Über stickstoffhaltige Derivate des Cantharidins«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine vorläufige Mittheilung von Herrn Carl Přibram in Graz »Über die photographische Aufnahme der elektrischen Entladungen auf rotierenden Films«.

Das w. M. Herr Hofrath E. v. Mojsisovics überreicht zwei Arbeiten von Herrn Ing. Josef Knett in Karlsbad, welche als XX. und XXI. Mittheilung der Erdbeben-Commission zur Veröffentlichung bestimmt sind und den Titel führen:

I. »Über die Beziehung zwischen Erdbeben und Detonationen«.

II. »Bericht über das Detonationsphänomen im Duppauer Gebirge am 14. August 1899«.

Das c. M. Herr Prof. J. v. Hepperger in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Bahnbestimmung des Biela-schen Kometen auf Grund der Beobachtungen aus dem Jahre 1805«.

Herr k. k. Regierungsrath Prof. Josef Luksch in Fiume übersendet zwei Abhandlungen unter dem Titel:

I. »Physikalische Untersuchungen im Rothen Meere. (Südliche Hälfte.) Expedition S. M. Schiff ‚Pola' 1897 auf 1898«.

II. »Untersuchungen über die Transparenz und die Farbe des Seewassers im Mittelländischen, Ägäischen und Rothen Meere während der Expedition S. M. Schiff ‚Pola‘ 1890 bis 1898«.

Das w. M. Herr Hofrath Franz Steindachner legt eine Abhandlung vor: »Bericht über die herpetologischen Aufsammlungen während der Expedition S. M. Schiff ‚Pola‘ in das Rothe Meer, nördliche und südliche Hälfte, 1895/96 und 1897/98«.

Ferner überreicht derselbe eine Mittheilung von Herrn Dr. Rudolf Sturany, betitelt: »Diagnosen neuer Gastropoden aus dem Rothen Meere«, als Vorläufer einer Bearbeitung der gesammten von S. M. Schiff »Pola« gefundenen Gastropoden.

Herr Walter Ziegler in Wanghausen übersendet folgende zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität:

1. »Zieglerotypie« (Herstellung von Tiefdruckplatten zu mehrfarbigen Tiefdrucken mit beliebig viel-Farbenplatten auf eine bisher ungeübte Art).
2. »Natürlich erzeugte Ornamentelemente«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Stiattesi D. R., Spoglio delle osservazioni sismiche dal 1° Novembre 1898 al 31° Ottobre 1899. (Anno meteorico 1899.) — (Bollettino sismografico dell' osservatorio di Quarto [Firenze].) Borgo S. Lorenzo 1900, 8°.

Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen auf Grund der Beobachtungen aus dem Jahre 1805

von

J. v. Hepperger,

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1900.)

Der Komet befand sich zur Zeit seiner am 10. November 1805 durch Pons in Marseille erfolgten Entdeckung im Sternbilde Andromeda nicht weit vom Orte entfernt, welcher später als Radiationspunkt der Bieliden erkannt worden ist. Er hatte das Aussehen eines runden, gegen die Mitte zu verdichteten Nebels mit fast planetarischem Kerne und bewahrte dasselbe auch bei zunehmender Helligkeit während seiner vierwöchentlichen Sichtbarkeit auf der nördlichen Erdhemisphäre. Am 8. und 9. December, um die Zeit der Erdnähe, war der Komet trotz seiner geringen Erhebung über dem Horizonte und der Helligkeit der noch fast voll erleuchteten Mondscheibe mit freiem Auge leicht zu sehen. Am 8. December betrug nach den Messungen Schröters in Lilienthal der Durchmesser des ganzen Kometen 330″, der Verdichtung, welche bereits als Kern gelten konnte, 6″ und des hellsten Theiles des Kernes 4″.

Die rasche südliche Bewegung des Kometen, welcher in den Vormittagsstunden des 6. December den absteigenden Knoten seiner Bahn passierte und am 9. December abends der Erde am nächsten kam ($\Delta = 0\cdot0366$), entzog ihn fernerer Beobachtung auf der nördlichen Halbkugel und führte ihn binnen fünf Tagen bis zum 75. Grade südlicher Declination.

Von Beobachtungen auf der Südhalbkugel liegt nur ein einziger Bericht vor, welcher mit einer Einleitung und einigen

auf die Reduction bezüglichen Ausführungen Winneckes versehen, durch dessen Vermittelung im 15. Jahrgange der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft publiciert worden ist. In diesem Berichte sagt dessen Verfasser Malavois, dass er den Kometen, welcher bereits seit 10. December auf Isle de France gesehen worden sei, erst am 14. December habe beobachten können. Seine Beobachtungen seien mit einem guten, genau adjustierten, mit Fernrohr versehenen Sextanten von 1 Fuß Radius ausgeführt; die nächsten drei Tage haben Berufsgeschäfte oder trübes Wetter die Beobachtungen vereitelt und später sei der Komet überhaupt nicht mehr zu sehen gewesen. Die äußerste Hülle des Kometen habe nach Schätzung einen Durchmesser von ungefähr 45′, der hellste Theil oder die Aureole, welche schon zu Beginn der Abenddämmerung sichtbar wurde, während Sterne der siebenten Größe kaum wahrgenommen werden konnten, einen solchen von 20′ bis 25′ besessen Der Komet (womit wohl nur der Kern gemeint sein kann) sei im Fernrohre von 16facher Vergrößerung durch einen kleinen, dunklen Streifen (im Originale »petite bande obscure«) in zwei Theile zerlegt erschienen und dessen Durchmesser auf ungefähr 1′ geschätzt worden, doch habe sich der Rand nur sehr unsicher von der umgebenden Hülle trennen lassen. Im Anschlusse an diesen Bericht sind noch die Beobachtungen Dupeloux' mitgetheilt, welche mit denen Malavois' in dieser Abhandlung den übrigen Beobachtungen des Kometen angereiht sind.

Wenn man die Beobachtungsdaten vom 8. und 14. December mit einander vergleicht, so ergibt sich das überraschende Resultat, dass die scheinbaren Dimensionen des Kometen trotz der Zunahme seiner Entfernung von der Erde auf das Achtfache gewachsen sind. Nachdem die Perihelszeit auf den 2. Jänner fällt, so kann man kaum annehmen, dass die Annäherung an die Sonne in dieser kurzen Zeit so gewaltige Änderungen hervorgebracht haben sollte, umsoweniger, als auch die gewöhnlich damit verbundenen Ausströmungen und die hiedurch veranlasste Schweifentwickelung gänzlich unterblieben zu sein scheinen. Es spricht auch der Umstand, dass bereits am 18. December der Komet nicht mehr aufgefunden werden konnte,

dafür, dass seine Helligkeit, in Übereinstimmung mit der Theorie, beträchtlich abgenommen und daher keine abnormale Lichtentwickelung stattgefunden habe. Und so dürfte wohl der Unterschied zwischen den angegebenen Dimensionen größentheils auf die außerordentliche Verschiedenheit der Durchsichtigkeit der Luft und der angewandten optischen Hilfsmittel (13füßiges Spiegelteleskop und kleines Handfernrohr) zurückzuführen sein, nachdem bedeutende Fehler in der Schätzung von Winkeln bei einem mit Sextantenmessungen vertrauten Beobachter wohl nicht anzunehmen sind.

Ein sehr merkwürdiges und schwierig zu deutendes Phänomen ist auch die scheinbare Theilung des Kernes durch den dunklen Streifen. Winnecke wirft diesbezüglich die Frage auf, ob hierin nicht der Anfang der Vorgänge zu erblicken sei, welche schließlich zur Theilung und zum Zerfalle des Kometen geführt haben.

In dieser Fassung ist die Frage schwer zu beantworten. Es dürfte jedoch die beobachtete Erscheinung kaum als Beginn einer wirklichen Theilung des Kernes aufzufassen sein, da die Kreisform des Randes, nach der Angabe nur eines Durchmessers zu schließen, durch das Auftreten des dunklen Streifens nicht merklich geändert worden zu sein scheint und der Annahme einer Spaltung des Kernes ohne vorausgegangene oder gleichzeitig erfolgende Änderung der Form gewichtige Bedenken entgegenstehen.

Die den Beobachtungen auf Isle de France entsprechenden Örter des Kometen sind zu ungenau, um zu einer Verbesserung der Bahnelemente benützt zu werden.

Die Ephemeride des Kometen ist aus folgenden Elementen gerechnet worden:

Mittleres Äquinox 1805·0
Epoche und Osculation 1805 Dec. 3·0

$M =$	355°	37′	23″67
$\Pi =$	109	27	18·73
$\Omega =$	251	15	31·84
$i =$	13	36	26·16
$\varphi =$	48	13	17·23
$\mu =$			526·6007

unter Berücksichtigung nachstehender Störungen durch die Erde

$$\left(m = \frac{1}{355499}\right).$$

1805 0ʰ M. Z. Paris	ΔM	ΔΠ	ΔΩ	Δi	Δφ	Δμ
Novemb. 10	—25″73	+ 9″01	+ 2″70	— 2″57	— 46″28	+0″4518
12	—24·42	8·98	2·48	— 2·47	— 45·48	4444
14	—23·05	8·92	2·25	— 2·35	— 44·51	4354
16	—21·61	8·83	2·00	— 2·21	— 43·36	4243
18	—20·09	8·68	1·74	— 2·05	— 41·95	4108
20	—18·47	8·46	1·47	— 1·86	— 40·18	3939
22	—16·71	8·15	1·19	— 1·64	— 37·93	3723
24	—14·76	7·70	0·91	— 1·39	— 35·02	3441
26	—12·55	7·03	0·63	— 1·09	— 31·16	3069
28	— 9·94	6·02	0·37	— 0·76	— 25·84	2557
30	— 6·75	4·47	0·16	— 0·40	— 18·29	1827
December 1	— 4·83	3·36	0·08	— 0·23	— 13·35	1342
2	— 2·61	+ 1·91	+ 0·02	— 0·09	— 7·37	+ 744
3	0	0	0	0	0	0
4	+ 3·08	— 2·55	0	— 0·03	+ 9·22	— 935
5	6·78	— 6·01	+ 0·03	— 0·28	20·80	2113
6	11·17	—10·70	+ 0·05	— 0·90	35·22	3583
7	16·26	—17·01	— 0·03	— 2·13	52·60	5363
8	21·74	—25·07	— 0·36	— 4·25	72·16	7375
9	26·94	—34·54	— 1·15	— 7·40	91·61	9391
10	30·95	—44·31	— 2·51	—11·35	107·71	1·1078
11	33·22	—53·03	— 4·35	—15·52	118·25	1·2202
12	33·84	—59·80	— 6·41	—19·35	123·24	1·2758
13	33·32	—64·86	— 8·45	—22·53	124·25	1·2901
14	32·15	—68·55	—10·32	—25·05	122·97	1·2802
15	+30·69	—71·05	—11·97	—27·00	+120·59	+1·2585

Sonnenörter nach Leverrier,

reduciert auf 1805·0 und Sternzeit.

1805 0ʰ M. Z. Paris		L			B	log R	Sternzeit		
November	6	223°	39'	7″44	+0″74	9·9957842	15ʰ	0ᵐ	59ˢ6
	8	225	39	42·04	0·55	5774		8	52·7
	10	227	40	23·92	0·29	3783		16	45·8
	12	229	41	13·42	+0·02	1866		24	38·9
	14	231	42	10·66	—0·20	0012		32	32·0
	16	233	43	15·43	—0·30	9·9948215		40	25·1
	18	235	44	27·29	—0·27	6465		48	18·2
	20	237	45	45·62	—0·16	4758		56	11·3
	22	239	47	9·81	+0·03	3097	16	4	4·5
	24	241	48	39·23	0·26	1481		11	57·6
	26	243	50	13·26	0·48	9·9939920		19	50·7
	28	245	51	51·41	0·67	8419		27	43·8
	30	247	53	33·24	0·77	6989		35	36·9
December	2	249	55	18·41	0·79	5641		43	30·0
	4	251	57	6·80	0·69	4384		51	23·1
	6	253	58	58·51	0·45	3231		59	16·3
	8	256	0	53·92	+ 0·17	2187	17	7	9·4
	10	258	2	53·39	— 0·11	1254		15	2·5
	12	260	4	57·13	— 0·29	0418		22	55·6
	14	262	7	4·99	— 0·34	9·9929672		30	48·7
	16	264	9	16·54	— 0·29	9·9929005	17	38	41·8

Ephemeride des Kometen.

1805 0ʰ M. Z. Paris	α☋ app.			δ☋ app.			log r	log Δ	Aberr.-Zeit	
Novemb. 10	1ʰ	6ᵐ	57ˢ54	+40°	45'	26″7	0·08127	9·40004	2ᵐ	5ˢ3
		6	12·09		39	34·0				3·0
11		5	26·23		33	18·1	0 07794	9·38433		0·8
		4	39·97		26	38·0			1	58·6

1805 0h M. Z. Paris	α☄ app.			δ☄ app.			log r	log Δ	Aberr.-Zeit	
Novemb. 12	1h	3m	53s29	+40°	19'	32"8	0·07460	9·36817	1m	56s4
		3	6·20		12	1·3				54·2
13		2	18·69		4	2·5	0·07127	9·35153		52·0
		1	30·76	39	55	35·1				49·9
14		0	42·41		46	37·8	0·06794	9·33437		47·7
	0	59	53·62		37	9·3				45·5
15		59	4·38		27	8·1	0·06461	9·31665		43·4
		58	14·68		16	32·6				41·2
16		57	24·51		5	21·2	0·06128	9·29832		39·1
		56	33·86	38	53	31·9				37·0
17		55	42·70		41	2·8	0·05796	9·27934		34·9
		54	51·02		27	51·7				32·8
18		53	58·79		13	56·3	0·05465	9·25965		30·7
		53	5·98	37	59	14·0				28·6
19		52	12·56		43	42·0	0·05135	9·23918		26·5
		51	18·49		27	17·4				24·4
20		50	23·73		9	56·7	0·04806	9·21786		22·4
		49	28·23	36	51	36·3				20·3
21		48	31·94		32	12·2	0·04478	9·19561		18·2
		47	34·80		11	39·9				16·2
22		46	36·73	35	49	54·5	0·04152	9·17233		14·1
		45	37·66		26	50·6				12·1
23		44	37·50		2	22·2	0·03828	9·14793		10·1
		43	36·15	34	36	22·5				8·1
24		42	33·49		8	44·0	0·03506	9·12229		6·1
		41	29·40	33	39	18·2				4·1
25	0	40	23·75	+33	7	55·8	0·03186	9·09527	1	2·1
28	0	33	6·37	+29	7	13·6	0·02242	9·00434	0	50·4
		32	25·58	28	42	0·1				49·4
		31	43·96	28	15	46·5				48·5
		31	1·45	27	48	29·5				47·5

1805 0ʰ M. Z. Paris	α☄ app.	δ☄ app.	log r	log Δ	Aberr.-Zeit
Novemb. 29	0ʰ 30ᵐ 17ˢ99	+27° 20′ 5″5	0·01934	8·97012	0ᵐ 46ˢ3
	29 33·54	26 50 30·7			45·6
	28 48·03	26 19 40·8			44·7
	28 1·41	25 47 31·5			43·7
30	27 13·60	25 13 57·8	0·01630	8·93360	42·8
	26 24·54	24 38 54·7			41·9
	25 34·16	24 2 16·7			41·0
	24 42·37	23 23 57·7			40·0
December 1	23 49·08	22 43 51·4	0·01329	8·89458	39·1
	22 54·21	22 1 50·7			38·2
	21 57·64	21 17 48·2			37·3
	20 59·27	20 31 35·8			36·4
2	19 58·98	19 43 4·9	0·01032	8·85288	35·5
	18 56·65	18 52 6·1			34·7
	17 52·14	17 58 29·4			33·8
	16 45·29	17 2 4·0			32·9
3	15 35·95	16 2 38·4	0·00740	8·80849	32·1
	14 23·94	15 0 0·2			31·2
	13 9·06	13 53 56·1			30·4
	11 51·11	12 44 12·2			29·6
4	10 29·87	11 30 33·7	0·00453	8·76165	28·8
	9 5·08	10 12 44·9			28·0
	7 36·48	8 50 29·4			27·3
	6 3·76	7 23 30·1			26·5
5	4 26·60	5 51 29·7	0·00171	8·71315	25·8
	2 44·64	4 14 10·4			25·1
	0 57·47	2 31 14·7			24·4
	23 59 4·67	+ 0 42 25·5			23·7
6	57 5·74	— 1 12 33·2	9·99895	8·66484	23·0
	55 0·15	— 3 13 55·6			22·4
	52 47·30	— 5 21 53·5			21·9
	50 26·52	— 7 36 35·0			21·3

1805 0h M. Z. Paris	α☄ app.			δ☄ app.			log r	log Δ	Aberr.-Zeit	
December 7	23h	47m	57s06	— 9°	58'	3"9	9·99625	8·62023	0m	20s8
		45	18·09	—12	26	18·1				20·3
		42	28·69	—15	1	8·6				19·9
		39	27·80	—17	42	18·5				19·5
8		36	14·24	—20	29	21·8	9·99361	8·58494		19·2
		32	46·73	—23	21	42·5				18·9
		29	3·71	—26	18	35·1				18·7
		25	3·51	—29	19	3·9				18·5
9		20	44·24	—32	22	4·2	9·99103	8·56576		18·3
		16	3·67	—35	26	24·9				18·3
	23	10	59·31	—38	30	48·1				18·3
10	22	59	27·53	—44	34	30·6	9·98852	8·56755		18·4
11	22	29	5·15	—55	46	22·7	9·98609	8·58987		19·4
12	21	39	44·40	—64	33	36·4	9·98373	8·62841		21·2
13	20	39	7·84	—71	13	17·0	9·98146	8·67308		23·5
		29	23·88	—71	48	21·0				23·8
		19	20·88	—72	20	34·0				24·2
		9	0·35	—72	49	56·3				24·5
	19	58	24·19	—73	16	29·0	9·98035	8·69734		24·8
		47	34·64	—73	40	13·7				25·2
		36	34·29	—74	1	13·1				25·6
		25	26·03	—74	19	30·5				25·9
14		14	12·94	—74	35	10·3	9·97926	8·72187		26·3
		2	58·27	—74	48	17·4				26·7
	18	51	45·28	—74	58	57·7				27·0
		40	37·21	—75	7	17·8				27·4
14·5	18	29	37·16	—75	13	24·9	9·97820	8·74632	0	27·8

Beobachtungen des Kometen.

Nur wenige Beobachtungen, nämlich je zwei von Gauss in Braunschweig und Olbers in Bremen, sowie je eine von Bode in Berlin und Firmayer in Greenwich geben lediglich den scheinbaren Ort des Kometen für eine gewisse Zeit und mussten daher unverändert beibehalten werden. Die übrigen sind mit Ausnahme der von Olbers am 8. December gemachten und wegen der Größe ihrer Abweichungen unverwendbaren Beobachtungen von Thulis in Marseille und Bouvard in Paris ausgeführt und in einer Weise veröffentlicht, welche eine vollständige Reduction ermöglichte. Hiebei ist auch der Einfluss der Refraction berücksichtigt worden, trotzdem derselbe meist unbedeutend war.

Bei den in Marseille am Meridiankreise angestellten Beobachtungen scheinen die Instrumentalfehler, wenigstens anfänglich, außeracht gelassen worden zu sein, da die Differenzen ⊙—☄ bis gegen Ende November Abweichungen zeigen, welche wohl kaum aus den Unregelmäßigkeiten des Ganges der Uhr und der Unsicherheit der Beobachtung selbst erklärt werden können. Die späteren Beobachtungen, bei welchen die Declinationsdifferenz viel kleiner war, ergeben auch eine viel bessere Darstellung.

1805	M. Z. Paris —Aberr.	☄ α	Par.	☄ δ	Par.	B—R Δα	B—R Δδ	Sternwarte
November 28 ..	10h 9m 57s	0h 31m 53s20	+2s84	+28° 22' 53"0	+ 43"4	−0s73	−17"7	Berlin
December 8. ..	6 22 13	23 32 30·67	+1·39	−23 36 24·0	+224·0	−1·37	− 9·9	Braunschweig
» 8....	7 24 59	23 31 51·80	+4·18	....	....	+0·44	....	»
» 8....	6 33 9	23 32 27·60	0·00	−23 41 14·0	+224·0	+0·73	+19·2	Greenwich

Bremen.

1805	M. Z. Paris —Aberr.	☄ — *	☄ α	Par.	☄ — *	☄ δ	Par.	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
December 2	5h 7m 40s	....	0h 19m 8s56	−2s69	....	+18°59' 9"5	+ 73"5	+0s03	+ 42"7	...
3	5 22 14	....	0 14 36·42	−2·40	....	+15 6 57·5	+ 87·5	+2·39	+101·0	...
8	6 1 59	+3m 18s00	23 32 51·93	+0·16	....	....	....	+6·55	....	1
8	6 12 8	3 9·10	43·03	0·61	+ 7' 15"0	−23 29 9·7	+225·0	+4·17	+131·4	1
8	6 19 47	3 3·90	37·83	0·96	+ 4 16·0	−23 32 8·7	+225·0	+3·90	+175·4	1
8	6 28 35	+2 56·60	23 32 30·53	+1·35	+ 0 26·0	−23 35 58·7	+225·0	+2·27	+202·3	1

Marseille.

1805	M. Z. Paris —Aberr.	☄—✱	α☄	Par.	☄—✱	δ☄	Par.	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
Novemb. 11	6h 52m 52s	+ 2m 52s00	1h 4m 53s64	—1s48	— 3' 57"1	+40°33'43"0	+ 5"6	—7s59	+256"9	19
11	14 59 33	+ 2 21·65	1 4 23·29	+2·35	—12 51·4	40 24 48·7	17·2	—2·73	+ 11·5	19
15	10 14 24	+ 4 36·00	0 58 22·67	+0·79	+21 2·4	39 18 9·6	3·7	+1·46	+ 5·3	16
16	7 4 8	+ 3 10·30	0 56 56·96	—1·37	+ 0 54·5	38 58 1·9	5·9	+0·86	— 20·3	16
19	6 57 44	+ 5 38·00	0 51 41·28	—1·42	+ 6 22·6	37 33 17·0	7·4	—1·41	— 53·0	13
20	6 49 46	+ 3 52·00	0 49 55·27	—1·51	—26 45·5	37 0 9·1	8·4	+1·52	+ 39·5	13
21	9 22 37	+ 4 52·00	0 47 45·09	+0·74	— 5 37·1	36 16 26·8	7·4	—1·54	+ 18·9	12
22	9 52 26	— 4 27·30	0 45 47·16	+1·32	— 6 1·1	35 30 57·5	9·8	+0·28	+ 5·6	15
23	7 14 59	— 5 40·70	0 44 0·91	—1·08	+ 7 17·1	34 46 3·5	10·3	—0·76	— 37·5	14
29	6 26 51	+ 7 9·50	0 29 33·56	—1·73	+16 55·3	26 47 40·9	28·8	+1·65	— 5·7	9
December 2	9 26 18	+ 0 22·00	0 18 16·90	+3·43	— 6 9·1	18 20 27·0	58·0	+0·37	— 17·7	8
3	6 17 59	— 3 5·60	0 14 22·77	—1·69	— 1 41·5	14 55 30·4	67·0	+0·82	— 9·8	7
4	6 18 29	+ 0 42·70	0 9 2·52	—1·53	— 0 48·5	10 7 5·8	85·5	+0·37	— 6·8	6
5	8 1 33	+15 15·00	0 2 7·54	+2·54	— 0 30·0	+ 3 38 21·5	112·4	+1·03	+ 10·3	4
6	7 3 46	— 3 12·70	23 54 36·31	+0·92	— 1 10·5	— 3 38 47·1	142·6	+0·06	— 18·1	5
7	7 22 53	+ 7 20·29	23 44 37·10	+2·57	— 5 21·8	—13 4 23·9	178·6	—0·38	— 2·8	3
8	6 47 12	+ 2 42·28	23 32 16·21	+1·91	—11 51·8	—23 48 16·5	+212·7	—0·29	— 4·2	1

Marseille (Meridian).

1805	M. Z. Paris—Aberr.	☋—*	α☋	B—R Δα	Stern
November 10	9ʰ 33ᵐ 44ˢ	+10ʰ 5ᵐ 28ˢ67	1ʰ 6ᵐ 15ˢ55	−5ˢ81	Sonne
11	9 28 27	+ 9 59 59·23	1 4 49·14	−0·60	»
11	9 28 27	+ 0 2 41·00	1 4 42·64	−7·10	19
15	9 6 46	+ 9 37 22·60	0 58 33·30	+6·62	Sonne
15	9 6 46	+ 0 0 29·00	0 58 27·96	+1·28	17
16	9 1 16	+ 9 31 37·29	0 56 55·37	+8·89	Sonne
16	9 1 16	+ 0 3 9·10	0 56 55·76	+9·28	16
21	8 32 51	+ 9 1 39·31	0 47 46·99	−4·34	Sonne
22	8 27 7	+ 8 55 34·69	0 45 54·76	−0·47	»
23	8 21 16	+ 8 49 22·26	0 43 55·52	+0·60	»
23	8 21 16	− 0 5 45·00	0 43 56·61	+1·69	14
December 6	6 41 54	+ 7 4 17·66	23 54 46·30	+1·23	Sonne
6	6 41 54	− 0 3 4·50	23 54 44·51	−0·56	5
7	6 28 21	+ 6 50 14·08	23 45 5·08	−0·06	Sonne
8	6 12 3	+ 6 33 25·66	23 32 39·53	0·00	»
9	5 51 43	+ 6 12 34·93	23 16 12·14	+1·76	»

Paris.

1805	M. Z. Paris —Aberr.	☄ — ✱	α☄	Par.	☄ — ✱	δ☄	Par.	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
Novemb. 16	10ʰ 44ᵐ 42ˢ	+ 2ᵐ 53ˢ00	0ʰ 56ᵐ 39ˢ66	+0ˢ99	— 1′ 40″0	+38°55′27″4	+ 9″1	+1ˢ47	+ 48″6	16
16	11 1 46	+ 2 53·00	39·66	+1·17	— 2 14·0	38 54 53·4	9·7	+2·85	+ 32·4	16
17	7 43 50	+ 1 24·00	0 55 10·65	—0·95	—24 50·4	38 32 17·1	9·5	+0·23	— 11·5	16
17	7 53 53	+ 1 21·00	7·65	—0·84	—24 55·4	38 32 12·1	9·2	—1·94	— 5·7	16
17	8 36 15	+ 9 0·00	3·29	—0·36	....	....	....	—2·77	....	13
17	9 33 10	+ 1 14·00	0·65	+0·29	—22 42·4	38 34 25·1	8·4	—0·66	+236·9	16
18	8 43 3	+ 7 13·50	0 53 16·78	—0·23	+36 27·6	38 3 22·0	9·1	—3·93	+ 10·9	13
18	10 23 48	+ 7 6·01	9·29	+0·97	+33 52·6	38 0 47·0	10·4	—2·81	— 17·3	13
23	6 53 15	—14 49·00	0 44 7·27	—1·44	+11 23·2	34 46 55·8	17·5	+3·39	— 25·3	18
23	7 24 51	—14 53·00	3·27	—1·01	+10 11·2	34 45 43·8	16·3	+2·52	— 29·7	18
23	8 1 20	—15 2·00	0 43 54·27	—0·48	+ 9 7·2	34 44 39·8	15·5	—2·84	— 14·8	18
30	11 54 5	— 5 55·94	0 25 25·99	+4·54	....	....	....	—4·47	....	10
30	11 54 5	—11 42·89	23·43	+4·54	+47 27·5	24 0 15·2	59·6	—7·03	— 98·9	11
30	12 15 3	— 5 58·92	23·01	+4·75	....	....	....	—4·26	....	10
30	12 15 3	—11 44·86	21·46	+4·75	+45 19·7	23 58 7·4	62·1	—5·81	— 93·1	11
December 5	6 24 53	+32 41·01	0 2 40·61	—1·37	—29 28·0	4 5 14·0	122·9	+1·84	+ 2·3	2
5	8 14 12	+32 1·96	0 2 1·56	+2·32	....	....	....	—1·44	....	2
5	7 5 32	....	0 2 26·40	0·00	....	+ 3 53 15·0	+123·5	+0·87	— 33·3	—

Isle de France.

$\varphi = -20° 7'$;
$L = 3^h 41^m 20^s$ östlich von Paris.
Beobachter: Malavois.

1805 December 14:

8^h 7^m 25^s	scheinbarer Abstand	α Eridani—☿	= 36° 39′ 0″
8 29 15	» »	α Argus—☿	= 52 18 0
8 53 10	» »	α Eridani-α Argus	= 39 23 30

Winnecke hat angenommen, dass die angegebenen Zeiten der damaligen Gewohnheit entsprechend, in wahrer Sonnenzeit ausgedrückt sind und die Örter der Anhaltsterne aus dem »First Melbourne General Catalogue« berechnet, wie folgt:

	α 1805·0	Red. auf Dec. 14·5	δ 1805·0	Red. auf Dec. 14·5
α Eridani . .	$1^h 30^m 26^s 26$	$+4^s 19$	—58° 13′ 49″9	+9″9
α Argus . . .	6 19 37·58	+2·77	—52 35 37·1	+2·6

Ich habe diese Positionen beibehalten und nur an Stelle der beträchtlich fehlerhaften Reduction auf den scheinbaren Ort in Rectascension für α Argus $+3^s 90$ gesetzt. Die Ergebnisse der Rechnung sind:

December 14	☄	α Eridani	☄	α Argus	α Eridani	α Argus
Wahre Ortszeit	8h 7m 25s	8h 7m 25s	8h 29m 15s	8h 29m 15s	8h 53m 10s	8h 53m 10s
Mittlere Ortszeit	8 2 25	8 2 25	8 24 15	8 24 15	8 48 10	8 48 10
Sternzeit	1 33 57	1 33 57	1 55 50	1 55 50	2 19 49	2 19 49
Scheinbarer Ort α	284° 39' 51"6	22° 37' 36"7	284° 19' 39"6	94° 55' 22"2	22° 37' 36"7	94° 55' 22"2
Scheinbarer Ort δ	−74 54 15·1	−58 13 40·0	−74 55 17·9	−52 35 34·5	−58 13 40·0	−52 35 34·5
Refraction Δα	+ 11 29·4	+ 0 2·0	+ 12 14·3	− 2 40·7	+ 0 28·3	− 2 17·8
Refraction Δδ	− 0 43·6	+ 0 45·3	− 1 6·1	+ 0 10·8	+ 0 44·5	+ 0 16·9
Beobachteter Ort α	284 51 21·0	22 37 38·7	284 31 53·9	94 52 41·5	22 38 5·0	94 53 4·4
Beobachteter Ort δ	−74 54 58·7	−58 12 54·7	−74 56 24·0	−52 35 23·7	−58 12 55·5	−52 35 17·6
Scheinbarer Abstand	36 39 30·0		52 18 30·0		39 24 0·0	
Parallaxe Δα	+ 9 46·2		+ 9 33·6			
Parallaxe Δδ	− 0 37·5		− 0 52·2			
Geocentrischer scheinbarer Ort α	284 49 37·8		284 29 13·2			
Geocentrischer scheinbarer Ort δ	−74 54 52·6		−74 56 10·1			
Aberrationszeit	27s		27s			
M. Z. Paris—Aberration	4h 20m 38		4h 42m 28			
Ephemeride α	284° 29' 6"0		284° 8' 41"4			
Ephemeride δ	−74 53 22·0		−74 54 39·5			
B—R Δα	+ 20 31·8		+ 20 31·8			
B—R Δδ	− 1 30·6		− 1 30·6			
B—R cos δ.Δα	+ 5 20·6		+ 5 20·1			

Da Winnecke aus der Messung der Distanz zwischen αEridani und αArgus einen Index- oder Theilungsfehler von 2′ 19″ abgeleitet hat, während nach meiner ursprünglich auf die gleichen Daten gegründeten Rechnung dieser Fehler nur 22″ betrug, so habe ich eine weitere unabhängige Beştimmung desselben für wünschenswert gehalten. Dr. Holetschek hatte die Güte, sich auf meine Bitte dieser Aufgabe zu unterziehen und ist durch Vergleichung der wahren Abstände zu demselben Resultate gelangt, wie ich.

Durch die oben angeführte Verbesserung des scheinbaren Ortes von αArgus ist der berechnete Indexfehler von 22 auf 30 Secunden gewachsen. Da sich ein Betrag von dieser Größe bei einer Sextantenablesung wohl kaum verbürgen lässt, so könnte man eigentlich das benützte Instrument als rectificiert betrachten; ich habe aber, um eine genaue Übereinstimmung der controlierenden Messung zu erzielen, alle Lesungen um 30″ vergrößert. Die Abweichung von der Ephemeride ist ziemlich groß und entspricht dem Mittel der Zeiten, also $4^h\,31^m\,33^s$ M. Z. Paris.

Beobachter: Dupeloux.

Dupeloux hat den Kometen am 13. und 14. December beobachtet, scheint aber mit dieser Art von Beobachtungen nicht sehr vertraut gewesen zu sein, wie schon daraus hervorgeht, dass er erst durch Malavois ein paar Wochen später veranlasst wurde, die Indexcorrection zu bestimmen und ihren Betrag (ungefähr 20 Minuten) in Rechnung zu ziehen.

Dec. 13,	$8^h\,35^m$	scheinbarer Abstand	αEridani—☄	=	31° 50′
	9 10	» »	αEridani—☄	=	31 56
	9 12	» »	αArgus—☄	=	53 56

Aus der auch mit den Beobachtungen vom 14. December übereinstimmenden Änderung des Abstandes αEridoni—☄ folgt, dass für $9^h\,12^m$ anzunehmen ist 31° 56′ 20″.

$9^h\,12^m$ wahre Z. = $9^h\,6^m\,32^s$ mittlere Z. = $2^h\,34^m\,18^s$ Sternzeit.

December 13	☌	α Eridani	α Argus
Scheinbarer Ort......	307° 22' 19" — 71 19 34	22° 37' 37" —58 13 40	94° 55' 22" —52 35 34
Refraction	+ 8 44 — 0 23	+ 0 37 + 0 44	— 2 6 + 0 20
Beobachteter Ort... .	307 31 3 — 71 19 57	22 38 14 —58 12 56	94 53 16 —52 35 14
Scheinbarer Abstand ...		31 56 20	53 56 0
Parallaxe	+ 8 57 — 0 23		
Geocentrischer scheinbarer Ort....	307 31 16 — 71 19 57		
Aberrationszeit	24s		
M. Z. Paris—Aberration..	5h 24m 48		
Ephemeride	305° 20' 4" — 72 14 29		
B—R Δα	+ 2 11 12		
B—R Δδ............	+ 0 54 32		
B—R cos δ.Δα	+ 0 42 0		

Die Abweichungen von der Ephemeride sind, wie man sieht, viel zu groß, um als Fehler der Ephemeride angesehen werden zu können.

Die am 14. December ausgeführten Messungen sind:

8^h 39^m scheinbarer Abstand α Eridani—☌ = 36° 52′
8 20 » » α Argus—☌ = 52 21
8 41 » » α Pavonis—☌ = 32 28

Es sollten nun die durch Combination von je zwei Beobachtungen unter Berücksichtigung der durch die Ephemeride gegebenen Änderung der Coordinaten für die Intervalle der

Beobachtungszeiten erhaltenen Örter des Kometen sich in naher Übereinstimmung befinden. Dies ist aber nicht der Fall. Die beste Darstellung erhält man durch die in folgendem ausführlich behandelte Verbindung der Abstände von αEridani und αArgus. Die Abstände von αEridani und αPavonis weisen auf eine Position des Kometen hin, deren Abweichung von der Ephemeride in Rectascension +52′, in Declination +28′ beträgt, während den Abständen von αArgus und αPavonis eine Abweichung von +105′, beziehungsweise +4′ entspricht.

Die zwei ersten Messungen lassen (siehe nächste Seite) den Ort des Kometen weit näher dem durch die Ephemeride angezeigten Orte erscheinen, als die Beobachtungen Malavois', können jedoch diesen gegenüber wegen des großen Unterschiedes (27′) zwischen der berechneten und beobachteten Distanz αPavonis—☿ nicht als gleichwertig gelten.

Eine Zusammenfassung der durch Malavois und Dupeloux gemachten Beobachtungen ist in Hinblick auf die bedeutende Verschiedenheit der Rectascensionen nicht gut durchführbar. Der Ort des Kometen, bezogen auf das Äquinox 1805·0, ist nach der Ephemeride

$$\text{December } 14\cdot25 \quad \alpha = 282°\,53'\,45\text{''}8, \quad \delta = -74°\,59'\,2\text{''}6$$

und nach den Beobachtungen, welche sich ungefähr auf dieselbe Zeit beziehen:

December	14·25	283° 14′ 17″6	—75° 0′ 33″2	Malavois
»	14·25	282 45 44·4	—74 59 15·0	Dupeloux.

December 14	☄	α Eridani	☄	α Argus	☄	α Pavonis
Wahre Ortszeit	8h 39m 0s		8h 20m 0s		8h 41m 0s	
Mittlere Ortszeit	8 34 0		8 15 0		8 36 0	
Sternzeit	2 5 34		1 46 32		2 7 35	
Scheinbarer Ort	283° 42' 8"6	22° 37' 36"7	283° 59' 38"4	94° 55' 22"2		328° 59' 25"0
	- 74 54 26·4	—58 13 40·0	—74 53 32·7	—52 35 34·5		—47 53 56·4
Refraction	+ 12 36·3	+ 0 20·1	+ 11 58·2	— 2 50·4		+ 2 12·3
	— 1 19·4	+ 0 44·9	— 0 58·1	+ 0 8·0		+ 0 9·2
Beobachteter Ort	283 54 44·9	22 37 56·8	284 11 36·6	94 52 31·8	283° 52' 58"4	329 1 37·3
	—74 55 45·8	—58 12 55·1	—74 54 30·8	—52 35 26·5	—74 55 53·7	—47 53 47·2
Scheinbarer Abstand	36 52 0·0		52 21 0·0		32 55 36·4	
Parallaxe	+ 9 25·4		+ 9 38·9			
	— 0 59·3		— 0 46·7			
Geocentrischer scheinbarer Ort	283 51 34·0		284 9 17·3			
	—74 55 25·7		—74 54 19·4			
Aberrationszeit	27s		27s			
M. Z. Paris—Aberration	4h 33m 13		4h 52m 13			
Ephemeride	283° 59' 35"4		284° 17' 18"7			
	—74 55 13·3		—74 54 7·0			
B - R Δα	— 8 1·4		— 8 1·4			
Δδ	— 0 12·4		— 0 12·4			
cos δ.Δα	— 2 5·2		— 2 5·4			

Vergleichssterne.

Nr.	Größe	$\alpha_{1805\cdot 0}$			$\delta_{1805\cdot 0}$			Red. a. scheinb. Ort			Autorität
								Datum	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1	8	23^h	29^m	$29^s{\cdot}78$	$-23°$	$36'$	$43''{\cdot}5$				Pulkowa
				29·82			42·8				Yarnall
				29·81			43·5				Gould
				29·80			43·3	Dec. 8	$+4^s{\cdot}13$	$+18''{\cdot}6$	
2	4	23	29	55·60	+4	34	13·4	Dec. 5	+4·00	+28·6	Fund.-Kat.
3	6	23	37	13·28	−12	59	23·8				Weisse
				12·64			24·8				Pulkowa
				12·79			24·3				Schjellerup
				12·68			28·5				Gould
				12·70			24·6	Dec. 7	+4·11	+22·5	
4	8	23	46	48·51	+3	38	23·2				Weisse
				48·34			23·1				Pulkowa
				48·47			23·1				Schjellerup
				48·44			22·4				Albany 1875
				48·42			22·9	Dec. 5	+4·12	+28·6	
5	6	23	57	44·72	−3	38	1·9				Piazzi
				44·63			2·7				Weisse
				44·81			4·5				Pulkowa
				44·84			6·3				Gould
				44·82			2·7	Dec. 6	+4·19	+26·1	
6	7	0	8	15·40	+10	7	25·3				Weisse
				15·55			23·0				Pulkowa
				15·52			24·4				Göttingen
				15·57			22·9				Leipzig 1875
				15·55			23·4	Dec. 4	+4·27	+30·9	
7	7	0	17	23·96	+14	56	39·3				Pulkowa
				24·09			39·9				Berlin 1875
				24·02			39·6	Dec. 3	+4·35	+32·3	

Nr.	Größe	$\alpha_{1805 \cdot 0}$			$\delta_{1805 \cdot 0}$			Red. a. scheinb. Ort			Autorität
								Datum	Δα	Δδ	
8	7	0h	17m	50ˢ53	+18°	26'	0"2				Weisse
				50·52			3·6				Pulkowa
				50·52			1·8				Berlin 1875
				50·52			2·7	Dec. 2	+4ˢ38	+33"4	
9	6	0	22	19·51	+26	30	9·0				Weisse
				19·46			9·6				Pulkowa
				19·75			11·2				Cambr. 1875
				19·56			10·1	Nov. 29	+4·50	+35·5	
10	7	0	31	17·41	+23	33	26·2				Weisse
				17·18			27·5				Pulkowa
				17·49			26·1				Berlin 1875
				17·39			26·8	Nov. 30	+4·54	+34·5	
11	4	0	37	1·73	+23	12	13·4	Nov. 30	+4·59	+34·3	Fund.-Kat.
12	6	0	42	48·14	+36	21	29·2				Weisse
				48·17			28·4				Pulkowa
				48·19			26·5				Lund 1875
				48·18			27·5	Nov. 21	+4·91	+36·4	
13	3	0	45	58·30	+37	26	18·2	Nov. 17	+4·99	+36·1	Fund.-Kat.
								» 20	+4·97	+36·4	
14	8	0	49	36·58	+34	38	10·4				Pulkowa
				36·78			10·4				Leiden 1875
				36·68			10·4	Nov. 23	+4·93	+36·0	
15	8	0	50	9·62	+35	36	23·3				Bonn 1855
				9·43			23·2				Pulkowa
				9·45			21·2				Lund 1875
				9·50			22·6	Nov. 22	+4·96	+36·0	

Nr.	Größe	$\alpha_{1805\cdot0}$	$\delta_{1805\cdot0}$	Red. a. scheinb. Ort: Datum	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Autorität
16	7	0 53 41·56	+38 56 33·4				Weisse
		41·45	32·0				Pulkowa
		41·64	31·2				Lund 1875
		41·55	31·6	Nov. 15	+5·12	+35·6	
				» 17	+5·10	+35·9	
17	9	0 57 53·77	+39 44 26·0	Nov. 15	+5·19	+35·4	Bonn 1875
18	2	0 58 51·25	+34 34 57·0	Nov. 23	+5·02	+35·6	Fund.-Kat.
19	7	1 1 56·37	+40 37 5·5				Weisse
		56·72	37 1·5				Pulkowa
		57·16	36 59·1				Bonn 1875
		56·37	37 5·5	Nov. 11	+5·27	+34·6	

Die mit »Pulkowa« bezeichneten Sternörter sind »Goulds Astronomical Journal«, Vol. IV, entnommen. Da der Stern Nr. 5 eine merkliche Eigenbewegung in Declination, und Nr. 19 eine solche in beiden Coordinaten zu besitzen scheint, habe ich, um größere Fehler möglichst zu vermeiden, die Positionen nach Weisse angenommen.

Bildung der Normalörter.

Der Zahl und zeitlichen Vertheilung der Beobachtungen auf der nördlichen Halbkugel würde die Annahme von zwei Normalörtern genügen; das rasche Wachsthum der Geschwindigkeit der geocentrischen Bewegung des Kometen im December lässt aber noch eine weitere Theilung des Beobachtungsmateriales als angemessen erscheinen. Hubbards Beispiel zu folgen und aus den wenigen Beobachtungen vom 8. December einen vierten Normalort zu bilden, hielt ich wegen der geringen Präcision der Beobachtungen nicht für angezeigt.

Von den früher aufgeführten Beobachtungen sind alle ausgeschieden worden, deren Abweichung von der Ephemeride eine Bogenminute übersteigt. Die beobachteten Declinationen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Genauigkeit nicht so sehr von einander, dass eine nach Sternwarten verschiedene Gewichtsbemessung nöthig wäre; ich habe nur besonders stark abweichenden Beobachtungen das Gewicht $\frac{1}{2}$ verliehen. Die Genauigkeit der am Marseiller Meridiankreise, in Paris und Bremen bestimmten Rectascensionen ist jedoch entschieden geringer, als die der übrigen; ich habe hiefür das Gewicht 0·7 gewählt. Aus den von einem Beobachter an einem Abende erhaltenen Daten ist das arithmetische Mittel gebildet worden.

M. Z. Paris 1805	Ort	$\Delta\alpha$	$\cos\delta.\Delta\alpha$	Gew.	$\Delta\delta$	Gew.
			I.			
Nov. 11·39	Marseille Mer.	—0ˢ60	—0ˢ46	0·7	—	—
11·62	Marseille	—2·73	—2·08	0·7	+11″5	1·0
15·38	Marseille Mer.	+1·28	+0·99	0·7	—	—
15·43	Marseille	+1·46	+1·13	1·0	+ 5·3	1·0
16·29	Marseille	+0·86	+0·67	1·0	—20·3	1·0
16·45	Paris........	+2·16	+1·68	0·7	+40·5	0 5
17·35	Paris........	—1·28	—1·00	0·7	— 8 6	1·0
18·40	Paris........	—3·37	—2·65	0·7	— 3·2	1·0
19·29	Marseille	—1·41	—1·12	1·0	—53·0	0·5
20·28	Marseille	+1·52	+1·22	1·0	+39·5	0·5
21·39	Marseille	—1·54	—1·24	1·0	+18·4	1·0
22·35	Marseille Mer.	—0·47	—0·38	0·7	—	—
22·41	Marseille	+0·28	+0·23	1·0	+ 5·6	1·0
23·30	Marseille	—0 76	—0·62	1·0	—37·5	0·5
23·31	Paris........	+1·02	+0·84	0·7	- 23·3	1·0
23·35	Marseille Mer.	+1·14	+0·94	0·7	—	—

M. Z. Paris 1805	Ort	Δα	cos δ.Δα	Gew.	Δδ	Gew.
		II.				
Nov. 28·42	Berlin	—0·73	—0·64	1·0	—17·7	1·0
29·27	Marseille ..	+1·65	+1·47	1·0	— 5·7	1·0
Dec. 2·21	Bremen......	+0·03	+0·03	0·7	+42·7	0·5
2·39	Marseille	+0·37	+0·35	1·0	—17·7	1·0
3·22	Bremen	+2·39	+2·31	0·7	—	—
3·26	Marseille	+0·82	+0·79	1·0	— 9·8	1·0
4·26	Marseille	+0·37	+0·36	1·0	— 6·8	1·0
5·27	Paris	—	—	—	+ 2·3	1·0
5·30	Paris Mer. ...	+0·87	+0·87	0·7	—33·3	0·5
5·30	Paris	+0·20	+0·20	0·7	—	—
5·33	Marseille	+1·03	+1·03	1·0	+10·3	1·0
		III.				
Dec. 6·28	Marseille Mer.	+0·34	+0·34	0·7	—	—
6·29	Marseille	+0·06	+0·06	1·0	—18·1	1·0
7·27	Marseille Mer.	—0·06	—0·06	0·7	—	—
7·31	Marseille	—0·38	—0·37	1·0	— 2·8	1·0
8·26	Marseille Mer.	0·00	0·00	0·7	—	—
8·27	Braunschweig	—	—	—	— 9·9	1·0
8·27	Greenwich ...	+0·73	+0·67	1·0	+19·2	1·0
8·28	Marseille	—0·29	—0·26	1·0	— 4·2	1·0
8·29	Braunschweig	—0·47	—0·43	1·0	—	—
9·24	Marseille Mer.	+1·76	+1·44	0·7	—	—

Die mit Rücksicht auf die Gewichte hieraus abgeleiteten Mittel sind:

1805	cos δ.Δα	Δα	Gew.	Δδ	Gew.
November 18·75	—0·091	— 1·73	13·3	—1·93	10·0
December 2·75	+0·653	+10·25	8·8	—5·05	8·0
» 7·75	+0·112	+ 1·76	7·8	—3·16	5·0

Für diese Zeitpunkte sind die auf 1805·0 reducierten Örter der Ephemeride:

1805	α	δ
November 18·75	13° 8' 52"0	+37° 51' 10"8
December 2·75	4 10 21·9	+17 1 39·1
» 7·75	354 50 57·9	—17 42 43·6

Man erhält daraus folgende drei Normalörter des Kometen, denen der Übersichtlichkeit halber die früher gewonnenen Resultate der Beobachtungen auf Isle de France beigefügt sind.

Nr.	M. Z. Paris 1805	α☌ 1805·0	m. F.	Zahl der Beob.	δ☌ 1805·0	m. F.	Zahl der Beob.
I	Nov. 18·75	13° 8' 50"3	± 5"9	16	+37° 51' 8"9	± 6"9	12
II	Dec. 2·75	4 10 32·1	± 4·0	10	+17 1 34·0	± 5·8	9
III	» 7·75	354 50 59·7	± 3·0	9	—17 42 46·8	± 6·2	5
	» 14·25	283 14 17·6			—75 0 33·2		
	» 14·25	282 45 44·4			—74 59 15·0		

Ich werde nun die Darstellung dieser Normalörter durch das Elementensystem I[1] geben, welches der ganzen Störungsrechnung zugrundeliegt und auch zur Darstellung der Normalörter aus den Jahren 1826, 1832, 1845/46[2] und 1852 gedient hat. Es lautet:

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CVII, Abth. II a., März 1898, S. 379 und 436.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. CIX, Abth. II a., Mai 1900.

I. Mittleres Äquinox 1832·0; Epoche und Osculation 1832 November 25·0, M. Z. Paris:

				Reduction auf 1810·0
$M =$	359°	50′	1″31	
$\Pi =$	109	58	59·50	—18′ 23″835
$\Omega =$	248	13	53·50	—19 8·470
$i =$	13	13	18·47	+ 0 2·672
$\varphi =$	48	42	24·95	
$\mu =$			533·78831	

Die auf das Äquinoctium 1810·0 bezogenen Störungen der Elemente durch die Planeten, deren Massen nach dem Berliner Jahrbuche für 1901 angenommen worden sind, besitzen für 1805 December 3·0, welcher Zeitpunkt 9854 Tage vor der Osculationsepoche liegt, die auf S. 649 folgenden Werte.

Man erhält sonach aus dem Elementensysteme I durch Addition der Störungs- und Präcessionsbeträge folgendes System:

I′. Mittleres Äquinox 1805·0, Epoche und Osculation 1805 December 3·0 M. Z. Paris:

$M =$	355°	25′	10″20
$\Pi =$	109	26	8·38
$\Omega =$	251	15	30·60
$i =$	13	36	18·54
$\varphi =$	48	12	5·73
$\mu =$			527·30766

Die den Zeiten der Normalörter entsprechenden, durch Interpolation aus den Störungstafeln erhaltenen Änderungen dieser Elemente sind in der Tafel auf S. 650 zusammengestellt. Die Zahlen in der mit ΔM bezeichneten Spalte sind für jeden Planeten gleich der Differenz der für die Zeit des Normalortes und für December 3·0 berechneten Störungen in mittlerer Anomalie. Die Reduction auf das neue $\mu = 527''30766$ ist durch Addition von $(t-t_0)\Delta\mu$ ausgeführt, wo $t_0 = 1805$ December 3·0 und $\Delta\mu = -6''48065$.

1805 December 3·0	ΔM	ΔΠ	ΔΩ	Δi	Δφ	Δμ
Venus	− 0° 1′ 30″73	+ 0° 0′ 3″18	+ 0° 0′ 2″19	− 0° 0′ 0″24	+ 0° 0′ 2″66	− 0″03083
Erde	+ 0 0 42·67	+ 0 1 33·18	+ 0 0 38·54	+ 0 0 37·77	− 0 1 16·62	+ 0·82280
Mars	+ 0 1 19·27	+ 0 0 0·34	+ 0 0 3·36	− 0 0 0·67	+ 0 0 0·76	− 0·00970
Jupiter	+16 43 18·47	− 0 11 28·32	+ 3 20 16·04	+ 0 21 28·12	− 0 29 35·85	− 7·31859
Saturn	− 0 3 2·20	− 0 0 23·03	+ 0 4 2·73	+ 0 0 51·13	+ 0 0 31·97	+ 0·05652
Uranus..........	+ 0 0 11·42	− 0 0 1·80	+ 0 0 3·55	+ 0 0 0·82	− 0 0 2·14	− 0·00085
Summe....	+16° 40′ 58″90	− 0° 10′ 16″45	+ 3° 25′ 6″41	+ 0° 22′ 56″93	− 0° 30′ 19″22	− 6″48065
−9854 μ..........	− 21 5 50·01					
I 1810·0.......	359 50 1·31	109 40 35·67	247 54 45·03	13 13 21·14	48 42 24·95	533·78831
I′ 1810·0	355 25 10·20	109 30 19·22	251 19 51·44	13 36 18·07	48 12 5·73	527·30766
Reduction auf 1805·0		− 0 4 10·84	− 0 4 20·84	+ 0 0 0·47		

	ΔM	ΔΠ	ΔΩ	Δi	Δφ	Δμ
$t = 1805$ November 18·75						
Venus	+ 0"149	+ 0"012	—0"029	+0"032	— 0"633	+0"00617
Erde	— 32·770	+ 9·306	+1·780	—2·123	—43·634	+0·43692
Mars	+ 0·136	+ 0·011	—0·001	+0·001	— 0·005	+0·00006
Jupiter	+104·190	+ 0·958	—0·006	+0·007	+ 0·086	+0·00057
Saturn	— 0·763	— 0·031	+0·006	—0·007	+ 0·079	—0·00081
Uranus	+ 0·014	— 0·001	0·000	0·000	+ 0·002	—0·00002
Summe	+ 70·956	+10·255	+1·750	—2·090	—44·105	+0·44289
$(t-t_0)\Delta\mu$	— 92·349					
$\Sigma\Delta M$	— 21·393					
$t = 1805$ December 2·75						
Venus	+ 0·005	— 0·003	0·000	0·000	— 0·010	+0·00010
Erde	— 0·953	+ 0·571	+0·003	—0·014	— 2·155	+0·02181
Mars	+ 0·002	+ 0·001	0·000	0·000	0·000	0·00000
Jupiter	+ 1·831	+ 0·013	0·000	0·000	+ 0·005	—0·00003
Saturn	— 0·013	— 0·001	0·000	0·000	+ 0·001	—0·00001
Uranus	0·000	0·000	0·000	0·000	0·000	0·00000
Summe	+ 0·872	+ 0·581	+0·003	—0·014	2·159	+0·02187
$(t-t_0)\Delta\mu$	— 1·620					
$\Sigma\Delta M$	— 0·748					

$t = 1805$ December 7·75

Venus	− 0·106	+ 0·065	+0·001	− 0·006	+ 0·179	−0·00168
Erde	+25·885	−24·715	−0·259	−3·911	+ 72·489	− 0·74040
Mars	− 0·045	− 0·003	0·000	0·000	+ 0·002	−0·00002
Jupiter	−34·761	− 0·265	0·000	−0·003	− 0·105	+0·00072
Saturn	+ 0·260	+ 0·010	−0·001	+0·002	− 0·025	+0·00025
Uranus	− 0·004	0·000	0·000	0·000	− 0·001	+0·00001
Summe	− 8·771	−24·908	−0·259	−3·918	+ 72·539	−0·74112
$(t-t_0)\,\Delta\mu$	+30·783					
$\Sigma\Delta M$	+22·012					

$t = 1805$ December 14·25

Venus	− 0·295	+ 0·204	− 0·001	− 0·011	+ 0·382	−0·00356
Erde	+43·593	−74·751	−11·597	−27·605	+132·148	−1·37666
Mars	− 0·107	− 0·008	− 0·001	0·000	+ 0·003	−0·00003
Jupiter	−82·333	− 0·594	− 0·002	− 0·007	− 0·312	+0·00245
Saturn	+ 0·623	+ 0·021	0·000	+ 0·003	− 0·056	+0·00057
Uranus	− 0·008	0·000	0·000	0·000	− 0·002	+0·00001
Summe	−38·527	−75·128	−11·601	− 27·620	+132·163	−1·37722
$(t-t_0)\,\Delta\mu$	+72·907					
$\Sigma\Delta M$	+34·380					

	ΔM	ΔΠ	ΔΩ	Δi	Δφ	Δμ
$t = 1805$ November 18·75						
Venus	+ 0″149	+ 0″012	—0″029	+0″032	— 0″633	+0″00617
Erde	— 32·770	+ 9·306	+1·780	—2·123	—43·634	+0·43692
Mars	+ 0·136	+ 0·011	—0·001	+0·001	— 0·005	+0·00006
Jupiter	+104·190	+ 0·958	—0·006	+0·007	+ 0·086	+0·00057
Saturn	— 0·763	— 0·031	+0·006	—0·007	+ 0·079	—0·00081
Uranus	+ 0·014	— 0·001	0·000	0·000	+ 0·002	—0·00002
Summe	+ 70·956	+10·255	+1·750	—2·090	—44·105	+0·44289
$(t-t_0)\Delta\mu$	— 92·349					
$\Sigma\Delta M$	— 21·393					
$t = 1805$ December 2·75						
Venus	+ 0·005	— 0·003	0·000	0·000	— 0·010	+0·00010
Erde	— 0·953	+ 0·571	+0·003	—0·014	— 2·155	+0·02181
Mars	+ 0·002	+ 0·001	0·000	0·000	0·000	0·00000
Jupiter	+ 1·831	+ 0·013	0·000	0·000	+ 0·005	—0·00003
Saturn	— 0·013	— 0·001	0·000	0·000	+ 0·001	—0·00001
Uranus	0·000	0·000	0·000	0·000	0·000	0·00000
Summe	+ 0·872	+ 0·581	+0·003	—0·014	—2·159	+0·02187
$(t-t_0)\Delta\mu$	— 1·620					
$\Sigma\Delta M$	— 0·748					

$t = 1805$ December 7·75

Venus	— 0·106	+ 0·065	+0·001	—0·006	+ 0·179	—0·00168
Erde	+25·885	—24·715	—0·259	—3·911	+ 72·489	—0·74040
Mars	— 0·045	— 0·003	0·000	0·000	+ 0·002	—0·00002
Jupiter	—34·761	— 0·265	0·000	—0·003	— 0·105	+0·00072
Saturn	+ 0·260	+ 0·010	—0·001	+0·002	— 0·025	+0·00025
Uranus	— 0·004	0·000	0·000	0·000	— 0·001	+0·00001
Summe	— 8·771	—24·908	—0·259	—3·918	+ 72·539	—0·74112
$(t-t_0)\Delta\mu$	+30·783					
$\Sigma\Delta M$	+22·012					

$t = 1805$ December 14·25

Venus	— 0·295	+ 0·204	— 0·001	— 0·011	+ 0·382	—0·00356
Erde	+43·593	—74·751	—11·597	—27·605	+132·148	—1·37666
Mars	— 0·107	— 0·008	— 0·001	0·000	+ 0·003	—0·00003
Jupiter	—82·333	— 0·594	— 0·002	— 0·007	— 0·312	+0·00245
Saturn	+ 0·623	+ 0·021	0·000	+ 0·003	— 0·056	+0·00057
Uranus	— 0·008	0·000	0·000	0·000	— 0·002	+0·00001
Summe	—38·527	—75·128	—11·601	—27·620	+132·163	—1·37722
$(t-t_0)\Delta\mu$	+72·907					
$\Sigma\Delta M$	+34·380					

Die mittlere Anomalie des Elementensystemes I' ist um ungefähr 12' kleiner, als die mittlere Anomalie des zur Berechnung der Ephemeride benützten Systemes, welches die Beobachtungen gut darstellt. Da der Anfangswert von μ aus der Verbindung der Erscheinungen des Kometen in den Jahren 1826 und 1832 abgeleitet worden ist und die hierauf beruhende mittlere Bewegung in der Zeit von 1805 bis 1832 sich als zu groß erweist, so muss man annehmen, dass die Geschwindigkeit dieser Bewegung zwischen 1805 und 1832 zugenommen hat. Die auf die Beobachtungen aus dem Jahre 1846 gegründete Bahnbestimmung[1] des Kometen hat ergeben, dass die mit demselben Anfangswerte von μ erhaltene mittlere Anomalie für 1846 März 21·0 um 6' 47"6 zu vergrößern ist. Es ist dann die Annahme gemacht worden, dass diese Vergrößerung der mittleren Anomalie von einer Beschleunigung der mittleren täglichen Bewegung herrühre, und zwar in der Weise, dass das Auftreten der Beschleunigung ungefähr auf die Zeit des Periheldurchganges falle und die Größe derselben im Jahre 1832 gleich sei jener im Jahre 1839. Unter diesen Voraussetzungen ergab sich für die Beschleunigung der Wert 0"05586.

Die Kraft, welche das periodische Wachsthum von μ bewirkt, stört gewiß auch andere Elemente in erheblichem Grade, worauf bei der Bildung eines einheitlichen, alle Erscheinungen des Kometen in diesem Jahrhunderte darstellenden Elementensystemes Rücksicht genommen werden wird. Hiebei dürften wohl auch über die Zeiten, in welche das Wirken dieser Kraft fällt, nähere Angaben gemacht werden können. Zur Darstellung der Beobachtungen aus dem Jahre 1846 ist außer der Beschleunigung der mittleren Bewegung nur noch eine Änderung von Π im Betrage von —48" in Rechnung gebracht worden.

Die Zeiten der Perihelien zwischen 1805 und 1832 November 25·0, ihr Abstand in Tagen von dieser Epoche und von einander sind:

1806 Jänner 2....... —9824

2461

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CIX, Abth. II a., Mai 1900.

1812 September 28 ..	—7363	
		2460
1819 Juni 24........	—4903	
		2459
1826 März 18.......	—2444	
1832 November 25...	0	

Unter Beibehaltung der Annahme, dass die Beschleunigung der mittleren Bewegung zur Zeit des Perihels stattfindet und zwischen 1805 und 1826 stets von gleicher Größe ist, erhält man, da der Anfangswert von μ dem Laufe des Kometen in den Jahren 1826 und 1832 angepasst ist, die Zunahme der mittleren Anomalie für 1806 Jänner 2·0 aus der Gleichung

$$\Delta M = 2459\,\Delta\mu + 2460 \times 2\,\Delta\mu + 2461 \times 3\,\Delta\mu.$$

Für 1805 December 3·0 wäre consequenterweise ΔM noch um $30 \times 4\,\Delta\mu$ zu vermehren. Da aber die Annahme, dass die Beschleunigung gerade zur Perihelszeit erfolgt, eine ganz willkürliche ist, schien es mir der Sachlage entsprechender zu sein, auch für die Beobachtungen im Jahre 1805 die Größe $-3\,\Delta\mu$ als Änderung des Anfangswertes von μ beizubehalten. Es wird dann für 1805 December 3·0

$$\Delta M = 14852\,\Delta\mu.$$

Mit Hilfe der für die Zeiten der Normalörter berechneten Differentialquotienten der geocentrischen Coordinaten nach den Elementen ergab sich sofort, dass die Änderung der mittleren Anomalie allein nicht ausreicht, um die Normalörter durch das System I′ befriedigend darzustellen. Zur Erreichung dieses Zweckes muss auch Π und φ geändert werden, da infolge der geringen Entfernung des Kometen von der Erde die Differenzialquotienten, nach φ genommen, sehr groß sind. Eine Änderung von φ um 1″ bewirkt nämlich folgende Änderungen der Rectascension und Declination:

1805	$\cos\delta\,\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
November 18·75	—19″6	— 6″6
December 2·75	—41·5	—13·8
7·75	—59·6	+ 2·2
14·25	+14·0	+39·7

Nach einigen Versuchen erhielt ich folgende Correctionen des Elementensystemes I′:

$$\Delta M = +11' 54''414$$
$$\Delta\Pi = +\ 1\ 26\cdot57$$
$$\Delta\varphi = +\ 0\ 15\cdot99$$

Aus ΔM ergibt sich als Acceleration bei jedem Umlaufe

$$\Delta\mu = +0''048102;$$

Correction von $\mu = -3\,\Delta\mu = -0\cdot14431$.

Diese Correctionen in Verbindung mit den Störungen geben folgende Elemente und Darstellung:

1805	Nov. 18·75	Dec. 2·75	Dec. 7·75	Dec. 14·25
M	−6°28′28″857	−4°25′ 7″925	−3°40′49″348	−2°43′30″418
Π	109 27 45·20	109 27 35·53	109 27 10·04	109 26 19·82
☊	251 15 32·35	251 15 30·60	251 15 30·34	251 15 19·00
i	13 36 16·45	13 36 18·53	13 36 14·62	13 35 50·92
φ	48 11 37·62	48 12 19·56	48 13 34·26	48 14 33·88
μ	527·6062	527·1852	526·4222	525·7861
α	13 8 51·08	4 10 36·51	354 51 1·61	282 54 28·16
δ	+37 51 3·13	+17 1 31·53	−17 42 47·63	−74 58 52·87
$\cos\delta\Delta\alpha$ ..	−0·62	−4·22	−1·82	+5 8·20
$\Delta\delta$	+5·77	+2·47	+0·83	−1 40·33
Dupeloux $\cos\delta\Delta\alpha$				−2 15·70
Dupeloux $\Delta\delta$				−0 22·13

Die Darstellung der ersten drei Örter ist in Anbetracht ihrer mittleren Fehler gut. Die Beobachtungen vom 14. December sind sehr ungenau und lassen sich nicht viel besser darstellen.

Die Verbindung der Erscheinungen des Kometen in den Jahren 1805, 1826, 1832 und 1846 durch die Störungsrechnung, in welcher von 1805 bis 1826 und von 1832 bis 1846 die Störungen Mercurs fehlen, hat also das Resultat ergeben, dass an das die Beobachtungen aus den Jahren 1826 und 1832 gut darstellende Elementensystem I folgende Correctionen noch angebracht werden müssen, damit die Beobachtungen aus dem

Jahre 1805 ebenfalls gut dargestellt werden und nach Berücksichtigung der bei der Theilung des Kometen auftretenden Änderungen der Elemente auch den Beobachtungen aus den Jahren 1846 und 1852 der Hauptsache nach Genüge geschehe.

	1805 December 3·0	1846 März 21·0
ΔM	= +11′ 54″41	+6′ 47″65
$\Delta\Pi$	= + 1 26·57	−0 48·10
$\Delta\varphi$	= + 0 15·99	0 0·00
$\Delta\mu$	= − 0 0·14431	+0 0·11173
Beschleunigung	= + 0 0 04810	+0 0 05586

Die Einbeziehung der Störungen der mittleren Anomalie durch Mercur wird die Werte von ΔM noch etwas ändern; da $\Delta\mu$ von ΔM und zum Theile auch von den Epochen abhängt, auf welche das Eintreten der Beschleunigung verlegt wird, so dürften die für die Beschleunigung gefundenen Werte noch merkliche Änderungen erfahren, die vielleicht zur Ausgleichung der bestehenden Differenz, falls dies als erforderlich erkannt werden sollte, hinreichen. Die Werte von $\Delta\Pi$ ließen sich, da der mittlere Fehler von Π circa 10″ beträgt, leicht in das Verhältnis von 3 : 2 bringen, was eine Abnahme der Länge des Perihels um 27″ bei jedem Umlaufe des Kometen andeuten würde. Der Wert von $\Delta\varphi$ ist wegen der bedeutenden Störungen der Excentricität durch die Erde im December 1805 ziemlich unsicher, weil zur Berechnung dieser Störungen noch nicht genügend genaue Elemente des Kometen verwendet worden sind. Dieser Theil der Rechnung wird mit den neuen Elementen wiederholt werden.

Aus dem Ganzen geht hervor, dass wahrscheinlich alle Erscheinungen des Kometen unter gewissen, auf die Beschleunigung der Bewegung und die Theilung des Kometen gegründeten Voraussetzungen durch ein einheitliches Elementensystem in befriedigender Weise dargestellt werden können.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. V.

(Beobachtungen in Indien und Oberägypten)

von

Dr. Heinrich Mache.

(Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1900.)

Die von der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zur Beobachtung des Leonidenschwarmes 1899 ausgerüstete Expedition, der ich als Mitglied angehörte, führte mich in Gegenden, wo Messungen des elektrischen Potentialgefälles der Luft eine Bereicherung unserer Kenntnisse über die atmosphärische Elektricität versprachen.

Im Zusammenhange damit schienen auch Beobachtungen der Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung jener Gegenden geboten, einer Größe, die nach den Untersuchungen der Herren Elster und Geitel wesentlich an den luftelektrischen Processen betheiligt sein könnte.

Ich gestatte mir, im folgenden über die erhaltenen Resultate zu berichten. Beobachtet wurden:

Die Intensität der Sonnenstrahlung im indischen Ocean (I);

die Sonnenstrahlung und das luftelektrische Potentialgefälle in Delhi [Nordindien] (II*a* und II*b*);

die Intensität der Sonnenstrahlung in Ceylon (III);

das Potentialgefälle in Luxor [Ägypten] (IV).

Was die Methode der Beobachtung anbelangt, so ist darüber nur weniges zu bemerken.

Das atmosphärische Potentialgefälle wurde mittels der von Herrn Prof. F. Exner angegebenen transportablen Apparate bestimmt. Als Collector wurde stets die Flamme verwendet.

Von der Benützung einer Poloniumelektrode, welche ich mitführte, nahm ich Abstand, da dieselbe, ausgenommen bei starkem Winde, stets zu niedrige Werte gab. Es rührt dies vermuthlich davon her, dass die Luft bis auf den Erdboden hinab leitend wird.

Die Messung der Intensität der Sonnenstrahlung geschah mittels des von den Herren Elster und Geitel angegebenen transportablen Aktinometers,[1] welches die directe Sonnenstrahlung bei senkrechter Incidenz auf die verwendete amalgamierte Zinkplatte misst. Der Apparat war in seinen Dimensionen identisch gleich mit demjenigen, welchen Herr Prof. F. Exner in Oberägypten[2] verwendet hatte. Da es galt, auch in den Tropen damit zu messen, musste auf gutes Functionieren der isolierenden Theile, vor allem der Hilfscapacität Gewicht gelegt werden. Als solche verwendete ich, den jeweiligen Bedürfnissen entsprechend, eine Reihe von Plattencondensatoren, deren Dielektricum aus Ebonit oder Paraffin bestand und deren Capacitäten zwischen 73 und 300 *cm* fielen. Ohne Hilfscondensator betrug die Capacität des Systems bei mittlerem Ausschlag des verwendeten Elektrometers 17·2 *cm*. Um meine Zahlenwerte auf die Einheit zu beziehen, die den Exner'schen Angaben zugrunde liegt, habe ich die beiden Apparate miteinander verglichen. Für meinen am meisten verwendeten Hilfscondensator II von 143 *cm* Capacität, auf den ich zunächst alle Werte bezog, beträgt der Reductionsfactor 1·95, in guter Übereinstimmung mit dem aus dem Verhältnisse der Capacitäten berechneten. Alle im folgenden gegebenen Zahlenwerte sind bereits mit diesem Factor multipliciert, also direct mit den Exner'schen Angaben vergleichbar.

Die Methode der Messung war ganz die von den Herren Elster und Geitel angegebene.[3] Die Verluste durch nicht photoelektrische Zerstreuung oder mangelhafte Isolation wurden stets in Rechnung gebracht, waren aber gewöhnlich so klein, dass sie das Resultat nicht merklich beeinflussten. Nur in

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CI, 1892.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. CVIII, 1899.

[3] L. c.

Ceylon waren trotz aller Sorgfalt größere Verluste nicht zu vermeiden.

Die Zenithdistanz der Sonne wurde auf festem Lande mittels eines einfachen Schatteninstrumentes (Presslers Messknecht), zu See mit Hilfe eines kleinen Sextanten (Dosensextanten von Gresset) bestimmt.

Um den Text nicht allzuhäufig durch Tabellen unterbrechen zu müssen, schicke ich zunächst im folgenden das gesammte Beobachtungsmateriale voraus. Dasselbe ist chronologisch geordnet, doch sind hiebei die aktinometrischen und luftelektrischen Beobachtungen getrennt worden.

Es bedeutet I die am Aktinometer gemessene Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung, I' den an I bereits in Abzug gebrachten Verlust durch nicht photoelektrische Zerstreuung oder mangelhafte Isolation, z die Zenithdistanz der Sonne, schließlich $\frac{\partial V}{\partial n}$ das Potentialgefälle in Volt pro Meter. Von meteorologischen Elementen wurden die Lufttemperatur T, die absolute und relative Feuchtigkeit A. F. und R. F., ferner die Windrichtung und Windstärke (nach der Beaufort-Hann'schen Scala), endlich der Barometerstand (mittels corrigierten Aneroids) beobachtet. Die Zeitangaben beziehen sich stets auf mittlere Ortszeit.

A. Aktinometrische Messungen.

I. Messungen im indischen Ocean.

Tag	z	I	I'	Bemerkungen
12./X. p. m.	80° 40'	22·4	6·8	wolkenlos
	82 55	11·7		
14./X. p. m.	80 10	15·6	0	wolkenlos
	81	12·1		$T = 28·4$
	81 50	7·9		A. F. = 14·8
	83 55	3·18		R. F. = 52
	85 50	2·18		

Tag	z	I	I'	Bemerkungen
15./X. a. m.	79° 30'	11·9	0	wolkenlos
	78 20	17·4		NW 1
	77 20	24·2		$T = 26·8$
	75 55	25·2		A. F. = 19·3
	74 35	45 5		R. F. = 74
	72 50	63·7		
	70 20	92 0		
	68 55	122		
	66 5	150	4·3	
	64 30	174		
	62 10	183		
	61 15	174		
	59 55	218		
	58 45	253	5·3	
	57 35	263		
	56 15	287		
	55 10	287		
	54	306	6·8	
15./X. p.m.	73 0	78 0	3·3	wolkenlos
	76 5	62·2		SW 1
	77 25	18 3		$T = 25·9$
	79 20	18·1		A. F. = 18·2
	80 50	11 9	0·2	R. F. = 73
	82 10	5·13		
	83 10	3·08		
16./X. a. m.	82 5	3·61	0·4	wolkenlos
	80 10	6 82		windstill
	79 30	11·1		$T = 26 7$
	78 10	21·3		A. F. = 21·3
	77 30	26·3		R. F. = 82
	77	32 2		

Tag	z		I	I'	Bemerkungen
16./X. a. m.	76°	20'	36·1		
	75	50	41·6		
	72	30	79·5		
	71	40	91·3		
	70	35	87·3	6·8	
	69	40	97·3		
	68	50	101		
	67		201		
	66	10	172		
	64	20	240		
17./X. a. m.	81	50	3·35	1·1	am Horizonte zerstreuter Cumulus
	80	50	4·48		
	79	10	6·34		SW 1
	77	20	12·8		$T = 27·8$
	75	45	20·8		A. F. = 21 8
	73	35	37·6		R. F. = 79
	69	20	66·8		
	68	40	70 0		
18./X. a. m.	84	50	2·08	1·3	wolkenlos
	83	10	2·24	1·1	NNO 2
	81	20	4 59	0·9	$T = 26·8$
	79	50	7·47		A. F. = 19·1
	79	10	12·5		R. F. = 73
	78		18·1		
	77	10	26·3		
	75	10	36·1		
	73	40	50·4		
	72	15	75·4	0·8	
	70	40	82·8		

II*a*. Messungen in Delhi.

Tag	Zeit		z		I	I'	Bemerkungen
1./XI.	9h	36m	54°	45'	267	1·6	wolkenlos
		42	54	20	282		N 1
		47	53	40	296		
		49	53	30	318		
		54	52	30	308		
		59	51	10	318		
	10	39	47	10	329		
		49	46		177		
		53	45	30	185		
	11	3	45		197		
		10	44	30	194		
		36	43		236		
		45	42	50	210		
		50	42	50	214	2·1	
		58	42	50	192		$T = 28\cdot5$
	12	7	42	50	192		
		21	43	20	192		
		34	44	20	243		
		38	44	30	230		
		51	45	10	221		
	1		46		192		
		12	47	20	175		
		24	48	15	116		
		30	49		75		
		37	50		95		
		47	51	15	40·6		
		52	51	40	44·8		
	3	2	63		46 0	1·0	
		14	64	55	31·2		
		24	67		21·5		
		34	68	30	11·3		$T = 32\cdot5$
		40	69	30	12·9		$b = 737$
		47	70	55	8·6		

Tag	Zeit		z		I	I'	Bemerkungen
2./XI.	7h	55m	71°		37·2	1·2	wolkenlos
	8	10	69	20'	41·5		ESE 1
		19	67	30	50		
		28	65	50	52		
		41	63	40	87		
		52	61	30	97		
	9	6	59		106	2·1	
		19	57	25	138		
		29	56		183		
		41	54	10	243		
		48	52	50	253		
		57	51	30	266		ESE 3
	10	2	51	0	266		
		32	47	30	276		
		40	47		253		
		48	45	50	243		
		58	45	10	266		
	11	5	44	30	281		
		23	44		301		
		42	43		332		$b = 739·7$
		46	43		317		
		57	43		306		
	12	2	43		354		
		7	43	20	317		
		19	43	40	317		
		31	44		306		
		47	45	10	301		ESE 1
		59	46	15	266		
	1	9	47	15	183		
		25	49		122		
		34	50	20	116		
		46	51	20	116		
	2	42	59	45	83		
		58	62	20	32·3		
	3	10	64		9·2		

Tag	Zeit		z		I	I'	Bemerkungen
10./XI.	9h	1m	59°	40'	99	1·6	wolkenlos
		17	57	30	130		NNE 2
		32	55	40	122		
		38	54	20	130		
		47	53	50	91		
	10	40	48	10	138		
		43	48		138		
		56	46	45	162		$T = 21·9$
	11	6	46	0	156		A. F. = 5·6
		11	45	50	177		R. F. = 29
		27	45	50	218		
		36	45	45	172		
		48	45	45	168		
		58	45	45	184		
	12	29	46	20	200		
	1	14	50	30	122		
		41	53	45	117		$b = 739$
		56	55	40	99		NNE 2
	2	9	57	40	58		$T = 27·2$
		13	58	10	77		A. F = 4·0, R. F. = 15
13./XI.	8h	15m	68	30	72	3·3	wolkenlos
		27	66	15	82		Luft ungewöhnlich
		37	64	30	102		transparent
		52	62	15	108		WNW 1
	9	8	60	15	131		$T = 21·1$
		24	57	30	298		A. F. = 3·1
		40	55	30	256		R. F. = 17
		57	53	15	336		
	10	18	51	10	228		
		23	50	10	163		
	11	26	46	40	140		$b = 738·2$
		40	46	30	207		
		50	46	20	140		

Tag	Zeit		z		I	I'	Bemerkungen
13./XI.	12h		46°	20'	119		
		19m	47	15	91		$T = 26 \cdot 9$
		33	48		68		A. F. = 3·8
	1	4	50	45	78		R. F. = 15
		14	51	45	62		
		30	53	15	83		W 1
		40	54	20	62		$T = 28 \cdot 1$
		55	56	30	55		A. F. = 2·6, R. F. = 9
14./XI.	7h	58m	71°	30'	30·5	1·4	wolkenlos
	8	10	69	30	48·9		NW 1
		32	66		97		
		48	63	15	139		
		56	62	30	149		
	9	38	56	30	229		NW 2
	10	23	51	15	278		
	11	4	47	50	288		
		18	47	30	275		
		55	47		278		
	12	55	50		122		
	1	5	50	50	112		NW 3
		13	51	40	166		
		32	54	15	72		W 3
		50	55	40	27·5		$T = 28 \cdot 7$
	2	15	60		11 9		A. F. = 3·2
	3	18	70		36·8		R. F. = 11
	4		72	30	4·7		
20./XI.	9h	23m	59	30	101	3·1	wolkenlos
		48	56	25	142		windstill
	10	1	54	40	224		
		22	52	50	289		
		30	52	10	121		leichter Wolkenschleier
		50	50	40	84		$T = 24 \cdot 9$
	11	27	48	45	129		A. F. = 4·7, R. F. = 20

Tag	Zeit		z		I	I'	Bemerkungen
21./XI.	9h	3m	63°	0'	100	1·6	wolkenlos
		12	61	20	97		SW 1
		24	59	40	114		
		28	59	40	138		
		40	57	45	194		
		53	56		229		
	10	7	54	40	260		
		20	53		162		
		58	50	10	180		
	11	13	49	40	184		$b = 744·2$
		32	49		192		$T = 26·2$
		43	48	30	153		A. F. = 6·0
	12		48	30	55		R. F. = 24
		17	49		59		NW 1
		31	49	30	50		$T = 27·1$
		49	50	50	50		A. F. = 5·4
	1	6	52		46·8		R. F. = 21
		19	53	10	40·0		NW 2
		38	55	30	31·8		gegen N dünner Stratus
		50	56	45	28·5		
	2	28	62	15	21·8		
		45	64	45	12·3		$T = 28·4$
	3	2	67	30	8·0		A. F. = 4·7, R. F. = 17
22./XI.	8h	50m	65		83	4·1	wolkenlos
	9	4	63	20	85		windstill
		18	61		114		$b = 743·3$
		28	60	10	145		
		45	57	30	178		
	10	0	55	45	208		
		15	54	20	233		
		42	51	40	241		$T = 24$
		46	51	20	264		A. F. = 7·1, R. F. = 32

Tag	Zeit		z		I	I′	Bemerkungen
22./XI.	11h	1m	50°	40′	274		
		45	48	45	274		
	12		48	40	147		
		15	49		181		W 1
		22	49	30	142		$T = 27 \cdot 2$
		41	50	30	117		A. F. = 6·1
	1		51	20	119		R. F. = 23
		17	53	20	119		
		29	54	20	119		
		47	56	45	101	3·5	$b = 741 \cdot 5$
	2		58		80		windstill
		15	59	45	66		$T = 29 \cdot 3$
		52	65	15	38·0		A. F. = 8·6
	3	14	69		28·8		R. F. = 28
		30	72	40	14·6		
		46	74	50	7·2		$b = 741$
	4	3	77	30	2·0		am Horizonte Rauch
23./XI.	8h	45m	66		81	3·5	wolkenlos
		58	64	15	112		windstill
	9	15	61	30	161		$b = 743$
		30	59	40	172		$T = 23 \cdot 2$
	10		55	45	175		A. F. = 8·7
		20	53	40	202		R. F. = 41
		55	50	45	212		SW 1
	12	10	49	15	195		$T = 27 \cdot 5$
		30	50	10	182		A. F. = 7·7
		47	50	50	140		R. F. = 28
	1	10	52	40	57		
		40	55	45	60		windstill
	2	24	61	20	33·4		$T = 28 \cdot 9$
	3		67		18·9		A. F. = 7·8, R. F. = 26
		35	72	40	4·1		$b = 740$

III. Messungen in Ceylon.

Tag	Zeit		z		I	I'	Bemerkungen
21./XII.	1^h	18^m	36°	20'	332	14·2	Um die Sonne weit herum völlig frei. Gegen S und E Cumulus
		29	37	30	295	15·4	
		39	38	45	242	13·6	
		49	40		208	15·4	NNW 2 $T = 27·3$
	2	9	44		197	14·2	A. F. = 22·1, R. F. = 82
		21	46	5	198	13·6	
	3	19	57	5	136	13·6	Später bewölkt. Um 6^h Gewitterregen.
22./XII.	12^h	39^m	32		302	9·4	Den Vormittag über völlig umwölkt. Gegen 10^h Sprühregen. — Gegen Mittag einzelne Stellen wolkenfrei.
		49	32	40	304	23·8	Von 3^h an Regen.
23./XII.	8^h	42^m	57	5	178	47·6	wolkenlos
		54	54	40	163	54	$T = 27·2$
							A. F. = 22, R. F. = 82
	9	39	45	20	161	11·3	NE 1
		44	44	50	162	33	
	10	41	36	20	320	41·4	
		59	33	35	435	18·5	
	11	4	33	30	457	16·6	vereinzelter Cumulus
		16	32		435	18·5	
		23	31	45	425	29·2	
		28	31	30	396	15·4	
		33	31	20	402	18·5	
		56	30	20	358	13·4	
	12	4	30	20	298	8·6	
		14	30	45	303	8·6	
		19	31		327	10·5	
		28	31	20	490	16·6	
		30	31	25	510	18·5	

Tag	Zeit		z		I	I'	Bemerkungen
23./XII.	12h	37m	31°	45'	488	18·5	$b = 754·8$
		43	32		435	18 5	
		51	32	40	435	18·5	
	1	44	39	25	338	20·7	Cumulus wird dichter. Um 2h 40m starker Regen, abends schwaches Gewitter.
24./XII.	7h	24m	73	30	90	50·2	wolkenlos $T = 28·8$
		35	71	40	81	29	A. F. = 21·0, R. F. = 71
		43	69	42	90	23 8	
		50	68	10	94	16·6	
	8	4	65	5	115	16·6	NE 1
		16	62	30	141	16·6	
		24	60	50	138	16·6	
		34	58	45	159	13 4	etwas schleierig
		51	54	35	156	16·6	
		59	53	30	158	23·8	
	9	14	50	50	244	15·4	$b = 758$
		17	50	14	269	15·4	
		19	49	50	287	15·4	NE 2
		29	47	40	225	15·4	
		49	44	25	258	15·4	vereinzelter Cumulus
	10	9	40	25	287	15·4	
		19	38	50	299	16·6	
		34	36	20	319	18·5	
		51	35		295	43·3	viel Cumulus
	11	9	32	45	322	49·5	
		24	32		256	43·3	
		39	31	15	267	25·5	
		56	30	20	259	40·5	
	12	14	30	51	456	18 5	Sonne weit herum völlig frei.
		17	31		415	18·5	

Tag	Zeit		z		I	I'	Bemerkungen
24./XII.	12h	19m	31°	5'	435	18·5	
		21	31	15	415	18·5	
		23	31	20	435	18·5	
		24	31	25	428	18·5	
		40	32	15	403	23·8	tiefblauer Himmel
		47	32	35	410	16·6	
		49	32	40	417	16·6	
		54	33	5	418	15·4	
		57	33	30	417	16·6	
	1	4	34	20	417	16·6	
		7	34	45	410	16·6	
		13	35		415	18·5	$b = 755·8$
		16	35	20	412	21·7	
		26	36	20	372	23·8	
		28	36	25	365	23·8	
		32	37	40	365	23·8	
		36	38	10	352	25·9	
		44	39	20	346	25·9	
		48	40		326	23·8	am SE-Horizonte Cumulus
		55	41	10	334	25·9	
	2	2	42	35	323	25·9	
		11	44	25	297	25·9	$T = 29·1$ A. F. = 22·9, R. F. = 77
		24	46	35	236	13·6	zunehmende Bewölkung
		39	48	55	256	18·5	Abends starkes Gewitter und viel Regen.
25./XII.	8h	34m	58	45	163	0	vereinzelter Cumulus
		39	58	35	171	52	
		54	54	35	247	27·1	
		59	53	30	220	29·2	
	9	1	53	20	233	25·9	
		6	52	5	227	27·1	
		14	50	50	241	27·1	NE 1, $b = 758$

Tag	Zeit		z		I	I'	Bemerkungen
25./XII.	9h	16m	50°	5'	222	27·1	
		30	47	35	244	23·8	
		39	45	40	235	23·8	
		59	42	30	235	23·8	
	10	9	40	25	244	23·8	$T = 26 \cdot 8$
							A. F. = 20·6, R. F. = 79
		19	38	50	258	23 8	
		29	37	40	268	23·8	
		49	35		174	27·1	viel Cumulus
	11	18	32		181	29·2	
		34	31	20	407	27·1	die Sonne völlig frei
		36	31	15	403	23·8	
		49	31	5	351	20·7	
		53	30	30	368	20·7	
	12	4	30	20	412	20·7	
		9	30	35	415	18·5	
		14	30	51	455	18·5	
		19	31	5	405	21·6	
		26	31	20	363	27·1	
		28	31	20	348	23·8	die Sonne weit herum
		30	31	25	340	20·7	völlig frei
		34	31	45	340	20·7	
		39	32	10	302	20 7	
		42	32	20	307	20·7	
		47	32	35	302	20·7	
		50	32	50	336	23·8	
		53	33	10	387	23·8	
		57	33	30	433	20 7	
	1	3	34	10	433	20·7	
		9	35		409	23·8	
		14	35	20	412	20·7	
		21	36	20	409	23·8	
		24	36	35	387	23·8	
		29	37	30	389	21·6	

Tag	Zeit	z	I	I'	Bemerkungen
25./XII.	1h 32m	37° 40'	404	23·8	
	39	38 45	348	23·8	
	45	39 50	350	21·6	
	48	40	336	23·8	
	55	41 10	326	23·8	
	59	42	299	23 8	$b = 756 \cdot 8$
	2 9	43 50	315	23·8	
	19	45 40	318	20·7	
	21	45 40	326	23·8	
	26	46 50	304	23·8	
	56	52 35	276	26·0	Cumulus bedeckt zeitweilig die Sonne. Um 4h Gewitterregen.

B. Luftelektrische Messungen.

II*b*. Messungen in Delhi.

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
25./X.	9h 6m a.				116	Absolute Messung auf freiem Felde vor dem Cashmere Thore.
	9	21·9	6·7	35	115	
	20				105	
	21				110	
	28				71	Wolkenlos, windstill.
	30				67	
	35	23·2	7·0	33	69	
	45				66	
11./XI.	5h 10m p.	23·4	3·2	15	54	Absolute Messung auf freiem Felde nördlich von Safdar Jungs Grabmal.
	17				45	
	18				44	
	20	22·9	2·6	12	43	

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
11./XI.	5^h 25^m	22·7	2·5	12	30	Wolkenlos.
	30	22	2·4	12	29	$b = 739$
	36	21·2	2·6	14	33	WNW 1
	45	20·5	2·8	16	31	
	55	19·7	2·5	14	31	
	6 5	19	2·0	12	38	
11./XI.	10^h 51^m p.	15·6	2·1	16	269	Relative Messung, durch Vergleich auf die Ebene reduciert.
	11 26				265	
	41	15·2	1·9	17	269	
	53				254	
12./XI.	0 3 a.				254	Wolkenlos.
	23				245	
	33	14·2	2·0	16	245	
	48				240	
	58	13·8	1·8	16	232	
	1 13				249	
	26	13·7	1·7	15	240	
	37				226	
	51	13·0	1·9	18	212	WSW 1
	2 4				208	
	16				196	
	34	13·5	1·6	14	172	
13./XI.	10^h 10^m a.	23·4	3·2	15	172	Wolkenlos.
	25				192	Luft ungewöhnlich transparent.
	11 23	25·9	2·4	10	140	
	35				149	
	55	25·8	2·7	11	149	WNW 1
	12 12 p.				126	
	1 9	27·6	2·5	9	136	
	34				131	
	2	28·1	2·6	9	111	

IV. Messungen in Luxor.

a) Messungen im Nilthale.

Tag	Zeit		T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
15./I 1900	3ʰ	15ᵐ p.					55	Leichte Streifenwolken.
		35					55	
	4						61	
		30					— 61	
		42					69	
	5	56					125	
	6	18	17·9	8·7	57		212	
		33					238	
	7						222	
	8	25					388	
		55	13·0	8·4	76	755·8	236	
	9	25					234	
		55					186	
	10	25					164	
		55					141	
	11	25					125	
15./I.	5ʰ	12ᵐ p.					33	Absolute Messung auf freiem Felde.
		14					41	
		15					50	
		18					63	
		20					73	Sonnenuntergang
		24					112	
		26					79	
		27					79	
		28					67	
		29					81	SE 1
		30					67	
		31					81	
		32					69	

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
15./I.	5h 33m					63	Vereinzelte leichte Streifenwolken.
	35					76	
	36					69	
	37					63	
	45					69	
16./I.	8h 5m a.	14·0	7·5	63	58·2	269	Dünner Stratus über dem ganzen Himmel. Man sieht durch ihn hindurch. Windstill.
	20					136	
	35					89	
	50					65	
	9 5					79	
	20					57	
	35					75	
	10					52	
	15					44	
	30	15·9	6·9	51		—190	N 1
	45					71	
	11 25					44	schleierig
	43					—362	
	50					—174	
	12				57·3	— 89	
	30 p.					± 0	
	45					— 52	
	1				56·7	—155	
	55				56·2	—196	N 1
	2 20	21·0	8·6	47		—134	Schleier wird dichter
	3				55·5	—168	
	15					— 89	
	35					— ∞	es trübt sich der ganze Himmel
	4 15				55·5	— ∞	
	5					61	
	10 40	14·0	6·1	52	56·3	143	heiterer
	50					125	

Tag	Zeit		T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
17./I.	3h	30m a.					105	
	4	20	8·4	6·3	77	56·0	119	
		35					151	
		38					196	
		50					262	im SW leichter Cirrus
	5	5					280	
		15					297	
		20					273	
		30					162	
		35					210	
		45	7·9	5·0	63		238	ganz leichter Cirrus über dem ganzen Himmel
	6						259	
		5					287	
		15					262	
		30					185	
		45					257	Cirrus zerstreut sich
		50					308	
	7		8·0	5·4	67		469	Sonnenaufgang
		5					504	
		7					539	
		8					574	
		15					308	
		16					238	windstill. Vereinzelter Cirrus
		27					218	
		30					240	
		43					186	
		45				57·0	186	
		48					186	
	8	3					174	Nur gegen W etwas Cirrus
		5					182	
		17	10·5	5·5	58		151	
		35					50	
		50					44	
	9	10					39	

Tag	Zeit		T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
17./I.	9^h	40^m					44	
	10					58·0	35	
		15					—107	
		30				57·5	— 44	
		45				57·0	— 71	
	11						— 94	
		18	17·3	3·9	27	56·8	— 39	
		30					71	völlig klar bis auf Cirrus in NW
		40					52	
		50					39	
	12	17 p.	18·4	3·8	24·3		46	wolkenlos
		34				55·7	— 71	NE 2
		45					— 44	
	1					55·5	49	
		30				55·3	44	
		55					44	
	2	15					52	
		30				55·1	35	
		48	20·5	4·2	23·2		35	
	3						39	
		20					35	NE 3
		35					71	in W Cirrus
	4	10					39	
		20					35	
		34				55·3	39	
		45					39	
	5						± 0	in W Stratus
		15					55	
		25					58	
		33	17·5	4·3	29		52	
		40					58	Schleier über dem ganzen Himmel
		50					71	
	6	5					52	NE 4

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
17./I.	6^h 20^m				55·7	58	
	42					111	
	7					39	Um 7^h 30^m heftiger Staubwind aus N $b = 755·0$, $\frac{\partial V}{\partial n} = -\infty$
18./I.	7^h 17^m a.					134	wenige leichte Federwolken in N
	30				58·8	79	
	37					65	windstill
	49					113	
	55					49	N 1
	8 19					65	
	30					57	
	9				59·9	52	
	50	13·9	5·9	50		44	N 3
	12 10 p.					39	wolkenlos
	30	16·5	6·0	43	58·8	— 52	N 2
	45				58·2	44	
	1					44	
	15				58·0	39	
	55	19·2	6·3	39	57·5	— 46	
	2 15					41	N 2
	30					39	
	45				57·3	± 0	
	3 44				57·2	52	
	4 5	20·0	6·9	40	57·3	71	
	30					58	
	45					58	N 1
	5				57·3	58	
	15					71	
	20					50	windstill
	38					50	leichter Schleier

Tag	Zeit		T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
18./I.	5ʰ	45ᵐ					65	
		52					50	
	6						50	
		7	15·1	6·4	51		149	
		10				57·5	156	
		20					285	
		26					214	
		38					442	vereinzelter Cirrus
		40					417	
		55				57·8	65	
	7	2					75	SE 1
		15					79	
		30					89	
	8						50	
		25					50	
		40					95	
	9					57·8	50	
		20					75	
		40	12·5	6·5	60		92	
	10						95	
		25					85	wolkenlos
		45				58·3	105	N 1
	11						98	
		15					98	
		30					105	
		50				58·5	61	
19./I.	0	15 a.	10·4	6·1	65		65	leichter Cirrus im Zenith
		40					143	
	1						65	
		18					128	wolkenlos
		30					69	
		52				58·8	95	
	2	15					89	

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
19./I.	2h 30m a.					85	
	3					105	
	20					113	
	40				58·3	125	
18./I.	3h 10m p.					17	Auf freiem Felde gemessen.
	18					22	
	25					26	leichter Schleier
	33					32	N 1
	38					21	
20./I.	12h 5m p.					36	im Nilthale auf freiem Felde unter Deir-el-Bahri. Wolkenlos
	10					35	
20./I.	1h 4m p.	20·4	9·4	53	54·5	44	wolkenlos
	30					52	
	52					52	
	2 15					75	N 1—0
	30					75	
	53					58	
	3 15					107	
	33				54·0	71	
	4					73	
	30					101	
	5 4	19·2	8·6	52	54·2	162	in W etwas ganz leichter Cirrus
	17					95	
	30					101	
	45					166	
	6					196	wolkenlos
	15					186	
	30	17·7	6·6	44		182	
	45				54·7	240	
	55					362	

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
20./I.	7^h 5^m p.					380	
	15					305	
	35					328	
	8 15	14·5	7·5	61	55·7	297	
	37					218	
	45					234	
	55					257	
	9 25					222	leichter Cirrus in N und W
	40	15·4	7·1	55		182	
	10 15					146	etwas dunstig
21./I.	6^h 30^m a.	14·3	7·5	62		39	dichter Stratus über dem ganzen Himmel. Hohe Temperatur am Morgen. Windstill
	7				54·8	37	
	25					35	
	48					35	
	8 50					35	
	11					39	
	12				53·8	— 35	
	30 p.	20·5	9·6	54	53·4	39	
	1					39	
	2 15					39	etwas heiterer
	30					28	
	3					42	
	30					44	schleierig, sonst wolkenfrei
	4	23·7	8·5	39	52·8	35	
	5 25					38	es wird wieder trüb
	45	20·6	7·3	41	52·5	49	
	6 30					42	ganz mit Stratus umzogen
23./I.	4^h 5^m p.	18·3	5·9	38	54·0	38	wolkenlos bis auf wenig leichten Cirrus
	40					55	
	5 33					46	
	50				54·2	71	

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
23./I.	6[h] 5[m] p.	16·2	4·8	35		87	N 2
	34					63	
	42					64	
	7					105	
	9				54·7	216	

b) Messungen auf dem Felsen über Deir-el-Bahri.

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
19./I.	6[h] 5[m] a.	9·3	6·1	70	744·3	112	
	20					111	
	30					102	
	40					133	
	7 10					152	N 1
	25					118	schleierig
	34	11·2	6·1	61		110	
	40					118	N 2
	50					131	
	8	11·4	5·4	54		133	
	15					147	
	30					144	
	48	11·7	6·5	63		175	
	55					155	
	9 10				45·3	122	Schleier verschwindet
	30					137	
	45					117	
	10				44·8	132	
	25	17·3	6·6	45		153	
	45					124	
	52				44·8	135	stellenweise dünner Cirrus, sonst klar
	11 5					138	
	23					143	

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
19./I.	11h 36m	19·5	7·1	42	44·2	138	
	50					132	N 1
	12 2 p.					133	
	15	20·7	6·9	38	44·2	131	
	30	20·7	6·6	37	43·8	133	viel Cirrus am ganzen Himmel
	45					122	
	1	21·5	6·4	34	43·7	118	
	15					118	
	30					112	
	45					118	
	2	21·0	6·2	33	43·0	128	
	15					110	
	30	19·3	5·8	35	43·0	97	SE 2
	45					102	
	3					96	
	15					102	
	25	17·6	5·2	34	43·0	112	Cirrus im Verschwinden
	50					110	
	4	17·6	5·7	38		114	
	30					110	
	55					109	
	5 15					121	
	20					107	
	35					100	
	53	16·0	5·3	39	42·8	122	
	6 5					107	
	20				43·0	116	
	32					122	
	45	16·1	5·0	37		122	leichter Cirrus im W, sonst klar
	7					128	
	15					133	N 1
	30					140	
	45					164	
	8					178	wolkenlos

Tag	Zeit		T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
19./I.	8h	15m	14·0	5·6	47	42·8	147	
		30					140	NW 2
		45				43·4	124	Stratus im W
	9		14·2	4·7	39		104	wolkenlos
		15					143	
		30					133	
	10						124	
20./I.	0	10 a.					107	wolkenlos
		20					101	
	3	30					99	wolkenlos
		45				42·3	97	
	4		10·1	5·0	54		101	NW 1
		15					104	
		28					99	
		40	9·8	5·3	58	42·3	107	
		55					107	
	5	10	9·6	5·2	58		104	
		30					100	
		50					118	
	6						107	
		15	8·1	5·3	66	42·7	107	
		30				43·3	98	
		37					106	NW 2
		45					107	
		52					98	Sonnenaufgang
	7		8·8	5·6	67	43·3	107	
		15					133	
		35					131	
		45					119	
	8						155	NW 1
		10				43·2	161	
		20					159	
		30					168	
		45	12 0	6·5	63		144	

Tag	Zeit	T	A. F.	R. F.	b	$\frac{\partial V}{\partial n}$	Bemerkungen
20. I.	9h					116	
	15m					101	
	30					133	
	40					126	
	45	16·7	6·3	45	43·0	120	wolkenlos
23. I.	11h 48m a.					109	Bis auf wenig Cirrus völlig wolkenfrei
	55					112	
	12					111	etwas dunstig
	7 p.					101	
	10					106	N 2—3
	15					114	

I. Aktinometrische Messungen im indischen Ocean.

Messungen der Intensität der Sonnenstrahlung auf hoher See fehlen bisher völlig. Dennoch kann man durch sie am ehesten hoffen, Aufschluss über das Gesetz zu erhalten, nach welchem die Absorption des Sonnenlichtes in der Erdatmosphäre mit wachsender Sonnenhöhe vor sich geht. Die Abwesenheit aller zufälligen, störenden Einflüsse, wie Staub und Rauch, die bei Beobachtungen zu Lande die wahren Werte verdecken, machen es hier möglich, auch bei tiefem Sonnenstande noch Werte zu erhalten, die als gesetzmäßig gelten dürfen. Ich ergriff daher die Gelegenheit, um auf der Überfahrt von Aden nach Bombay, also bei nahezu gleichbleibender geographischer Breite, in der reinen Luft des indischen Oceans derartige Beobachtungen anzustellen. Auf der Rückfahrt konnte ich leider nicht beobachten, da die Sonne stets hinter Wolken auf und untergieng.

Zur Ausführung der beabsichtigten Messungen wählte ich eine erhöhte Stelle des Schiffes, da alle Theile des Verdeckes zum Schutze gegen die Sonne durch Leinensegel abgedeckt werden. Nachtheilig war hiebei, dass auf diesem erhöhten

Standorte das Vibrieren des Schiffskörpers manchmal, besonders bei forcierter Fahrt, das Ablesen des Elektrometers erschwerte. Fasst man die beobachteten Werte zu Mitteln zusammen, so erhält man die folgende kleine Tabelle:

Tabelle I.

z	*n*	*I*	*z*	*n*	*I*
86°	1	2·2	75°	2	40·8
85	1	2·1	74	2	44·0
84	2	3·2	73	3	74
83	4	2·7	72	2	84
82	4	5·0	71	2	85
81	4	8·3	70	2	95
80	4	10·4	69	2	111
79	4	12·0	66	3	174
78	4	20·8	62	3	200
77	5	22·8	59	3	245
76	5	37·2	55	3	293

Es bedeutet hier *n* die Zahl der Beobachtungen.

Ich habe versucht, inwieweit die erhaltenen Werte durch die Lambert'sche Absorptionsformel $I = I_0 a^s$ darstellbar sind. Es wird dies wesentlich davon abhängen, welcher Betrachtungsweise man sich bei der Berechnung des vom Lichtstrahl in der Atmosphäre zurückgelegten Weges anschließt. Ich habe mich diesbezüglich auf die Formeln von Bouguer-Violle,[1] Maurer[2] und von Elster und Geitel[3] bezogen, konnte aber durch keine eine befriedigende Darstellung der Beobachtungsresultate erzielen. Sie ergeben alle für größere Sonnenhöhen zu kleine Intensitäten. Es mag dies darin liegen, dass der Transparenzcoefficient *a* noch als Function des Wasserdampfgehaltes der durchstrahlten Luftschichten auszudrücken ist.

[1] Radau, Actinométrie. Gauthier-Villars, Paris 1877.

[2] Maurer, Ann. der schweizerischen meteorol. Centralanstalt, Bd. 18.

[3] L. c.

II. Messungen in Delhi (Nordindien).

Die Beobachtungen des Potentialgefälles erstreckten sich auf einen längeren Zeitraum und wurden zum größten Theile auf dem Dache des Thorgebäudes von Safdar Jungs Grabmal ausgeführt. Dasselbe befindet sich 6 Meilen südlich von Delhi in völlig flachem Lande. Ich hatte gehofft, in dieser beträchtlichen Entfernung von der Stadt dem störenden Einflusse des Rauches und des Staubes zu entgehen, doch sah ich mich hierin getäuscht, da bei der dichten Bevölkerung des Landes und dem verwendeten kohlenstoffarmen Heizmateriale die ganze umliegende Gegend früh und abends vom Rauche der Herdfeuer durchzogen wird. Es ist dies umso misslicher, als in diese Zeit auch die Maxima der, wie ich glaube, in Delhi stark ausgeprägten täglichen Periode fallen. Thatsächlich konnte ich regelmäßig in den Morgen- und Abendstunden ein kräftiges Ansteigen des Potentialgefälles constatieren, bin mir aber nicht darüber klar geworden, inwieweit dieses nicht durch den stets positiv geladenen Rauch veranlasst oder mindestens verstärkt wurde. Ich habe daher die diesbezüglichen Beobachtungen nicht weiter mitgetheilt, sondern mich darauf beschränkt, einige wenige, zum Theile direct in der Ebene gewonnene Messungen anzuführen, von denen ich glaube, dass sie von allen störenden Einflüssen frei sind. Die aus ihnen für das Potentialgefälle und den Dunstdruck gebildeten Mittelwerte, 127 und 3·5, finden sich nicht in Übereinstimmung mit der Beziehung, welche nach den bisherigen Erfahrungen zwischen diesen beiden Größen besteht.

Auch diese Thatsache weist auf die Existenz einer täglichen Periode hin, insoweit nämlich die beobachteten Werte in die Zeit der Minima gefallen sein dürften. Zudem spricht auch die Änderung des Potentialgefälles während der einzelnen Beobachtungsreihen für die Richtigkeit dieser Deutung. Es scheint übrigens, dass auch im Dekkan (Jeur), wo Dr. R. Ludwig während der totalen Sonnenfinsternis 1898 beobachtet hat,[1]

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CVIII, 1899.

ebenfalls eine stark ausgeprägte tägliche Periode der Luftelektricität besteht; wenigstens weist darauf der Umstand hin, dass auch dort der aus Mittagsbeobachtungen abgeleitete Mittelwert[1] des Potentialgefälles $\frac{\partial V}{\partial n} = 36$ in Bezug auf den Dunstdruck von 8·3 *mm* viel zu niedrig liegt. Zudem sind die klimatischen Verhältnisse im Dekkan und im Penjab während der Wintermonate die gleichen.

Was die aktinometrischen Messungen in Delhi anbelangt, so wurden dieselben ebenfalls auf dem Thorgebäude des erwähnten Grabmales, in etwa 10 *m* Höhe über dem Erdboden ausgeführt. Nur am 1. und 2. November wurde in Delhi selbst beobachtet. Ich habe mich begnügt, die Messungen auf 9 Tage auszudehnen, da dies bei der völligen Constanz des Wetters ganz ausreichend schien. Thatsächlich zeigen sowohl die einzelnen Reihen, wie auch die Mittelwerte einen bemerkenswert regelmäßigen Verlauf. Stellt man nämlich die Messungen nach Zenithdistanzen in Gruppen zusammen und trennt hiebei die Vormittags- und Nachmittagswerte, so gelangt man zur folgenden Tabelle:

Tabelle II.

z	n	I Mittel	n	I a. m.	n	I p. m.
42—45°	18	263	9	265	9	260
45—50	57	199	33	217	24	181
50—55	57	166	30	237	27	95
55—60	31	117	19	169	12	64
60—65	22	71	14	117	8	25
65—70	16	44	9	67	7	20
70—75	7	24	2	34	5	13

[1] Infolge eines Versehens wurde l. c. statt der auf 1 *m* reducierten, die direct beobachteten Werte gegeben.

In Fig. 1 ist der hiedurch ausgesprochene Gang der Strahlung graphisch veranschaulicht. Die Vormittagswerte sind durch die ausgezogene, die Nachmittagswerte durch die gestrichelte Curve dargestellt.

Zunächst fällt der große Unterschied zwischen der vor- und nachmittägigen Strahlung auf, ein Unterschied, der sich auch leicht an dem Wiesner'schen Photometer für die chemisch wirksamen Strahlen constatieren ließ. Sogar für das bloße Auge

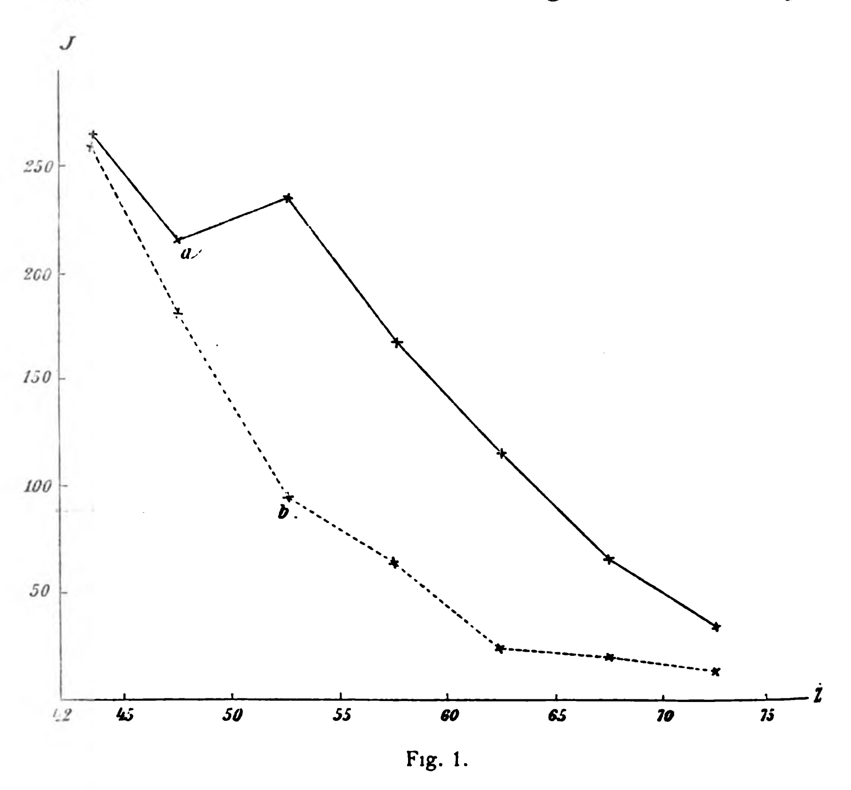


Fig. 1.

wird diese kräftige Absorption der Sonnenstrahlen in den Nachmittagsstunden wahrnehmbar. Weiters ist die starke Mittagsdepression bemerkenswert, welche sich allerdings nur bei ihrem Eintritt in *a* auffallend in die Curve eingezeichnet hat. Ihr Aufhören, welches etwa nach *b* fällt, geht zwischen den rasch sinkenden Nachmittagswerten nahezu völlig verloren. Sie correspondiert der Form nach mit der in Luxor beobachteten.

III. Messungen in Ceylon.

Ich benützte den einwöchentlichen Aufenthalt in Colombo zu Strahlungsmessungen. Die Anregung hiezu gab der Umstand, dass Colombo der einzige in tropischen Breiten gelegene Ort ist, von wo bisher absolute Messungen des atmosphärischen Potentialgefälles vorliegen.[1] Dieses selbst habe ich nicht beobachten können, da der Witterungscharakter während der Zeit meines Aufenthaltes nie ein normaler war. Dagegen zeigte sich der Himmel oft stundenlang wolkenlos oder nur zum kleinen Theile mit scharfbegrenztem Cumulus bedeckt, so dass die aktinometrischen Messungen keinen weiteren Schwierigkeiten begegneten. Ich möchte nur bemerken, dass die außerordentlich transparente, durch häufige Regenfälle gereinigte Atmosphäre, die auch den Himmel in tiefem Blau erscheinen ließ, gewiss für die Intensität der Sonnenstrahlung die größtmöglichen Werte geliefert hat.

Die folgende Tabelle enthält wieder die Mittelwerte aus den Messungen.

Tabelle III.

z	n	I Mittel	n	I a. m.	n	I p. m.
30—35°	59	369	18	344	41	395
35—40	25	320	5	293	20	347
40—45	13	270	5	237	8	303
45—50	11	252	5	230	6	273
50—55	12	221				
55—60	5	161				
60—65	2	139				
65—70	3	99				
70—75	2	86				

Man vergleiche hiezu die graphische Darstellung, Fig. 2.

[1] F. Exner, Beobachtungen über atmosphärische Elektricität in den Tropen. Diese Sitzungsber., Bd. 98 und 99 (1889 und 1890), auch Exners Repertorium, Bd. 27.



Hier überwiegt die nachmittägige Strahlung merklich die in den Vormittagsstunden. Von einer Mittagsdepression ist

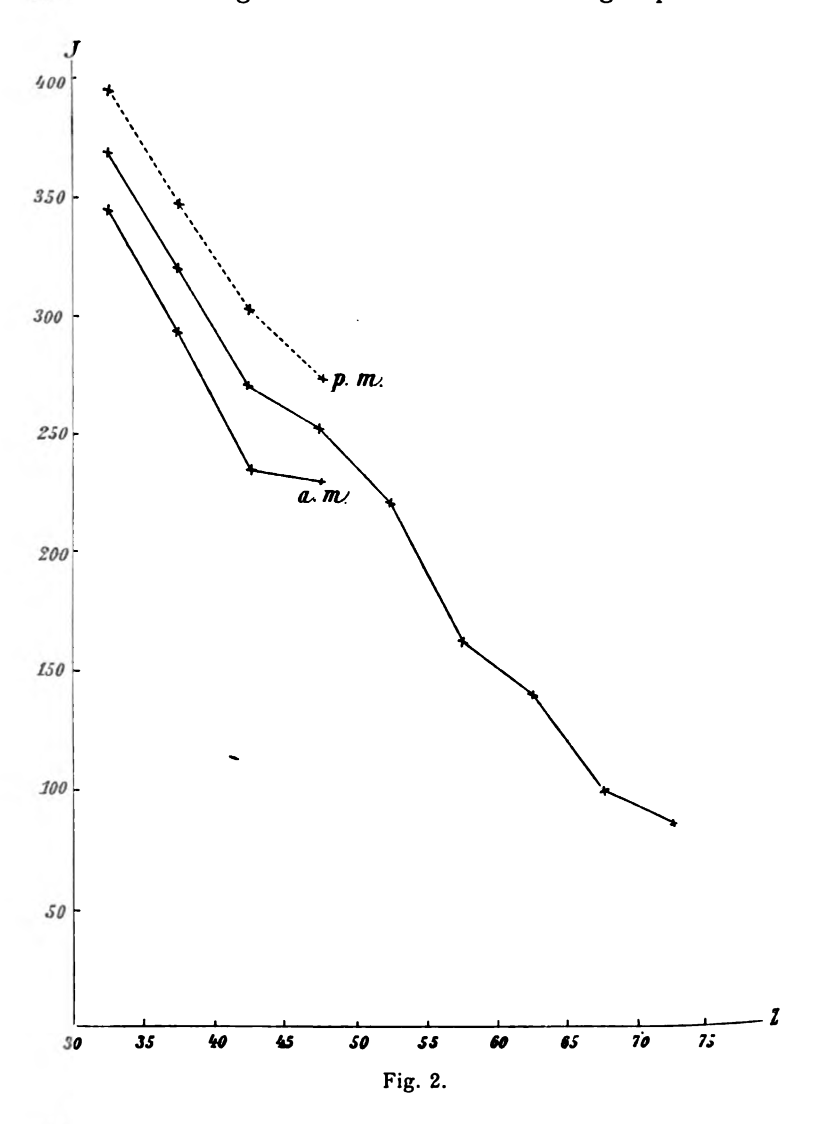


Fig. 2.

nichts zu erkennen. Was die Größe der Strahlung anbelangt, so bleibt sie hinter der von Herrn Prof. Exner in Oberägypten beobachteten wesentlich zurück. Ich verweise diesbezüglich auf die betreffende, bereits citierte Abhandlung. Dort ist auch

auf die Widersprüche hingewiesen, die sich hieraus und aus den luftelektrischen Messungen an beiden Orten für die photoelektrische Theorie der Luftelektricität ergeben.

IV. Messungen in Luxor (Oberägypten).

Als eines der Resultate der Messungen von Herrn Prof. Exner an diesem Orte hatte sich die Existenz einer täglichen Periode der Luftelektricität von einer Größe und Regelmäßigkeit ergeben, wie sie noch nirgends beobachtet worden war. Fiel die Zeit meines Aufenthaltes auch zwei Monate früher, so konnte ich immerhin bei den stabilen Witterungsverhältnissen jener Gegend darauf rechnen, dieselben, oder wenigstens ähnliche Verhältnisse anzutreffen. Meine Beobachtungen bestätigten diese Voraussetzung. Für alle Erklärungsversuche dieser täglichen Periode muss es weiters von grundlegender Bedeutung sein, zu erfahren, wie sie sich mit der Höhe ändert. Für eine derartige Untersuchung sind die localen Verhältnisse in Luxor ungemein günstig. Es erhebt sich nämlich am linken Nilufer in etwa einstündiger Entfernung von der Ortschaft das Randgebirge in jähem Abfalle bis zu 200 *m* Höhe über die Thalebene.

Ich habe daher auch auf der Höhe beobachtet, und zwar auf dem Felsen, der über Deir-el-Bahri ansteigt und das Thal der Königsgräber von der Nilebene trennt. Er bildet auf der Höhe ein Plateau von nicht unbeträchtlicher Ausdehnung. Dessenungeachtet können die dort gewonnenen Werte des Potentialgefälles kaum als absolute angesehen werden, da benachbarte Bergrücken das elektrische Feld gestört haben dürften. Die Höhe dieses Beobachtungspunktes über dem Nil betrug nach zweimaliger barometrischer Höhenmessung 154 *m*.

Zu bemerken wäre noch, dass die Bewölkungsverhältnisse nicht ganz die günstigen waren, wie sie Herr Prof. Exner antraf. Vielmehr war der Himmel öfters durch kürzere Zeit dicht verschleiert. Doch stellt sich nach Verschwinden des Wolkenschleiers das normale Gefälle sehr rasch wieder her. Immerhin lassen die vorstehend mitgetheilten Aufzeichnungen erkennen, dass Wind und Bewölkung die Beobachtungen am 16. und



21. Jänner derart störten, dass sie bei der Bildung der Stundenmittel ausgeschaltet werden mussten.

Vereinigt man nämlich die im Thale gewonnenen Messungen (Gruppe IV, *a*), welche zum größten Theile vor einem Fenster ausgeführt und durch mehrmaligen Vergleich auf die Ebene bezogen wurden, zu Stundenmitteln, so erhält man die folgende Tabelle, deren regelmäßiger Gang auf der beigefügten Tafel als Curve I veranschaulicht wird.

Tabelle IV.

Zeit	Potentialgefälle V in $\frac{V}{m}$	Zeit	Potentialgefälle V in $\frac{V}{m}$
0^h	101	12^h	45
1 a.	86	1 p.	48
2	95	2	57
3	105	3	68
4	130	4	68
5	245	5	86
6	251	6	152
7	260	7	246
8	195	8	300
9	72	9	236
10	65*	10	170
11	58	11	117

Die Curve II wurde des Vergleiches wegen mit eingetragen. Sie gibt den täglichen Gang des Potentialgefälles, wie er aus den Exner'schen Beobachtungen resultiert. Die Übereinstimmung beider Beobachtungsreihen ist eine überraschende und spricht für die außerordentliche Regelmäßigkeit der Erscheinung. Die Maxima fallen genau auf die gleiche Zeit, nämlich auf 7^h a. und 8^h p. Sie sind durch ein sehr stark ausgeprägtes mittägiges Minimum von einander getrennt. Ein zweites Minimum fällt in die ersten Mogenstunden.

* Interpoliert.

Wir wollen nun ganz analog die auf der Höhe von Deir-el-Bahri gewonnenen Werte zu Stundenmitteln zusammenfassen. Obwohl sie sich nur auf einen Tag beziehen, unterliegt dies in Anbetracht der dort beobachteten Regelmäßigkeit der luftelektrischen Erscheinungen keinerlei Bedenken. Wir kommen so zu der folgenden Tabelle:

Tabelle V.

Zeit	Potentialgefälle V in $\frac{V}{m}$	Zeit	Potentialgefälle V in $\frac{V}{m}$
0^h	104	12^h	134
1 a.	—	1 p.	123
2	—	2	117
3	99	3	102
4	100	4	112
5	106	5	112
6	109	6	111
7	116	7	128
8	136	8	157
9	141	9	128
10	131	10	129
11	135	11	115*

Dieselbe ist als Curve III im Diagramme eingezeichnet. Man nimmt ohneweiters wahr, dass auch hier die tägliche Doppelperiode deutlich ausgeprägt ist, dass aber die Maxima und Minima bei weitem nicht so extrem liegen, wie bei den Thalwerten. Es zeigt vielmehr die auf die Höhe bezügliche Curve eine ganz bedeutende Verflachung gegen die im Thale erhaltene. Hiedurch charakterisiert sich die tägliche Periode als eine an die untersten Luftschichten gebundene Störung des normalen Potentialgefälles. Es liegt nahe, diese Störung mit der Bewegung von staubhältiger Luft in Zusammenhang zu bringen, wie sie die in jenen Gegenden ebenfalls mit großer Regelmäßigkeit auftretende tägliche Periode des Luftdruckes zur Folge hat.

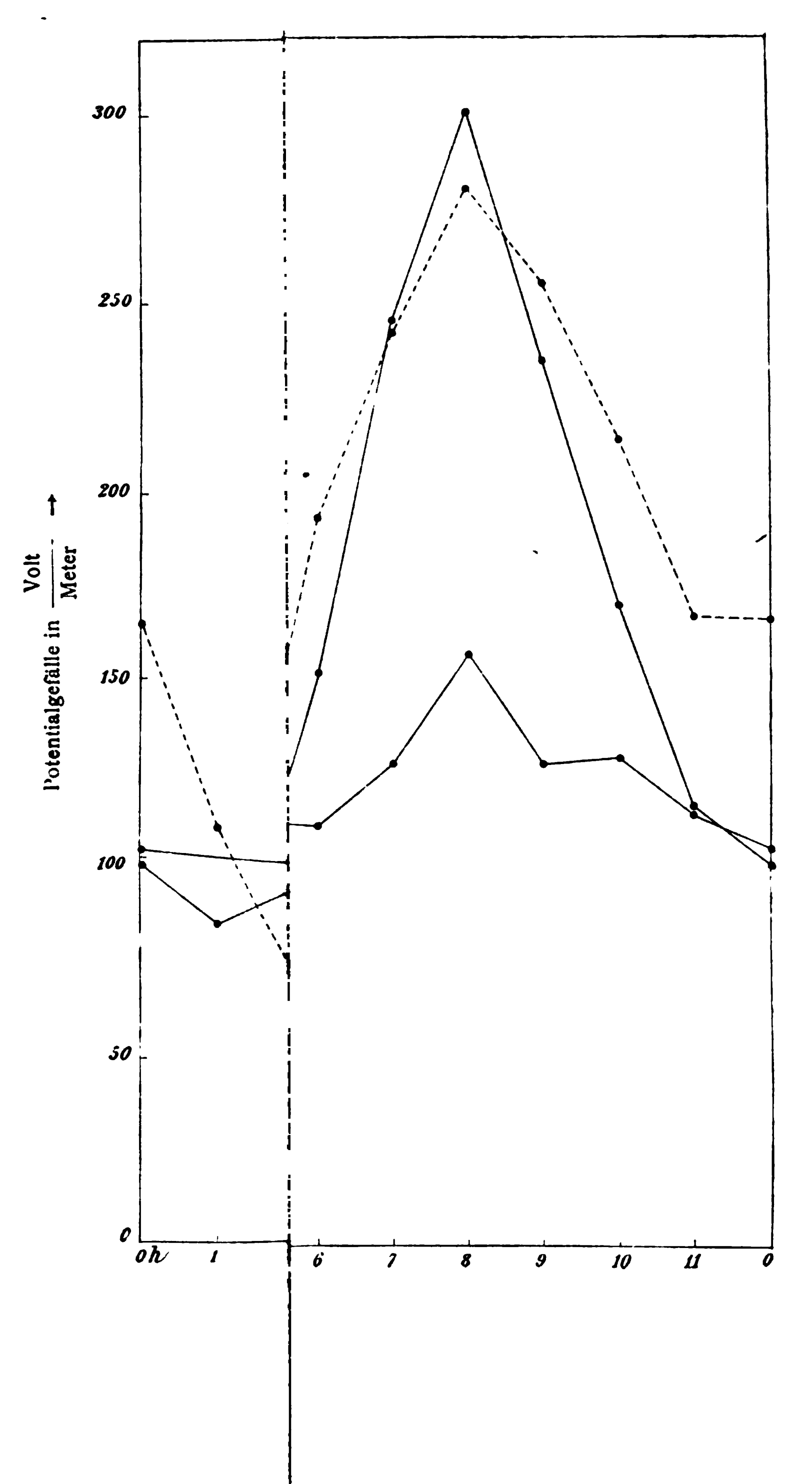
Dies hat bereits Herr Prof. Exner gethan. Aus den beobachteten Barometerständen lassen sich die folgenden vierstündigen Mittel bilden:

0^h— 4^h a.	....	758·4 *mm*,
4 — 8	....	58·0
8 —12	....	57·7
12 — 4 p.	....	56·2
4 — 8	....	55·8
8 — 0	....	56·9

Es fällt somit das barometrische Tagesminimum auf den Nachmittag, das Maximum auf die ersten Stunden nach Mitternacht, und das sind die Zeiten, in welchen auch die Minima der luftelektrischen Periode liegen. Übrigens sind wohl auch die Maxima als Störungen aufzufassen. Wenigstens spricht dafür ihre relativ kurze Dauer, sowie der Umstand, dass das aus den Thalwerten gebildete Mittel des Potentialgefälles $\frac{\partial V}{\partial n} = 132$ und der Mittelwert der Feuchtigkeit A. F. $= 7 \cdot 4$ der zwischen ihnen geforderten Beziehung entsprechen.

Zum Schlusse sei es dem Verfasser gestattet, dem Leiter der Expedition, Herrn Prof. Dr. E. Weiss für sein liebenswürdiges und förderndes Entgegenkommen, welches die Ausführung der vorgehend mitgetheilten Beobachtungen ermöglichte, den geziemenden Dank auszusprechen.

Mache H.:


300
250
200
150
100
50
0
Potentialgefälle in Volt/Meter
0h
1
6
7
8
9
10
11
0

Notiz über die photoelektrische Empfindlichkeit des Eises

von

Dr. Hans Benndorf.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der Universität Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Mai 1900.)

M. Brillouin berichtet[1] über Versuche, die Buisson auf seine Veranlassung hin angestellt hat, um die lichtelektrische Empfindlichkeit des Eises zu prüfen; Herr Buisson bestimmte sie von der Größenordnung $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{20}$ von der des Zinkes.

Außer dieser Mittheilung, die eine kurze Beschreibung der Versuchsanordnung ohne nähere Angabe von Zahlen gibt, habe ich keine ausführlichere Publication dieser Beobachtungen auffinden können.

Bei der großen Bedeutung, die eine so starke Lichtempfindlichkeit des Eises für die Erscheinungen der atmosphärischen Elektricität in schneebedeckten Gegenden haben würde, erschien es mir wünschenswert, die Versuche Herrn Buissons zu wiederholen und nachzuprüfen.

Trotz großer Sorgfalt und Variation der Versuchsbedingungen konnte ich von Eis keinerlei Zerstreuung negativer Elektricität bei Belichtung nachweisen und stehe nicht an, die auffallend großen Werte, die Herr Buisson gefunden hat, entweder Fehlern in der Versuchsanordnung oder einer speciellen Beschaffenheit seines Eises zuzuschreiben.

Im folgenden soll eine kurze Beschreibung meiner Versuche gegeben werden.

---

[1] Ciel et terre, XVIII, 1897; Ref. Met. Zeit., 1898, S. 38.

Die ersten Versuche stellte ich mit einem Exner'schen Elektroskope an; es stand in leitender Verbindung mit einem isolierten Eisstücke, das sich in einem Blechkasten befand und durch ein darüber befindliches, positiv geladenes Drahtnetz negativ geladen werden konnte. Ein abnehmbarer Deckel gestattete, es zu belichten. Eine zwanzigmal schwächere photoelektrische Wirksamkeit, als sie Zink zeigt, hätte man auf diese Weise eben noch merken können; doch zeigte sich keinerlei merkliche Zerstreuung der Elektricität.

Später verwendete ich die empfindliche Methode zum Nachweise photoelektrischer Ströme, die Elster und Geitel[1] angegeben haben, um die elektrische Zerstreuung an mineralischen Oberflächen zu bestimmen.

Der von mir verwendete Apparat unterschied sich principiell nicht von dem Elster und Geitel'schen und war nur den anderen Versuchsbedingungen angepasst.

Nach Buisson soll Eis nur dann erheblich photoelektrisch wirksam sein, wenn seine Temperatur einige Grade unter Null beträgt; sobald eine Wasserschichte auf dem Eise sich bildet, nimmt die Empfindlichkeit rapid ab.

Es war daher nothwendig, einen Raum herzustellen, in dem das Eis längere Zeit seine tiefe Temperatur behalten konnte. Ich verwendete zu diesem Zwecke ein doppelwandiges Zinkblechgefäß von nahezu würfelförmiger Gestalt (25 *cm* äußererSeitenlänge), das mit einerKältemischung gefüllt werden konnte. Die Temperatur sank nach längerem Warten 5° bis 8° unter Null. In den Innenraum führten drei Röhren, zwei engere für die Leitung zum Elektrometer und zur inducierenden Elektricitätsquelle; die dritte, 40 *mm* im Durchmesser, diente zur Beleuchtung und konnte mit einer Gipsplatte oder einer Kappe verschlossen werden. Das zu untersuchende Eis lag auf einem isolierten, stark oxydierten Eisenbleche, das mit einem Quadrantenpaare eines Hallwachs'schen Elektrometers verbunden war und nach Bedarf zur Erde abgeleitet werden konnte. Die Empfindlichkeit des Elektrometers betrug 30 bis 60 Scalentheile per Volt; alle Zuleitungen sowie das Instrument selbst

---

[1] Wiedemanns Annalen, XLIV, 1891, S. 722.

waren natürlich sorgfältig durch eine zur Erde abgeleitete Hülle vor äußeren Strömungen geschützt.

Besondere Sorgfalt verwendete ich auf die wiederholte Prüfung der Isolationen, weil bei dieser Methode Isolationsfehler zu kleine Werte des photoelektrischen Stromes vortäuschen können. In der Entfernung 2 *mm* bis 10 *mm* von der Eisoberfläche befand sich ein Drahtnetz, das abwechselnd positiv oder negativ geladen werden konnte. Zur Ladung wurden benützt entweder die Pole der Gleichstromstraßenleitung mit 150 und 250 Volt oder zwei parallel geschaltete Zambonisäulen von 400 bis 450 Volt oder eine größere mit 1000 bis 1200 Volt. Zur Beleuchtung dienten Sonnenlicht, Bogenlicht, Funken eines Rhumkorffs zwischen Aluminiumkugeln und schließlich Magnesiumlicht.

Ich untersuchte gewöhnliches Flusseis, Kunsteis, frisch gefallenen Schnee, schmutzigen Schnee und schließlich Eis, welches aus destilliertem Wasser hergestellt war. Das verwendete Eis lag in einer Blechbüchse längere Zeit vor dem eigentlichen Versuche in einer Kältemischung von Kochsalz und Eis, wurde dann noch in den vorgekühlten Raum im Innern des Blechgefäßes gebracht und etwa zehn Minuten darin liegen gelassen, ehe die Belichtung vorgenommen wurde.

Für gewöhnlich war das Drahtnetz positiv geladen, nach zwei bis drei Versuchen wurde aber immer eine Gegenprobe mit negativ geladenem Netze gemacht. Obwohl die Empfindlichkeit der Anordnung eine derartige war, dass ein amalgamisches Zinkblech bei Belichtung in wenigen Secunden die Scalen aus dem Gesichtsfelde warf, ließ sich beim Eise selbst nach einer Minute kein Ausschlag constatieren.

Hie und da bewegte sich die Nadel um einige Scalentheile aus der Ruhelage, aber ebenso oft im entgegengesetzten Sinne wie im richtigen, und der Ausschlag konnte immer auf direct nachweisbare äußere Störungen zurückgeführt werden.

Ich fürchtete anfangs, das Eis könnte bei tieferer Temperatur zu schlecht leiten; doch überzeugte mich ein Versuch mit einer Zinkplatte, die durch ein Eisstück von der Elektrometerleitung getrennt war, vom Gegentheile; auch in fester Kohlensäure gekühltes Eis leitet noch genügend gut.

Schließlich stellte ich noch Versuche an mit Eis, das sich aus der Luft an fester Kohlensäure niedergeschlagen hatte, aber ebenfalls mit negativem Resultate.

Noch eines Umstandes möchte ich gedenken. Elster und Geitel haben gezeigt, dass photoelektrisch wirksame Mineralien alle in mehr oder minder starkem Grade phosphorescieren. Es ist bekannt,[1] dass auch Eis, aber nur unter besonderen Umständen, im Dunkeln leuchtet; die Verhältnisse, unter denen das Leuchten eintritt, lassen vermuthen, dass es sich um eine Luminierungserscheinung beim Auskrystallisieren handelt und nicht um eigentliche Phosphorescenz.

Aus den beschriebenen Versuchen glaube ich also schließen zu dürfen, dass Eis unter Verhältnissen, die man im Laboratorium herstellen kann, nicht oder nur sehr schwach (unter $\frac{1}{1000}$ vom Werte des Zinks) photoelektrisch wirksam ist, und dass damit die Theorie des Herrn Brillouin über die Entstehung der Erscheinungen der atmosphärischen Elektricität ihre Hauptstütze verliert.

---

[1] Siehe z. B. J. Maurer, Das Phosphorescieren der Gletscher. Met. Zeit., Bd. 33, 1898, S. 108.

Über die allgemeinste Form der Gesetze der chemischen Kinetik homogener Systeme

von

Rud. Wegscheider.

Aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1900.)

Die Aufstellung der Gleichungen für die Reactionsgeschwindigkeiten ist in der Regel eine sehr einfache Sache, wenn die stattfindenden Reactionen bekannt sind. Die rechnerischen Schwierigkeiten fangen auch in complicierteren Fällen erst mit der Integration der Differentialgleichungen an.

Nichtsdestoweniger kann unter Umständen ein Schema für die Geschwindigkeitsgleichungen nützlich werden, welches alle Arten von Reactionen (Neben-, Gegen-, Folgewirkungen, katalytische Wirkungen) umfasst. Ein solches Schema kann insbesondere zur Beantwortung der Frage, welche Arten von Reactionsgleichungen mit einem bestimmten, experimentell gefundenen Reactionsablaufe verträglich sind, nützlich sein.

I. Formulierung der Reactionsgeschwindigkeiten in beliebigen homogenen Systemen.

§. 1. Die allgemeinste Form der in einem System möglichen Reactionsgleichungen erhält man offenbar in folgender Weise. Es seien die chemischen Formeln der in dem System zu irgendeiner Zeit vorhandenen Molekelarten M_1, M_2, M_3 u. s. w. Dann ist jede in dem System mögliche Reaction darstellbar durch eine Reactionsgleichung von der Form $n_1 M_1 + n_2 M_2 + \ldots \rightarrow \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots$, in welcher $n_1, n_2 \ldots$ die Anzahlen der bei

der Reaction verschwindenden, α_1, α_2 . . . die Anzahlen der bei der Reaction entstehenden Molekeln bedeuten. Nullwerden der betreffenden n oder α bedeutet, dass die Molekelart auf der betreffenden Seite der Reactionsgleichung nicht vorkommt. Ist für denselben Stoff n und α von Null verschieden, so handelt es sich um katalytische Wirkungen, wie später noch näher auseinandergesetzt wird.

Die Coefficienten n_1, n_2..., α_1, α_2... sind durch Beziehungen miteinander verknüpft, welche die Erhaltung der Masse jedes einzelnen Grundstoffes ausdrücken. Diese Beziehungen sind leicht zu formulieren. Ich gehe darauf nicht ein, da sie im folgenden nicht zur Verwendung gelangen.

Befinden sich unter den Molekelarten Ionen, so müssen sich im System jederzeit gleich viele positive und negative Ladungen befinden. Daraus folgt, dass die Differenz zwischen der Zahl der positiven und negativen Ladungen auf beiden Seiten der Reactionsgleichung gleich sein muss. Hiedurch ist ebenfalls eine Beziehung zwischen den Coefficienten n und α gegeben.

Finden in einem System mehrere Reactionen statt, so hat man die **Reactionsgleichungen**

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I.} & n_1M_1+n_2M_2+\ldots \rightarrow \alpha_1M_1+\alpha_2M_2+\ldots \\ \text{II.} & o_1M_1+o_2M_2+\ldots \rightarrow \beta_1M_1+\beta_2M_2+\ldots \\ \text{III.} & p_1M_1+p_2M_2+\ldots \rightarrow \gamma_1M_1+\gamma_2M_2+\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}. \qquad 1)$$

§. 2. Im folgenden wird die Voraussetzung gemacht, dass das Volum des Systems während der Reaction unverändert bleibt, eine Voraussetzung, die bisher in der chemischen Kinetik immer ausdrücklich[1] oder stillschweigend gemacht worden ist.

§. 3. Die **Geschwindigkeiten** der einzelnen Reactionen drückt man am besten in der Art aus, wie ich es bereits in einer früheren Abhandlung[2] gethan habe. Die zwei Seiten

[1] Siehe z. B. Ostwald, Lehrb. der allg. Chemie, 2. Aufl., II, 2, S. 201 (1896).

[2] Z. f. physikal. Chemie, *30*, 594 (1899).

einer Reactionsgleichung stellen zwei Formen einer hylotropen Gruppe[1] dar. Führt man jede solche hylotrope Form wie eine Molekel in die Rechnung ein, so kann man den Concentrationszuwachs, welchen der auf der rechten Seite der Reactionsgleichung I stehende Complex seit Beginn der Zeitzählung (also während der Zeit t) erfahren hat, mit x bezeichnen. Mit anderen Worten: Wird der auf der rechten Seite der Reactionsgleichung I stehende Complex $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots$ als eine Molekel betrachtet, so gibt x die Anzahl dieser Molekeln in der Volumeinheit an, welche seit Beginn der Zeitzählung gebildet worden sind. $\frac{dx}{dt}$ gibt dann die Geschwindigkeit der Reaction I an, und zwar ebensowohl den Zuwachs der auf der rechten Seite der Reactionsgleichung stehenden hylotropen Form, wie die Abnahme der auf der linken Seite der Reactionsgleichung stehenden Form.

Analog kann man die Geschwindigkeit der Reaction II mit $\frac{dy}{dt}$ bezeichnen, wo y die in Molekeln ausgedrückte Menge des seit Beginn der Zeitzählung in der Raumeinheit gebildeten Complexes $\beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \ldots$ bedeutet, wenn dieser Complex als eine Molekel gerechnet wird.

Die analogen Veränderlichen für die Reactionen III u. s. w. sollen mit z u. s. w. bezeichnet werden.

§. 4. Mit den so definierten Veränderlichen $x, y, z \ldots$ sind die zur Zeit t eingetretenen **Concentrationsänderungen der Molekelarten** M_1, $M_2 \ldots$ durch stöchiometrische Beziehungen verknüpft, welche unmittelbar aus den Reactionsgleichungen folgen.

Bezeichnet ξ_1 die zur Zeit t eingetretene Abnahme der Concentration der Molekelart M_1 gegenüber der Anfangsconcentration ($t = 0$), so ist

$$\xi_1 = (n_1 - \alpha_1)x + (o_1 - \beta_1)y + (p_1 - \gamma_1)z + \ldots$$

Denn wenn die nach der Reactionsgleichung I umgesetzte Menge x beträgt, so sind $n_1 x$ Molekeln von M_1, $n_2 x$ Molekeln

[1] Ostwald, Lehrb. der allg. Chemie, 2. Aufl., II, 2, S. 298 (1897).



von M_2 u. s. w. in der Raumeinheit verschwunden und dafür $\alpha_1 x$ Molekeln von M_1, $\alpha_2 x$ Molekeln von M_2 u. s. w. gebildet worden.

Ebenso sind $o_1 y$ Molekeln von M_1, $o_2 y$ Molekeln von M_2 u. s. w. in der Raumeinheit verschwunden und $\beta_1 y$ Molekeln von M_1, $\beta_2 y$ Molekeln von M_2 u. s. w. gebildet worden, wenn der eingetretene Umsatz nach der Reactionsgleichung II den Betrag y erreicht hat.

Die Summierung der bei den einzelnen Reactionen eingetretenen Concentrationsabnahmen von M_1 gibt den obigen Ausdruck für ξ_1.

Bezeichnen ferner $\xi_2, \xi_3 \ldots$ die Abnahmen der Concentrationen der Molekelarten $M_2, M_3 \ldots$, so erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= (n_1-\alpha_1)x+(o_1-\beta_1)y+(p_1-\gamma_1)z+\ldots \\ \xi_2 &= (n_2-\alpha_2)x+(o_2-\beta_2)y+(p_2-\gamma_2)z+\ldots \\ \xi_3 &= (n_3-\alpha_3)x+(o_3-\beta_3)y+(p_3-\gamma_3)z+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

§. 5. Bei Gegenwart von Elektrolyten oder allgemeiner von hylotropen Formen, zwischen denen sich mit sehr großer Geschwindigkeit ein Gleichgewicht herstellt, sind in manchen Fällen nicht die Änderungen der Concentrationen der einzelnen Molekelarten von Interesse, sondern die Änderungen der Concentration der gesammten hylotropen Gruppe. Wenn z. B. Salzsäure an einer Reaction betheiligt ist, werden in vielen Fällen nicht die Concentrationsänderungen der Wasserstoff- oder Chlorionen oder der undissociierten Chlorwasserstoffmolekeln von Interesse sein, sondern die Änderung der Gesammtconcentration der Salzsäure.

In solchen Fällen kann folgender Satz angewendet werden: Für die Änderung der Gesammtconcentration einer hylotropen Gruppe sind die zwischen den Molekelarten dieser Gruppe auftretenden Reactionen mit Gegenwirkungen ohne Einfluss.

Wenn die Stoffe $M_1, M_2 \ldots M_m, M_{m+1} \ldots M_{m+n}$ einer hylotropen Gruppe angehören, derart, dass zwischen ihnen die Reactionen stattfinden

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \ldots + \nu_m M_m \rightarrow \nu_{m+1} M_{m+1} + \ldots + \nu_{m+n} M_{m+n} \\ \text{und} \\ \nu_{m+1} M_{m+1} + \ldots + \nu_{m+n} M_{m+n} \rightarrow \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \ldots + \nu_m M_m, \end{array}\right\} 2a)$$

und wenn die nach der ersten Gleichung umgesetzte Menge x, die nach der zweiten Gleichung umgesetzte Menge y ist, so ist jener Theil von ξ_1, welcher auf diese beiden Reactionen zurückzuführen ist, gegeben durch $\nu_1 x - \nu_1 y = \nu_1(x-y)$, der entsprechende Antheil von ξ_{m+1} durch $\nu_{m+1}(y-x)$.

Verlaufen daneben noch andere Reactionen, so nimmt ξ_1 die Form an

$$\xi_1 = \nu_1(x-y) + (p_1 - \gamma_1)z + \ldots$$

Ähnlich sind die Ausdrücke für die anderen ξ.

Bezeichnet man die Concentrationsabnahme des wie eine Molekel in Rechnung gezogenen Complexes $\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \ldots$ $\ldots + \nu_m M_m$ *(A)* mit ζ_1, die Concentrationsabnahme des Complexes $\nu_{m+1} M_{m+1} + \ldots + \nu_{m+n} M_{m+n}$ *(B)* mit ζ_2, so ist die gesammte Concentrationsabnahme der hylotropen Form $\zeta_1 + \zeta_2$. Es seien nun M_1 und M_{m+1} zwei Molekelarten, deren Concentrationen als Maß für die Concentrationen der Complexe *A* und *B* dienen können. (Hiezu eignet sich nicht jede zur hylotropen Form gehörige Molekelart. Ist z. B. Salzsäure neben anderen Säuren vorhanden, so geben die Concentrationen der Molekelarten $\bar{\mathrm{Cl}}$ und HCl zugleich die Concentrationen der Complexe $\overset{+}{\mathrm{H}} + \overset{-}{\mathrm{Cl}}$ und HCl an. Dagegen sind in diesem Falle die Wasserstoffionen nicht zur Bestimmung der Concentration der hylotropen Gruppe der Salzsäure verwendbar.)

Dann ist $\zeta_1 = \frac{1}{\nu_1}\xi_1$ und $\zeta_2 = \frac{1}{\nu_{m+1}}\xi_{m+1}$. Daher

$$\zeta_1 + \zeta_2 = (x-y) + \frac{(p_1-\gamma_1)z + \ldots}{\nu_1} + (y-z) + \\ + \frac{(p_{m+1}-\gamma_{m+1})z + \ldots}{\nu_{m+1}}.$$

Die auf die Reactionen mit Gegenwirkungen bezüglichen Veränderlichen x und y fallen heraus.

Handelt es sich also um die Concentrationsänderungen der gesammten hylotropen Form, so können die zwischen den Molekelarten der hylotropen Form stattfindenden, zu Gleichgewichten führenden Reactionen mit Gegenwirkungen unberücksichtigt bleiben.

Für H_2CO_3 hat man z. B. die Gleichgewichte

$$H_2CO_3 \rightleftarrows H\bar{C}O_3 + \overset{+}{H} \quad \text{und} \quad H\bar{C}O_3 \rightleftarrows \bar{C}\bar{O}_3 + \overset{+}{H}.$$

Die Veränderlichen dieser vier Reactionen seien x, y, z, u. Daneben sollen noch andere Reactionen stattfinden, bei denen einzelne der in den Gleichgewichten vorkommenden Molekelarten gebildet oder verbraucht werden und deren Veränderliche $v, w\ldots$ seien.

Wird H_2CO_3 als M_1, $H\bar{C}O_3$ als M_2, $\bar{C}\bar{O}_3$ als M_3 bezeichnet, so ist

$$\xi_1 = x - y + (r_1 - \varepsilon_1)v + (s_1 - \eta_1)w + \ldots$$
$$\xi_2 = -x + y + z - u + (r_2 - \varepsilon_2)v + (s_2 - \eta_2)w + \ldots$$
$$\xi_3 = -z + u + (r_3 - \varepsilon_3)v + (s_3 - \eta_3)w + \ldots$$

Die Gesammtänderung der Concentration der Kohlensäure wird gegeben durch

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 =$$
$$= (r_1 + r_2 + r_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)v + (s_1 + s_2 + s_3 - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3)w + \ldots$$

§. 6. Bezeichnen $A_1, A_2\ldots$ die Anfangsconcentrationen der Molekelarten $M_1, M_2\ldots$, so sind die **Geschwindigkeitsgleichungen**

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1(A_1 - \xi_1)^{n_1}(A_2 - \xi_2)^{n_2}\ldots \\ \frac{dy}{dt} &= k_2(A_1 - \xi_1)^{o_1}(A_2 - \xi_2)^{o_2}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}, \qquad 3)$$

in welchen dann die ξ durch $x, y\ldots$ ausgedrückt werden können. $k_1, k_2\ldots$ sind die Geschwindigkeitscoefficienten der einzelnen Reactionen.

§. 6 *a*. Befinden sich unter den Molekelarten, welche in eine Geschwindigkeitsgleichung eingehen, solche, welche mit

anderen Molekelarten durch ein sich unendlich rasch einstellendes Gleichgewicht verbunden sind, so ist die Gleichgewichtsbedingung in jedem Augenblicke erfüllt.

Es sei diese Gleichgewichtsbedingung

$$(A_1-\xi_1)^{n_1}(A_2-\xi_2)^{n_2}\ldots=\varkappa(A_{\nu+1}-\xi_{\nu+1})^{n_{\nu+1}}(A_{\nu+2}-\xi_{\nu+2})^{n_{\nu+2}}\ldots,$$

wo $\varkappa$ die Gleichgewichtsconstante ist.

Dann ist sofort ersichtlich, dass die Geschwindigkeitsgleichungen

$$\frac{dx}{dt}=k_1(A_1-\xi_1)^{n_1}(A_2-\xi_2)^{n_2}\ldots(A_e-\xi_e)^{n_e}(A_f-\xi_f)^{n_f}\ldots$$

und

$$\frac{dx}{dt}=k_1\varkappa(A_{\nu+1}-\xi_{\nu+1})^{n_{\nu+1}}(A_{\nu+2}-\xi_{\nu+2})^{n_{\nu+2}}\ldots(A_e-\xi_e)^{n_e}(A-\xi_f)^{n_f}\ldots$$

identisch sind. $M_e, M_f\ldots$ sollen Molekelarten sein, die nicht am Gleichgewichte betheiligt sind.

In solchen Fällen ist es daher nicht möglich, zu entscheiden, ob die Reaction nach der Gleichung

$$n_1M_1+n_2M_2+\ldots+n_eM_e+n_fM_f+\ldots\rightarrow X$$

oder nach der Gleichung

$$n_{\nu+1}M_{\nu+1}+n_{\nu+2}M_{\nu+2}+\ldots+n_eM_e+n_fM_f+\ldots\rightarrow X$$

vor sich geht. Nur erhält man verschiedene Zahlenwerte der Constanten, je nachdem man der Rechnung die eine oder die andere Reactionsgleichung zugrunde legt.

Von praktischer Wichtigkeit ist dieser Fall bei Reactionen, an welchen Elektrolyte betheiligt sind. Es lässt sich demgemäß aus Geschwindigkeitsbeobachtungen nicht entscheiden ob Elektrolyte als undissociierte Molekeln oder in Form der sämmtlichen aus den undissociierten Molekeln entstehenden Ionen auftreten (z. B. ob in einer Reactionsgleichung nHX oder $n\overset{+}{H}+n\overset{-}{X}$ auftreten, wenn HX eine dem Ostwald'schen Verdünnungsgesetze folgende Säure bedeutet). Dagegen erhält man selbstverständlich verschiedene Geschwindigkeitsgleichungen,

wenn in einer Reactionsgleichung undissociierte Molekeln, in einer zweiten bloß ein Theil der daraus entstehenden Ionen auftreten.

(Bei starken Elektrolyten wäre eventuell die van t'Hoff'sche Verdünnungsformel zu benutzen, wenn man annehmen will, dass sie eine Ausnahme vom Massenwirkungsgesetze bilden, beziehungsweise, dass ihr Dissociationsgrad ebenfalls durch das Verhältnis zwischen der molecularen Leitfähigkeit bei der betrachteten und bei unendlicher Verdünnung gegeben ist. Für Salzsäure gibt die van t'Hoff'sche Formel unter der Voraussetzung, dass die beiden Ionenarten mit gleichen Exponenten in der Gleichgewichtsbedingung auftreten, $C_{H}^{3} C_{Cl}^{3} = \varkappa C_{HCl}^{4}$. Man bekäme also identische Geschwindigkeitsgleichungen, wenn 4HCl durch $3\overset{+}{H} + 3\overset{-}{Cl}$ ersetzt wird.)

§. 6*b*. Falls zu den stattfindenden Reactionen auch unendlich rasch sich einstellende Gleichgewichte gehören, lässt sich in der Regel das System simultaner Differentialgleichungen, welches den gesammten Reactionsverlauf darstellt, vereinfachen, indem man die Gleichgewichtsbedingungen, welche aus den unendlich rasch verlaufenden Reactionen folgen, und (statt der Concentrationen der einzelnen Molekelarten) die Gesammtconcentrationen der hylotropen Gruppen in die Gleichungen der langsamer verlaufenden Reactionen einführt. Hiedurch erzielt man die Beseitigung der unendlich groß werdenden Geschwindigkeitscoefficienten und die Verminderung der Zahl der Differentialgleichungen.

Ich führe diese Umformung nicht in allgemeiner Form durch, da sie wenig übersichtlich ausfallen würde und verweise auf die im folgenden gegebenen Beispiele (§. 38*e* und §. 79).

II. Besondere Fälle.

§. 7. Man überzeugt sich leicht, dass das im vorigen Abschnitte gegebene Schema alle Fälle der chemischen Kinetik homogener Systeme umfasst.

Eine einzige Reaction ohne katalytische Beeinflussung erhält man, wenn alle Reactionsgleichungen bis auf eine durch Nullwerden der zugehörigen Geschwindigkeitscoefficienten

wegfallen und wenn in der übrig bleibenden Gleichung für jeden Stoff die Coefficienten nur auf einer Seite der Gleichung von Null verschieden sind. Sind die Geschwindigkeitscoefficienten k_2, k_3 u. s. w. Null, so ist $y = z = \ldots = 0$.

Sollen z. B. zwei Molekelarten M_1 und M_2 sich in zwei andere, M_3 und M_4 umwandeln, so sind nur $n_1, n_2, \alpha_3, \alpha_4$ von Null verschieden, dagegen n_3, n_4 u. s. w., ferner $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ u. s. w. gleich Null. Dann wird $\xi_1 = n_1 x$, $\xi_2 = n_2 x$, $\xi_3 = -\alpha_3 x$, $\xi_4 = -\alpha_4 x$; alle andern ξ sind Null. Ferner ist nach Gleichung 2 und 3 (§. 4 und 6)

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (A_1 - n_1 x)^{n_1} (A_2 - n_2 x)^{n_2}.$$

Die Stoffe, welche bei der Reaction nicht verbraucht werden, geben in der Geschwindigkeitsgleichung einen Factor mit dem Exponenten Null, dessen Wert also gleich eins ist.

§. 8. Nebenwirkungen liegen vor, wenn die Coefficienten für dasselbe M auf den linken Seiten von zwei oder mehreren Reactionsgleichungen von Null verschieden sind und wenn außerdem auf sämmtlichen rechten Seiten der Reactionsgleichungen die Coefficienten aller M Null werden, deren Coefficienten auf den linken Seiten von Null verschieden sind.

Folgewirkungen liegen vor, wenn ein und dasselbe M sowohl auf einer rechten, als auch auf einer linken Seite zweier Reactionsgleichungen von Null verschiedene Coefficienten hat. Als besonderer Fall der Folgewirkungen erscheinen die Gegenwirkungen.

Handelt es sich im ganzen um drei Molekelarten M_1, M_2, M_3, so erhält man beispielsweise Nebenwirkungen erster Ordnung, wenn die Coefficienten folgende Werte haben:

$$n_1 = o_1 = \alpha_2 = \beta_3 = 1, n_2 = n_3 = \alpha_1 = \alpha_3 = o_2 = o_3 = \beta_1 = \beta_2 = 0,$$

und wenn ferner alle p, γ u. s. w. Null sind. Die Reactionsgleichungen sind dann

$$M_1 \rightarrow M_2 \quad \text{und} \quad M_1 \rightarrow M_3.$$

Ferner ist

$$\xi_1 = x + y, \; \xi_2 = -x, \; \xi_3 = -y,$$

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (A_1 - x - y), \qquad \frac{dy}{dt} = k_2 (A_1 - x - y),$$

daher

$$\frac{d(x+y)}{dt} = \frac{d\xi_1}{dt} = (k_1 + k_2)(A_1 - \xi_1).$$

Der bei der Verseifung der Ester symmetrischer zweibasischer Säuren vorliegende Fall von Folgewirkung ergibt sich, wenn M_1 den Neutralester, M_2 das Ion der Estersäure, M_3 das Ion der freien Säure, M_4 Hydroxylionen und M_5 den Alkohol bedeuten und wenn man setzt

$$n_1 = n_4 = 1,\ n_2 = n_3 = n_5 = 0,\ \alpha_2 = \alpha_5 = 1,\ \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$
$$o_2 = o_4 = 1,\ o_1 = o_3 = o_5 = 0,\ \beta = \beta_5 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0.$$

Dann ist nach den Gleichungen 2 und 3

$$\xi_1 = x_1,\quad \xi_2 = -x+y,\quad \xi_3 = -y,\quad \xi_4 = x+y,\quad \xi_5 = -x-y,$$
$$\frac{dx}{dt} = k_1(A_1 - x)(A_4 - x - y),\quad \frac{dy}{dt} = k_2(A_2 + x - y)(A_4 - x - y).$$

III. Katalytische Wirkungen.

§. 9. Das gegebene Schema schließt auch die katalytischen Wirkungen ein.

Hat eine Molekelart auf beiden Seiten einer Reactionsgleichung von Null verschiedene Coefficienten, so beeinflusst sie die Form der Geschwindigkeitsgleichung in anderer Weise, als dem Verhältnisse entspricht, in welchem sie aufgebraucht wird. Hat sie insbesondere auf beiden Seiten derselben Reactionsgleichung denselben von Null verschiedenen Coefficienten, so wird sie bei der Reaction überhaupt nicht aufgebraucht und stellt daher einen lediglich katalytisch wirkenden Stoff dar.

Sind die Coefficienten der Molekelart auf beiden Seiten der Reactionsgleichung nicht gleich, aber beide von Null verschieden, so entsteht oder verschwindet die Molekelart bei der Reaction, je nachdem der Coefficient auf der rechten Seite der Gleichung größer oder kleiner ist als auf der linken, und außerdem beeinflusst sie die Reaction katalytisch.

§. 10. Die im Sinne der hier gegebenen Formulierung geschriebenen Reactionsgleichungen, welche alle die Reaction beeinflussenden, also auch die katalytisch wirksamen Molekel-

arten in jenem Verhältnisse enthalten, in welchem sie die Geschwindigkeitsgleichungen beeinflussen, will ich **vollständige Reactionsgleichungen** nennen, im Gegensatze zu den gewöhnlichen Reactionsgleichungen, welche nur die stöchiometrischen Beziehungen zwischen den verschwindenden und entstehenden Molekelarten angeben.

Für die Zuckerinversion ist beispielsweise die gewöhnliche Reactionsgleichung

$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \rightarrow 2\,C_6H_{12}O_6.$$

Die vollständige Reactionsgleichung, welche auch den katalytischen Einfluss der Wasserstoffionen wiedergibt, ist dagegen

$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O + \overset{+}{H} \rightarrow 2\,C_6H_{12}O_6 + \overset{+}{H}.$$

Man hat $n_1 = n_2 = n_3 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Daraus folgt $\xi_1 = \xi_2 = x$, $\xi_3 = 0$, ferner

$$\frac{dx}{dt} = k(A_1 - x)(A_2 - x)A_3,$$

wo A_3 die Concentration der Wasserstoffionen bedeutet.

Analog wäre die katalytische Beschleunigung, welche durch Wasserstoffionen bei der verseifenden Einwirkung des Wassers auf äthylschwefelsaures Kali hervorgerufen wird, durch die Gleichung zu formulieren:

$$C_2H_5\overset{-}{S}O_4 + H_2O + \overset{+}{H} \rightarrow \overset{=}{S}O_4 + C_2H_5OH + 2\overset{+}{H},$$

wobei der Einfachheit halber die Schwefelsäure als vollständig dissociiert angenommen ist.

§. 11. Diese Formulierung der katalytischen Wirkung bietet auch Raum für die Annahme, dass die Wirkung des Katalysators nicht nach der ersten Potenz seiner Concentration, sondern nach einer höheren Potenz ansteigt. Man hat nur anzunehmen, dass der Katalysator auf beiden Seiten der Reactionsgleichung mit einem Coefficienten vorkommt, der größer ist als eins.

§. 12. Verläuft eine Reaction auch ohne Gegenwart des Katalysators und wird durch letzteren nur beschleunigt, so kann das Stattfinden von zwei Reactionen angenommen werden, die im Verhältnisse von Nebenwirkungen stehen, z. B.

$$M_1 \rightarrow M_2 \text{ und } M_1 + M_3 \rightarrow M_2 + M_3.$$

Diese vollständigen Reactionsgleichungen führen zu

$$\frac{dx}{dt} = k_1(A_1 - \xi_1) \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = k_2(A_1 - \xi_1)A_3.$$

Daher ist $\frac{d(x+y)}{dt} = \frac{d\xi_1}{dt} = (k_1 + k_2 A_3)(A_1 - \xi_1)$. Man bekommt also die gewöhnlich angenommene Form der Gleichung für katalytische Beschleunigungen.[1]

§. 13. Katalytische Verzögerungen können formal durch negative k_2 ausgedrückt werden. Ein negatives k_2 bedeutet aber, dass die Mengen der gebildeten Producte ihren eigenen Concentrationen proportional sind, während nach dem Massenwirkungsgesetze der Umsatz proportional den Mengen der verschwindenden Stoffe erfolgt. Es scheint, dass diese Schwierigkeit nur durch Vorstellungen gehoben werden kann, die darauf hinauslaufen, dass man den Einfluss gelöster verzögernder Katalysatoren als Veränderung des Mediums oder als Einwirkung auf nicht isolierbare Zwischenstufen[2] betrachtet. Ich gehe darauf nicht ein, da ein experimenteller Nachweis dafür, dass gelöste verzögernde Katalysatoren den Geschwindigkeitscoefficienten auf die Form $k_1 - k_2 A_3$ bringen, noch nicht erbracht zu sein scheint.

§. 14. Die hier gegebene rein formale Auffassung der katalytischen Wirkung deckt sich im wesentlichen mit jener atomistisch-kinetischen Auffassung, welche ich in einer vor kurzem erschienenen Abhandlung[3] entwickelt habe. Diese kinetische Auffassung beruht auf der Annahme, dass der Katalysator mit den reagierenden Molekeln oder mit den Zwischenstufen,

[1] Ostwald, Lehrb. der allg. Chemie, 2. Auflage, II, 2, S. 262 (1897).

[2] Monatshefte für Chemie, *21*, 385 (1900).

[3] Über die Umlagerung des Cinchonins (ein Beitrag zur Theorie der katalytischen Wirkung). Monatshefte für Chemie, *21*, 385 (1900), Z. f. physikal. Chemie, *34*, 290.

welche die Molekeln bei der Reaction zu durchlaufen haben, selbst in Reaction tritt.

Auch nach der kinetischen Auffassung ist es möglich, dass ein Katalysator in die Gleichung für die Reactionsgeschwindigkeit nicht mit der ersten, sondern mit einer höheren Potenz der Concentration eintritt.[1]

Ebenso führt die kinetische Auffassung zu der im §. 12 gemachten Annahme, dass, wenn eine Reaction auch ohne Zusatz eines Katalysators eintritt und durch letzteren beschleunigt wird, der beschleunigende Vorgang als Nebenwirkung aufzufassen ist. Es treten zwei Reactionen nebeneinander ein, von denen die eine vom Katalysator nicht beeinflusst wird, während die zweite ohne seine Gegenwart nicht möglich ist; beide führen dieselben Ausgangsstoffe in dieselben Producte über.

Endlich muss auch die kinetische Betrachtungsweise katalytische Verzögerungen als »Einfluss des Mediums« oder als Einwirkungen des Katalysators auf intermediäre Umwandlungsproducte auffassen. Die letztere Auffassung stellt eigentlich auch einen Einfluss des Mediums dar, indem sie darauf hinausläuft, dass durch den verzögernden Katalysator der reactionsfähige (active) Antheil des katalytisch beeinflussten Körpers vermindert wird.

Diese Übereinstimmung der atomistisch-kinetischen und der hier gegebenen formalen Darstellung beruht darauf, dass die Einbeziehung der Katalysatoren in die Reactionsgleichungen ebenso wie die kinetische Auffassung den Gedanken zum Ausdrucke bringt, die Katalysatoren seien nach dem Massenwirkungsgesetze an der Reaction betheiligt.

IV. Constante Verhältnisse zwischen den Geschwindigkeiten zweier nebeneinander verlaufender Reactionen.

§. 15. Um zu zeigen, wie mit Hilfe der gegebenen allgemeinen Formulierung der Gesetze der chemischen Kinetik homogener Systeme bei constantem Volum ermittelt werden

---

[1] Eine andere Deutung der katalytischen Wirkungen nach höheren Potenzen der Concentration des Katalysators findet sich bei Noyes, Z. f. physikal. Chemie, *19*, 599 (1896).



kann, welche Formen von Reactionsgleichungen bestimmten Bedingungen genügen, soll nunmehr die Frage untersucht werden: In welchen Fällen ist das Verhältnis der Geschwindigkeiten zweier nebeneinander verlaufender Reactionen von der Zeit unabhängig?

Es wird nicht vorausgesetzt, dass nur diese zwei Reactionen stattfinden.

§. 16. Sollen etwa die Geschwindigkeiten der Reactionen I und II (§. 1) in einem constanten (von der Zeit unabhängigen) Verhältnisse stehen, so muss die Gleichung $\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \text{Const.}$ erfüllt sein.

Die Einsetzung der Werte aus den Gleichungen 3) (§. 6) ergibt

$$\frac{k_1}{k_2}(A_1 - \xi_1)^{n_1 - o_1}(A_2 - \xi_2)^{n_2 - o_2}(A_3 - \xi_3)^{n_3 - o_3} \ldots = K, \quad 4)$$

wo K von der Zeit unabhängig ist.

Diese Gleichung muss für alle Zeiten, daher auch für $t = 0$ gelten. Daraus folgt

$$K = \frac{k_1}{k_2} A_1^{n_1 - o_1} A_2^{n_2 - o_2} A_3^{n_3 - o_3} \ldots \quad 5)$$

§. 17. Die Erfüllung der Gleichung 4) wird nicht behindert durch jene Molekelarten, deren **Concentration unveränderlich** ist.

Unveränderliche Concentration einer Molekelart kann in zwei Fällen vorliegen: 1. wenn diese Molekelart bei keiner der im System stattfindenden Reactionen gebildet oder verbraucht wird, wenn also diese Molekelart bei jenen Reactionen, an denen sie überhaupt betheiligt ist, lediglich als Katalysator wirkt; 2. wenn diese Molekelart bei einem Theile der Reactionen gebildet, bei einem anderen Theile verbraucht wird, und zwar derart, dass in jedem Augenblicke die gesammte Concentrationsänderung dieser Molekelart Null ist. Unter welchen Umständen dieser Fall eintreten kann, wird im Abschnitte V untersucht werden.

Annähernd unveränderliche Concentration einer Molekelart liegt ferner vor, wenn sie in großem Überschusse vorhanden ist. Dann kann das betreffende ξ neben dem A vernachlässigt werden.

§. 18. Die Gleichung 4) wird befriedigt, wenn $\frac{k_1}{k_2}$ Null oder unendlich ist, wenn also eine der beiden **Geschwindigkeitsconstanten Null** oder **unendlich** ist.

§. 19. Ist das Verhältnis der Geschwindigkeitsconstanten ein **endliches**, so kann die Gleichung 4) nur befriedigt werden, wenn die Concentrationen (die $A-\xi$) aller Molekelarten, deren Concentration nicht (entsprechend den im §. 17 erwähnten Fällen) unveränderlich ist, herausfallen. Das kann wieder auf **zwei Arten** geschehen: 1. indem die Exponenten jener Factoren, deren $A-\xi$ als mit der Zeit veränderlich zu betrachten ist, gleich Null werden; 2. indem für jenen Theil der Factoren, deren Exponenten nicht Null sind und deren $A-\xi$ von der Zeit abhängen, die Bedingung $(A_1-\xi_1)^{n_1-o_1}(A_2-\xi_2)^{n_2-o_2}\ldots =$ $=$ Const. in anderer Weise erfüllt wird.

§. 20. Der **erste** der im vorigen Paragraphen erwähnten Fälle gibt die Bedingungen

$$n_1 = o_1,\ n_2 = o_2 \text{ u. s. w.}$$

Das heißt: Die linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen müssen hinsichtlich der Molekelarten von veränderlicher Concentration identisch sein.

Wenn für alle Molekelarten diese Bedingung erfüllt ist, so wird $K = \frac{k_1}{k_2}$; das Verhältnis der Reactionsgeschwindigkeiten ist in jedem Augenblicke gleich dem der Geschwindigkeitsconstanten, unabhängig von den Anfangsmengen der reagierenden Stoffe.

§. 21. Die Gleichungen der beiden Reactionen mit constantem Geschwindigkeitsverhältnisse haben dann die Form

$$n_1 M_1 + n_2 M_2 + \ldots \rightarrow \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots$$

$$n_1 M_1 + n_2 M_2 + \ldots \rightarrow \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \ldots$$

Hiebei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $n_1 = 0$. Dann wird der Stoff M_1 bei keiner der beiden Reactionen verbraucht und wirkt auch nicht katalytisch; wohl aber kann er bei einer oder bei beiden gebildet werden.

2. $n_1 < \alpha_1$, aber von Null verschieden. Dann wird M_1 bei der betreffenden Reaction gebildet und wirkt außerdem als Katalysator.

3. $n_1 = \alpha_1$. M_1 wirkt bei dieser Reaction nur als Katalysator. Seine Menge kann aber durch andere Reactionen verändert werden.

4. $n_1 > \alpha_1$. M_1 wird bei der betreffenden Reaction verbraucht. Wenn α_1 von Null verschieden ist, wirkt es außerdem als Katalysator.

§. 22. Fall 1 besagt, dass mit dem Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses zwischen zwei Reactionen beliebige Stoffe verträglich sind, welche nur auf den rechten Seiten der zwei vollständigen Reactionsgleichungen vorkommen, also bei diesen Reactionen weder katalytisch wirken, noch verbraucht werden. Das ist selbstverständlich, weil solche Stoffe auf die beiden Geschwindigkeitsgleichungen keinen Einfluss haben.

§. 23. Die Combinationen der Fälle 2. bis 4. geben verschiedene Reactionstypen, bei denen constante Geschwindigkeitsverhältnisse auftreten können.

Entspricht eine Molekelart in beiden Reactionsgleichungen dem Falle 4, so sind die Reactionen in Bezug auf diesen Stoff Nebenwirkungen.

Beispiele:

	Vollständige Reactionsgleichung	Gewöhnliche Reactionsgleichung	Katalysatoren
I.	$M_1+M_2 \rightarrow M_3$	Ebenso	—
II.	$M_1+M_2 \rightarrow M_4$		
I.	$M_1+2M_2 \rightarrow M_3$	$M_1+2M_2 \rightarrow M_3$	—
II.	$M_1+2M_2 \rightarrow M_2+M_4$	$M_1+M_2 \rightarrow M_4$	M_2

§. 24. In den Fällen 2 und 3 beeinflusst die betreffende Molekelart die Reactionsgeschwindigkeit nur als Katalysator. Diese Fälle können also nur zusammen mit 4 vorkommen.

§. 25. Combinationen der Fälle 3 und 4 ergeben Nebenwirkungen hinsichtlich eines Theiles der reagierenden Stoffe, verbunden mit katalytischen Beeinflussungen, oder Reactionspaare, deren gewöhnliche Reactionsgleichungen entweder durchaus verschiedene Stoffe enthalten oder nur entstehende Stoffe gemeinsam haben, welche aber infolge katalytischer Wirkungen identische linke Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen haben.

Beispiele:

	Vollständige Reactionsgleichung	Gewöhnliche Reactionsgleichung	Katalysatoren
I.	$M_1 + M_2 \rightarrow M_3$	$M_1 + M_2 \rightarrow M_3$	—
II.	$M_1 + M_2 \rightarrow M_2 + M_4$	$M_1 \rightarrow M_4$	M_2
I.	$M_1 + M_2 \rightarrow M_1 + M_3$	$M_2 \rightarrow M_3$	M_1
II.	$M_1 + M_2 \rightarrow M_2 + M_4$	$M_1 \rightarrow M_4$	M_2
I.	$M_1 + M_2 \rightarrow M_2 + M_3$	$M_1 \rightarrow M_3$	M_2
II.	$M_1 + M_2 \rightarrow M_1 + M_3$	$M_2 \rightarrow M_3$	M_1

§. 26. Combinationen der Fälle 2 und 4 (eventuell neben 3) geben Folgewirkungen. Denn dann wird der Stoff bei der einen Reaction gebildet und bei der anderen verbraucht und bildet daher ein Zwischenproduct. Allerdings handelt es sich da um Folgewirkungen von ganz besonderer Art, für die es bisher kein Beispiel zu geben scheint. Bei der Reaction, welche dem Falle 2 entspricht, muss das Zwischenproduct zugleich als Katalysator wirken, derart, dass die Reaction bei Abwesenheit des Katalysators überhaupt nicht eintritt. Ist der betreffende Stoff nicht vom Anfang an da, so treten beide Reactionen nicht ein. Ist aber der Stoff vom Anfang an da, so kann die Reaction, bei welcher er verbraucht wird, schon beginnen, ehe durch die andere Reaction merkliche Mengen dieses Stoffes gebildet werden.

Beispiel.

	Vollständige Reactionsgleichung	Gewöhnliche Reactionsgleichung	Katalysator
I.	$M_1 + M_2 \rightarrow 2 M_2$	$M_1 \rightarrow M_2$	M_2
II.	$M_1 + M_2 \rightarrow M_1 + M_3$	$M_2 \rightarrow M_3$	M_1

Es ist ersichtlich, dass es sich um eine Folgewirkung handelt, bei der M_2 das Zwischenproduct ist. Aber bei Abwesenheit von M_2 tritt gar keine Reaction ein und bei Zusatz von M_2 ist die zweite Reaction auf die Bildung von M_2 durch die erste Reaction nicht angewiesen; wohl aber wird ihr Verlauf dadurch beeinflusst.

Als specieller Fall der Folgewirkungen können auch Gegenwirkungen hieher gehören.

Beispiel.[1]

Vollständige Reactionsgleichung	Gewöhnliche Reactionsgleichung	Katalysator
$M_1 + M_2 \rightarrow 2M_1$	$M_2 \rightarrow M_1$	M_1
$M_1 + M_2 \rightarrow 2M_2$	$M_1 \rightarrow M_2$	M_2

§. 26 *a*. Gemäß §. 6 *a* können in einem Theile der Reactionsgleichungen Molekelarten oder Gruppen von Molekelarten durch andere ersetzt werden, welche mit ihnen durch ein sich unendlich *rasch einstellendes Gleichgewicht* verknüpft sind, ohne dass dadurch das constante Geschwindigkeitsverhältnis gestört wird.

Das sich unendlich rasch einstellende Gleichgewicht entspreche der Gleichung

$$(A_1-\xi_1)^{n_1}(A_2-\xi_2)^{n_2}\ldots = \varkappa(A_{\nu+1}-\xi_{\nu+1})^{n_{\nu+1}}(A_{\nu+2}-\xi_{\nu+2})^{n_{\nu+2}}\ldots$$

Dann herrscht ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis nicht bloß zwischen den Reactionen

$$\text{I.}\quad n_1M_1 + n_2M_2 + \ldots + X \rightarrow Y$$

und

$$\text{II.}\quad n_1M_1 + n_2M_2 + \ldots + X \rightarrow Z,$$

sondern auch zwischen den Reactionen

$$\text{I}'.\quad n_{\nu+1}M_{\nu+1} + n_{\nu+2}M_{\nu+2} + \ldots + X \rightarrow Y$$

und

$$\text{II.}\quad n_1M_1 + n_2M_2 + \ldots + X \rightarrow Z.$$

---

[1] Dieses Reactionspaar hat merkwürdige Eigenschaften. Für $k_1 = k_2$ befinden sich die Stoffe M_1 und M_2 in jedem Verhältnisse im Gleichgewichte. Für $k_1 \gtrless k_2$ tritt vollständiger Umsatz in einem oder anderen Sinne ein.

X bedeutet Glieder, die sich auf nicht dem Gleichgewichte angehörige Molekelarten beziehen. In letzterem Falle geht Gleichung 4) über in

$$K = \frac{k'_1(A_{\nu+1}-\xi_{\nu+1})^{n_{\nu+1}}\dots}{k_2(A_1-\xi_1)^{u}\dots},$$

wo k'_1 die Geschwindigkeitsconstante der Reaction I′ ist. Daraus folgt $K = \frac{k'_1}{k_2 \varkappa}$, während beim Reactionspaare I und II $K = \frac{k_1}{k_2}$ ist. Sind die linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen durch die in ihnen auftretenden hylotropen Formen verschieden, sonst aber identisch, so tritt in den Ausdruck für das Geschwindigkeitsverhältnis auch die Gleichgewichtsconstante der hylotropen Gruppe ein.

Der Zahlenwert des Geschwindigkeitsverhältnisses ist selbstverständig davon unabhängig, ob man bei der Berechnung der ersten Reaction die Reactionsgleichung I oder I′ zugrunde legt. Die errechnete Geschwindigkeitsconstante ist entweder k_1 oder $k'_1 = k_1 \varkappa$ (vergl. §. 6 *a*). K bleibt immer gleich $\frac{k_1}{k_2}$.

Dass dem §. 6 *a* entsprechende hylotrope Formen wie identische Molekelarten zu behandeln sind, ist auch im folgenden festzuhalten.

Ein Beispiel für diesen Fall folgt im §. 38 *b*.

§. 27. Im vorstehenden ist die Bedingung entwickelt worden, welcher die beiden Reactionsgleichungen genügen müssen, damit ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis entsprechend dem ersten, im §. 19 erwähnten Falle auftritt. Die Bedingung besteht in der Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen hinsichtlich der Molekelarten von veränderlicher Concentration.

Es ist nunmehr noch zu untersuchen, in welchen Fällen constante Geschwindigkeitsverhältnisse, entsprechend dem **zweiten** im §. 19 erwähnten Falle auftreten. Es muss also

$$(A_1-\xi_1)^{n_1-o_1}(A_2-\xi_2)^{n_2-o_2}\dots = \text{Const.} \qquad 6)$$

sein, ohne dass $n_1 = o_1$, $n_2 = o_2 \dots$ ist.

In der Regel ist Gleichung 6) bei veränderlichem ξ nur erfüllbar, wenn Gleichungen von folgender Form gelten:

$$A_1-\xi_1 = C_1\varphi(t),\ A_2-\xi_2 = C_2[\varphi(t)]^{v_2} \text{ u. s. w.,} \qquad 7)$$

wo $\varphi(t)$ eine und dieselbe Function der Zeit ist, während die C und ν constant sind. Dann geht Gleichung 6) über in

$$C_1^{n_1-o_1} C_2^{n_2-o_2} \ldots \varphi(t)^{(n_1-o_1)+\nu_2(n_2-o_2)+\cdots} = \text{Const.}$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch

$$(n_1-o_1)+\nu_2(n_2-o_2)+\nu_3(n_3-o_3)+\ldots = 0. \qquad 8)$$

Selbstverständlich können die Factoren der Gleichung 6) auch gruppenweise den Gleichungen 7) und 8) genügen, wodurch dann ebenfalls die Gleichung 6) befriedigt wird.

Auflösungen der Gleichung 8) sind immer möglich. Unter diese Lösungen gehören auch $n_1-o_1 = 0$ u. s. w., welcher Fall bereits im vorigen behandelt ist.

Lösungen wie $\nu_2 = 0$ bieten ebenfalls nichts Neues, da sie zu $A_2-\xi_2 = C_2$ führen, also angeben, dass die betreffende Molekelart von unveränderlicher Concentration ist, was bereits in §. 17 besprochen wurde.

In der Regel sind jedoch auch andere Lösungen möglich.

§. 28. Die Constanten C in den Gleichungen 7) können in folgender Weise ausgewertet werden.

Diese Gleichungen müssen für jedes t gelten. Für $t=0$ ist $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = 0$, daher

$$C_1 = \frac{A_1}{\varphi(0)}, \qquad C_2 = \frac{A_2}{[\varphi(0)]^{\nu_2}}, \qquad C_3 = \frac{A_3}{[\varphi(0)]^{\nu_3}} \ldots$$

Somit ist

$$A_1-\xi_1 = A_1\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}, \qquad A_2-\xi_2 = A_2\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\right]^{\nu_2} \text{u. s. w.} \qquad 9)$$

Ferner

$$\xi_1 = A_1\left\{1-\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\right\}, \qquad \xi_2 = A_2\left\{1-\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\right]^{\nu_2}\right\} \text{u. s. w.} \qquad 10)$$

§. 29. Die Erfüllung der Gleichungen 8) und 9) ist hinreichend, um das Geschwindigkeitsverhältnis der beiden Reactionen constant zu machen.

Die Gleichungen 9) werden jedoch nur in verhältnismäßig seltenen Fällen erfüllt sein. Ich bin nicht in der Lage, die Formen von Reactionsgleichungen, bei denen die Gleichungen 9) zutreffen, systematisch zu entwickeln. Jedenfalls kommt es aber hier nicht nur (wie bei dem im §. 20 behandelten Falle)

auf die zwei Reactionsgleichungen an, deren Geschwindigkeitsverhältnis constant sein soll, sondern auf alle daneben verlaufenden Reactionen, welche die Concentrationen (die ξ) der in den beiden betrachteten Geschwindigkeitsgleichungen vorkommenden Stoffe verändern.

§. 30. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass eine nothwendige (aber noch nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz einer die Gleichungen 9) befriedigenden Function $\varphi(t)$ in dem Stattfinden gewisser Beziehungen zwischen den in den Geschwindigkeitsgleichungen aller nach §. 29 zu berücksichtigenden Reactionen vorkommenden Constanten (Geschwindigkeitscoefficienten, Anfangsconcentrationen, Coefficienten der Reactionsgleichungen) besteht.

Angenommen, es existiere eine Function $\varphi(t)$, welche die Gleichungen 9) erfüllt, so ergibt sich durch Differentiation der Gleichungen 10)

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -A_1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(0)}, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = -\nu_2 A_2 \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\right]^{\nu_2-1} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(0)},$$

$$\frac{d\xi_3}{dt} = -\nu_3 A_3 \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\right]^{\nu_3-1} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(0)} \text{ u. s. w.}$$

Daraus folgt

$$\frac{d\xi_2}{dt} : \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\nu_2 A_2}{A_1} \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\right]^{\nu_2-1}, \quad \frac{d\xi_3}{dt} : \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\nu_3 A_3}{A_1} \left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\right]^{\nu_3-1} \text{ u. s. w.}$$

Diese Gleichungen müssen für jeden Wert von t gelten, daher auch für $t = 0$. Für diesen Fall gehen sie über in

$$\left(\frac{d\xi_2}{dt} : \frac{d\xi_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\nu_2 A_2}{A_1}, \quad \left(\frac{d\xi_3}{dt} : \frac{d\xi_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\nu_3 A_3}{A_1} \text{ u. s. w.} \qquad 11)$$

Für die gleichen Quotienten lassen sich aber Ausdrücke gewinnen, welche unabhängig von jeder besonderen Voraussetzung giltig sind.

Differenziert man die Gleichungen 2) (§. 4), so erhält man

$$\frac{d\xi_2}{dt} : \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{(n_2-\alpha_2)\frac{dx}{dt} + (o_2-\beta_2)\frac{dy}{dt} + (p_2-\gamma_2)\frac{dz}{dt} + \ldots}{(n_1-\alpha_1)\frac{dx}{dt} + (o_1-\beta_1)\frac{dy}{dt} + (p_1-\gamma_1)\frac{dz}{dt} + \ldots}$$

u. s. w.

Aus den Gleichungen 3) (§. 6) ergeben sich die Werte, welche $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \ldots$ für $t = 0$ annehmen.

Man hat

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Daher ist

$$\left(\frac{d\xi_2}{dt} : \frac{d\xi_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{(n_2 - \alpha_2) k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots + (o_2 - \beta_2) k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} \ldots + \ldots}{(n_1 - \alpha_1) k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots + (o_1 - \beta_1) k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} \ldots + \ldots}$$

$$\left(\frac{d\xi_3}{dt} : \frac{d\xi_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{(n_3 - \alpha_3) k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots + (o_3 - \beta_3) k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} \ldots + \ldots}{(n_1 - \alpha_1) k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots + (o_1 - \beta_1) k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} \ldots + \ldots}$$

u. s. w.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Gleichungen 11), so folgt, dass eine die Gleichungen 9) befriedigende Function $\varphi(t)$ nur existieren kann, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} \nu_2 &= \frac{(n_2 - \alpha_2) k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2 - 1} A_3^{n_3} \ldots + (o_2 - \beta_2) k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2 - 1} A_3^{o_3} \ldots + \ldots}{(n_1 - \alpha_1) k_1 A_1^{n_1 - 1} A_2^{n_2} A_3^{n_3} \ldots + (o_1 - \beta_1) k_2 A_1^{o_1 - 1} A_2^{o_2} A_3^{o_3} \ldots + \ldots} \\ \nu_3 &= \frac{(n_3 - \alpha_3) k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} A_3^{n_3 - 1} \ldots + (o_3 - \beta_3) k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} A_3^{o_3 - 1} \ldots + \ldots}{(n_1 - \alpha_1) k_1 A_1^{n_1 - 1} A_2^{n_2} A_3^{n_3} \ldots + (o_1 - \beta_1) k_2 A_1^{o_1 - 1} A_2^{o_2} A_3^{o_3} \ldots + \ldots} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Es müssen aber auch bei Erfüllung dieser Gleichungen nicht nothwendig die Gleichungen 9) befriedigt sein.

Da zu den Gleichungen 12) noch die Gleichung 8) hinzutritt, hat man eine Gleichung mehr, als die Zahl der ν beträgt. Durch Einsetzung der ν-Werte aus 12) in 8) erhält man eine Gleichung, welche erfüllt sein muss, wenn die Geschwindigkeiten der Reactionen I und II in einem constanten Verhältnisse stehen sollen. Diese Gleichung drückt eine Beziehung zwischen den $k, A, n, o \ldots, \alpha, \beta \ldots$ aus und lautet

$$\left.\begin{aligned}0 = (n_1 - o_1)[(n_1 - \alpha_1)k_1 A_1^{n_1-1} A_2^{n_2} A_3^{n_3} \ldots + \\ + (o_1 - \beta_1)k_2 A_1^{o_1-1} A_2^{o_2} A_3^{o_3} \ldots + \ldots] \\ + (n_2 - o_2)[(n_2 - \alpha_2)k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2-1} A_3^{n_3} \ldots + \\ + (o_2 - \beta_2)k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2-1} A_3^{o_3} \ldots + \ldots] \\ + (n_3 - o_3)[(n_3 - \alpha_3)k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} A_3^{n_3-1} \ldots + \\ + (o_3 - \beta_3)k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} A_3^{o_3-1} \ldots + \ldots] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad 13)$$

Bei Bildung des ersten Gliedes dieses Ausdruckes sind alle nebeneinander verlaufenden Reactionen zu berücksichtigen, welche die Menge von M_1 verändern, ebenso für das zweite Glied alle, welche die Menge von M_2 verändern u. s. w. Die Zahl der Glieder hängt dagegen nur von jenen Molekelarten ab, welche auf den linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen jener Reactionen vorkommen, zwischen denen das constante Geschwindigkeitsverhältnis bestehen soll und deren Concentration nicht unveränderlich ist. Die Gleichung schließt den Fall ein, dass die Bedingung des §. 27 für die Stoffe gruppenweise erfüllt ist, ferner der Fall des §. 20.

Gleichung 13) muss immer erfüllt sein, wenn ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis auftreten soll. Insbesondere bleibt sie auch dann eine hiefür nothwendige Bedingung, wenn ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis möglich sein sollte, ohne dass Gleichung 7) erfüllt ist. Man kann sie nämlich ohne jede weitere Voraussetzung aus Gleichung 4) ableiten.

Nimmt man von Gleichung 4) den Logarithmus und differenziert die so erhaltene Gleichung, so bekommt man

$$0 = \frac{n_1 - o_1}{A_1 - \xi_1} \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{n_2 - o_2}{A_2 - \xi_2} \frac{\xi_2 p}{dt} + \ldots$$

Diese Gleichung muss für jedes t erfüllt sein, wenn ein constantes Umwandlungsverhältnis auftreten soll. Setzt man in dieser Gleichung die Werte für $t = 0$ ein, so erhält man Gleichung 13) als nothwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses bei beliebiger Form der Geschwindigkeitsgleichungen.

§. 31. Als Beispiel zu dem Besprochenen soll untersucht werden, wie die Reactionsgleichungen beschaffen sein müssen, damit die Reactionsgeschwindigkeiten bei beliebigen Anfangsconcentrationen in einem von der Zeit unabhängigen Verhältnisse stehen, wenn nur zwei Reactionen stattfinden und die Zahl der auf den linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen vorkommenden Molekelarten im ganzen zwei ist. Die Geschwindigkeitsconstanten der beiden Reactionen sollen endliche Werte haben.

Die vollständigen Reactionsgleichungen sind dann

$$n_1 M_1 + n_2 M_2 \rightarrow \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \ldots$$
$$o_1 M_1 + o_2 M_2 \rightarrow \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \ldots$$

§. 32. Nach §. 20 tritt ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis auf, wenn $n_1 = o_1$ und $n_2 = o_2$ ist. Die Beschaffenheit der Reactionspaare, welche dieser Bedingung genügen, ist bereits in §. 21 bis 26 erörtert worden.

Es kann aber auch ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis entsprechend dem in §. 27 besprochenen Falle auftreten. Eine nothwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür ist die Erfüllung der Gleichung 13) (§. 30).

Im vorliegenden Falle nimmt die Gleichung 13) die Form an

$$0 = (n_1 - o_1)[(n_1 - \alpha_1) k_1 A_1^{n_1 - 1} A_2^{n_2} + (o_1 - \beta_1) k_2 A_1^{o_1 - 1} A_2^{o_2}]$$
$$+ (n_2 - o_2)[(n_2 - \alpha_2) k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2 - 1} + (o_2 - \beta_2) k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2 - 1}]. \quad 14)$$

Von den Anfangsconcentrationen unabhängige Lösungen dieser Gleichung sind nur möglich, wenn entweder die vier Gleichungen

$$(n_1 - o_1)(n_1 - \alpha_1) = 0, \qquad (n_1 - o_1)(o_1 - \beta_1) = 0,$$
$$(n_2 - o_2)(n_2 - \alpha_2) = 0, \qquad (n_2 - o_2)(o_2 - \beta_2) = 0 \quad 15)$$

erfüllt sind oder wenn nur ein Theil dieser Gleichungen erfüllt ist und aus den übrig bleibenden Gliedern der Gleichung 14) die A durch Nullwerden ihrer Exponenten herausfallen oder durch Division weggeschafft werden können.

In den Gleichungen 15) sind die dem §. 20 entsprechenden Lösungen ($n_1 = o_1$, $n_2 = o_2$) mitenthalten. Ist etwa n_1 von o_1

verschieden, so können die Gleichungen 15) nur durch $n_1 = \alpha_1$, $o_1 = \beta_1$ befriedigt werden. Dann ist der Stoff M_1 bei beiden Reactionen nur Katalysator, also von unveränderlicher Concentration; auch dieser Fall gehört unter §. 20, da die Molekelarten von unveränderlicher Concentration nicht berücksichtigt zu werden brauchen (§. 17). Die Lösung $n_1 - \alpha_1 = o_1 - \beta_1 = n_2 - \alpha_2 = o_2 - \beta_2 = 0$ hat keinen Sinn, da in diesem Falle überhaupt keine Reaction möglich ist.

§. 33. Dagegen erhält man neue Lösungen, wenn nur ein Theil der Gleichungen 15) erfüllt ist. Man überzeugt sich leicht, dass nur $n_1 - \alpha_1 = o_2 - \beta_2 = 0$ oder $o_1 - \beta_1 = n_2 - \alpha_2 = 0$ in Betracht kommt; diese beiden Fälle führen natürlich zur selben Form der Reactionsgleichungen, da sie durch Vertauschung der gleichwertigen Indices 1 und 2 ineinander übergehen.

Setzt man $n_1 - \alpha_1 = o_2 - \beta_2 = 0$, so geht Gleichung 14) über in

$$0 = (n_1 - o_1)(o_1 - \beta_1) k_2 A_1^{o_1 - 1} A_2^{o_2} + (n_2 - o_2)(n_2 - \alpha_2) k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2 - 1}.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich A_1 und A_2 wegschaffen, wenn man setzt $o_1 - 1 = n_1$ und $o_2 = n_2 - 1$.

Dann bleibt $0 = (n_1 - o_1)(o_1 - \beta_1) k_2 + (n_2 - o_2)(n_2 - \alpha_2) k_1$, woraus durch Einsetzung der Werte $o_1 = n_1 + 1$, $o_2 = n_2 - 1$ entsteht

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1 + 1 - \beta_1}{n_2 - \alpha_2}. \qquad 15\,a)$$

Die vollständigen Reactionsgleichungen lauten dann

$$\text{I.} \quad n_1 M_1 + n_2 M_2 \rightarrow n_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \ldots$$

$$\text{II.} \quad (n_1 + 1) M_1 + (n_2 - 1) M_2 \rightarrow \beta_1 M_1 + (n_2 - 1) M_2 + \beta_3 M_3 \ldots$$

In diesen Reactionsgleichungen muss jedenfalls $n_2 > \alpha_2$ und $n_1 + 1 > \beta_1$ sein, da sonst überhaupt kein Stoff verbraucht würde.

Die gewöhnlichen Reactionsgleichungen sind

$$\text{I.} \quad (n_2 - \alpha_2) M_2 \rightarrow \alpha_3 M_3 + \ldots$$

$$\text{II.} \quad (n_1 + 1 - \beta_1) M_1 \rightarrow \beta_3 M_3 + \ldots$$

Es handelt sich also um Reactionen, welche hinsichtlich der verschwindenden Stoffe völlig verschieden sind.

Wenn die vollständigen Reactionsgleichungen die hier angegebene Form haben und wenn außerdem die Geschwindigkeitsconstanten in der durch Gleichung 15 *a*) angegebenen Beziehung stehen, so können bei beliebigen Anfangsconcentrationen die Reactionsgeschwindigkeiten in einem von der Zeit unabhängigen Verhältnisse stehen. Da aber die Bedingungen des §. 30 nur nothwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses sind, ist noch zu prüfen, ob die Constanz dieses Verhältnisses hier wirklich zutrifft. Im vorliegenden Falle ist das Verhältnis der Reactionsgeschwindigkeiten wirklich constant.

Die Geschwindigkeitsgleichungen sind nach §. 6

$$\frac{dx}{dt} = k_1(A_1-\xi_1)^{n_1}(A_2-\xi_2)^{n_2}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2(A_1-\xi_1)^{n_1+1}(A_2-\xi_2)^{n_2-1}.$$

Daher ist

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt} = \frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{A_1-\xi_1}{A_2-\xi_2}. \qquad 16)$$

Nach §. 4 ist $\xi_1 = (n_1+1-\beta_1)y$, $\xi_2 = (n_2-\alpha_2)x$.

Die Integration der Gleichung 16) gibt

$$\frac{1}{n_1+1-\beta_1}\, l\,\frac{A_1-(n_1+1-\beta_1)y}{A_1} =$$

$$= \frac{k_2}{k_1(n_2-\alpha_2)}\, l\,\frac{A_2-(n_2-\alpha_2)x}{A_2},$$

woraus folgt:

$$y = \frac{A_1}{n_1+1-\beta_1}\left\{1-\left[\frac{A_2-(n_2-\alpha_2)x}{A_2}\right]^{\frac{k_2(n_1+1-\beta_1)}{k_1(n_2-\alpha_2)}}\right\}.$$

Durch Einführung der durch die Gleichung 15 *a*) ausgedrückten Bedingung folgt

$$y = \frac{A_1}{n_1+1-\beta_1}\left[1-\frac{A_2-(n_2-\alpha_2)x}{A_2}\right] = \frac{(n_2-\alpha_2)A_1 x}{(n_1+1-\beta_1)A_2}.$$

Durch Einführung dieses Wertes von y in die Gleichung 16) erhält man $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt} = \frac{k_2 A_1}{k_1 A_2}$. Das Verhältnis der Reactionsgeschwindigkeiten ist also in diesem Falle wirklich von der Zeit unabhängig. Mit Hilfe des für beliebige k-Werte giltigen Wertes von y würde man erhalten

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt} = \frac{k_2}{k_1}\,\frac{A_1[A_2-(n_2-\alpha_2)x]^{\frac{k_2(n_1+1-\beta_1)}{k_1(n_2-\alpha_2)}-1}}{A_2^{\frac{k_2(n_1+1-\beta_1)}{k_1(n_2-\alpha_2)}}}.$$

Man sieht sofort, dass die Erfüllung der Gleichung 15 a) für die Constanz des Geschwindigkeitsverhältnisses nothwendig ist.

Specielle Fälle sind beispielsweise

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & M_2 \rightarrow \alpha_3 M_3 + \dots \\ \text{II.} & M_1 \rightarrow \beta_3 M_3 + \dots \end{array}\right\} \text{ für } k_1 = k_2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & M_1 + M_2 \rightarrow M_1 + \alpha_3 M_3 + \dots \\ \text{II.} & 2M_1 \rightarrow \beta_3 M_3 + \dots \end{array}\right\} \text{ für } k_1 = 2k_2.$$

§. 34. Bei Reactionsgleichungen von der im §. 31 angegebenen Form können außerdem constante Geschwindigkeitsverhältnisse bei bestimmten Werten der Anfangsconcentrationen auftreten. Ich beschränke mich darauf, ein Beispiel zu geben.

Es seien die vollständigen Reactionsgleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & M_1 + 2M_2 \rightarrow \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 + \dots \\ \text{II.} & 2M_1 + M_2 \rightarrow \beta_3 M_3 + \beta_4 M_4 + \dots \end{array}$$

Die Gleichung 13) geht über in

$$0 = k_1 A_2 (2A_1 - A_2) + k_2 A_1 (A_1 - 2A_2).$$

Dieser Gleichung kann u. a. durch $A_1 = A_2$, $k_1 = k_2$ genügt werden. Man hat

$$\frac{dx}{dt} = k(A-x-2y)(A-2x-y)^2$$

und

$$\frac{dy}{dt} = k(A-x-2y)^2(A-2x-y).$$

Durch Integration von $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{A-x-2y}{A-2x-y}$ erhält man $l\,\frac{2}{3}\frac{A-x-y}{(x-y)^3} = \infty$, woraus $y = x$ folgt. Die Gleichheit von x und y ergibt sich übrigens auch daraus, dass die Geschwindigkeitsgleichungen durch Vertauschung von x und y keine Veränderung erfahren. Es tritt also auch in diesem Falle ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis $\left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = 1\right)$ auf.

Ein anderes Beispiel ist das zu einem Gleichgewichte führende Reactionspaar $M_1 \rightarrow M_2$ und $M_2 \rightarrow M_1$. Aus Gleichung 13) folgt $k_1 A_1 = k_2 A_2$. Man erhält also das in diesem Falle selbstverständliche Resultat, dass ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis nur auftritt, wenn die beiden Molekelarten von Anfang an in den dem Gleichgewichte entsprechenden Concentrationen da sind. Dann sind eben die Reactionsgeschwindigkeiten gleich, ihr Verhältnis also eins.

§. 35. Dass die Erfüllung der Gleichung 13) keine hinreichende Bedingung für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses ist, soll ebenfalls an einem Beispiele gezeigt werden.

Es sollen die Reactionen $2M_2 \rightarrow M_3$ und $M_1 \rightarrow M_4$ nebeneinander verlaufen.

Dann ist $\frac{dx}{dt} = k_1(A_2-2x)^2$ und $\frac{dy}{dt} = k_2(A_1-y)$, woraus durch Integration folgt

$$x = \frac{k_1 A_2^2 t}{2k_1 A_2 t + 1} \quad \text{und} \quad y = A_1(1-e^{-k_2 t}).$$

Daher ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1 A_2^2}{(2k_1 A_2 t + 1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = k_2 A_1 e^{-k_2 t}.$$

Die beiden Reactionsgeschwindigkeiten stehen auch dann nicht in einem von der Zeit unabhängigen Verhältnisse, wenn man die durch Gleichung 13) gegebene Bedingung erfüllt.

Diese Bedingung ist im vorliegenden Falle $k_2 = 4k_1A_2$. Man erhält

$$\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{4A_1}{A_2}(2k_1A_2t + 1)^2 e^{-4k_1A_2t},$$

welcher Ausdruck von der Zeit abhängt.

Jedenfalls sind constante Verhältnisse zwischen den Reactionsgeschwindigkeiten in der Regel nur zu erwarten, wenn die beiden Reactionen hinsichtlich der Stoffe von veränderlicher Concentration von gleicher Ordnung sind.

§. 36. Die in §. 27 bis 34 besprochenen Fälle von constanten Geschwindigkeitsverhältnissen unterscheiden sich wesentlich von den in §. 20 bis 26 behandelten. Bei letzteren ist das Geschwindigkeitsverhältnis gleich dem Verhältnisse der Geschwindigkeitsconstanten, wie in §. 20 erwähnt wurde. Bei ersteren dagegen ist das Geschwindigkeitsverhältnis auch von den Anfangsconcentrationen abhängig. Das ergibt sich unmittelbar aus Gleichung 5) (§. 16). Zum gleichen Resultate kommt man selbstverständlich auch, wenn man die Gleichung 4) (§. 16) mit Hilfe der Gleichungen 8) (§. 27) und 9) (§. 28) umformt.

Aus Gleichung 5) folgt auch, dass das Geschwindigkeitsverhältnis von den Concentrationen der Molekelarten von unveränderlicher Concentration (§. 17) abhängt, wenn für diese Molekelarten nicht die Bedingungen $o - n = 0$ erfüllt sind.

Man kann daher sagen: Ein von den Anfangsconcentrationen und der Zeit unabhängiges endliches Verhältnis der Geschwindigkeiten zweier nebeneinander verlaufender Reactionen beweist immer die *Gleichheit* der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen.

§. 37. Ein endliches, von der Zeit unabhängiges Verhältnis der Geschwindigkeiten zweier nebeneinander verlaufenden Reactionen tritt auch auf, wenn *für einen Theil der Stoffe die Bedingung des §. 17, für einen anderen Theil die Bedingung des §. 20 (einschließlich §. 26 a) und für den Rest gruppenweise die Bedingung des §. 27* erfüllt ist.

Ein einfaches Beispiel dafür sind die vollständigen Reactionsgleichungen

$$\text{I.}\quad M_1+M_2+M_3 \rightarrow M_1+M_5$$
$$\text{II.}\quad M_2+M_4 \rightarrow M_6.$$

Der Stoff M_1 ist von unveränderlicher Concentration, da er nur an der Reaction I, und zwar nur als Katalysator betheiligt ist. Für M_2 ist die Bedingung $n_2 = o_2$ erfüllt. Ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis ist möglich, wenn für M_3 und M_4 die Bedingung des §. 27 erfüllt ist. Zur Erfüllung dieser Bedingung ist die Befriedigung der Gleichung 13) erforderlich. Diese gibt im vorliegenden Falle $k_1 A_1 = k_2$. In der That tritt dann ein von der Zeit unabhängiges Geschwindigkeitsverhältnis auf.

Man hat

$$\frac{dx}{dt} = k_1 A_1 (A_2 - x - y)(A_3 - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 (A_2 - x - y)(A_4 - y).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \frac{k_1 A_1 (A_3 - x)}{k_2 (A_4 - y)},$$

woraus durch Integration

$$x = A_3 \left[1 - \left(\frac{A_4 - y}{A_4}\right)^{\frac{k_1 A_1}{k_2}}\right]$$

folgt. Setzt man diesen Wert für x in das Geschwindigkeitsverhältnis ein, so erhält man

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \frac{k_1 A_1 (A_4 - y)^{\frac{k_1 A_1}{k_2} - 1}}{k_2 A_4^{\frac{k_1 A_1}{k_2}}}.$$

Man sieht, dass nur für $k_1 A_1 = k_2$ ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis auftritt. Sein Wert ist

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \frac{k_1 A_1}{k_2 A_4}.$$

§. 38. Geben zwei Reactionen infolge Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen (§. 20) ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis, so können *daneben* beliebige *andere Reactionen* stattfinden, ohne dass die Constanz gestört wird.

Dasselbe gilt auch, wenn an den beiden Reactionen Molekelarten von constanter Concentration betheiligt sind, vorausgesetzt, dass die weiteren Reactionen die Constanz der Concentration nicht aufheben. Das trifft insbesondere zu für Molekelarten, die in großem Überschusse vorhanden sind, ferner für jene, die an allen Reactionen nur als Katalysatoren betheiligt sind.

Im Falle des §. 27 dagegen werden die Bedingungen für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses durch das *Hinzutreten weiterer Reactionen*, an denen theilweise dieselben Molekelarten betheiligt sind, *beeinflusst*, wenn diese Reactionen die Concentrationen jener Molekelarten ändern, welche die Geschwindigkeiten der beiden ersten Reactionen beeinflussen.

Beispielsweise gibt das Reactionspaar $M_1 \rightarrow M_3$ und $M_2 \rightarrow M_4$ nach §. 33 für $k_1 = k_2$ ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis. Findet daneben noch die Reaction $M_2 \rightarrow M_5$ statt, so wird die nothwendige und in diesem Falle auch hinreichende Bedingung für ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis zwischen den beiden ersten Reactionen $k_1 = k_2 + k_3$.

Ist die dritte Reaction $M_5 \rightarrow M_2$, so liefert Gleichung 13) $k_1 = k_2 - \frac{A_5 k_3}{A_2}$. Diese Bedingung ist aber keine hinreichende Bedingung für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses zwischen den beiden ersten Reactionen, wie man bei der Integration der Geschwindigkeitsgleichungen sieht.

Aus

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (A_1 - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 (A_2 - y + z)$$

$$\frac{dz}{dt} = k_3 (A_5 - z)$$

folgt

$$x = A_1(1-e^{-k_1 t})$$

$$y = A_2+A_5+\left(\frac{k_2A_5}{k_2-k_3}-A_2-A_5\right)e^{-k_2 t}-\frac{k_2A_5}{k_2-k_3}e^{-k_3 t}$$

$$z = A_5(1-e^{-k_3 t}).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt} = \frac{k_2}{k_1A_1}\left(A_2-\frac{k_3A_5}{k_2-k_3}\right)e^{(k_1-k_2)t}+\frac{k_2k_3A_5}{k_1(k_2-k_3)A_1}e^{(k_1-k_3)t}.$$

Führt man die aus Gleichung 13) folgende Bedingung ein, so erhält man

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt} = \frac{k_2A_2}{A_1(k_2A_2-k_3A_5)}\left\{\left(A_2-\frac{k_3A_5}{k_2-k_3}\right)e^{\frac{-k_3A_5t}{A_2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{k_3A_5}{k_2-k_3}c^{\frac{(k_2-k_3)A_2-k_3A_5}{A_2}t}\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist im allgemeinen nicht constant; die Gleichung 13) liefert daher im vorliegenden Falle keine hinreichende Bedingung für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses. Wohl aber wird der Ausdruck constant in dem speciellen Falle $(k_2-k_3)A_2-k_3A_5 = 0$. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses zwischen den beiden ersten Reactionen ist daher

$$k_3A_5 = (k_2-k_1)A_2 = (k_2-k_3)A_2, \qquad 16\,a)$$

woraus $k_1 = k_3$ folgt.

Man erhält dann

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt} = \frac{k_2A_2}{k_3A_1}.$$

Für $k_2 = k_3$ wird die allgemeine Formel für y unbestimmt. In diesem Falle hat man

$$y = A_2 + A_5 - (A_2 + A_5 + k_2 A_5 t) e^{-k_2 t}$$

$$\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{k_2 (A_2 + k_2 A_5 t)}{k_1 A_1} e^{(k_1 - k_2) t}.$$

Letzterer Ausdruck kann für endliche k und A nicht constant werden. Dasselbe folgt aus Gleichung 16 a). Diese führt für $k_2 = k_3$ zu $A_5 = 0$, also zum Verschwinden der dritten Reaction.

§. 38 a. Von besonderer Wichtigkeit sind die Reactionen, an welchen Elektrolyte betheiligt sind. In solchen Fällen hat man neben den sonstigen Reactionen immer die *Reactionspaare, welche zum Gleichgewichte führen.* Ich will daher noch zwei vollständig durchgerechnete Beispiele geben, in welchen neben den beiden Reactionen, die auf constantes Geschwindigkeitsverhältnis untersucht werden sollen, noch ein zu einem Gleichgewichte führendes Reactionspaar angenommen wird.

Es seien zunächst die stattfindenden Reactionen I. $M_1 \rightarrow M_3$ II. $M_2 \rightarrow M_4$ III. $M_1 \rightarrow M_2$ IV. $M_2 \rightarrow M_1$. Die Veränderlichen der vier Reactionen seien x, y, z, u. Als nothwendige Bedingung für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses zwischen den Reactionen I und II folgt aus Gleichung 13)

$$0 = k_1 - k_2 + k_3 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) - k_4 \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right). \qquad 16\,b)$$

Setzt man $z - u = v$, so sind die Geschwindigkeitsgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (A_1 - x - z + u) = k_1 (A_1 - x - v)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 (A_2 - y + z - u) = k_2 (A_1 - y + v)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{du}{dt} = k_3 (A_1 - x - v) - k_4 (A_2 - y + v)$$

Setzt man

$$\Sigma k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

$$S = k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_3$$

$$b = + \sqrt{\frac{(\Sigma k)^2}{4} - k_1 k_2 - k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\vartheta_1 = \frac{\Sigma k}{2} + \sqrt{\frac{(\Sigma k)^2}{4} - k_1 k_2 - k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\vartheta_2 = \frac{\Sigma k}{2} - \sqrt{\frac{(\Sigma k)^2}{4} - k_1 k_2 - k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$T = (k_2 + k_4) A_1 + k_4 A_2,$$

so sind die Integrale der Differentialgleichungen

$$x = -(1 - e^{-\vartheta_1 t}) \frac{(T - A_1 \vartheta_1) k_1 \vartheta_2}{2bS} + (1 - e^{-\vartheta_2 t}) \frac{(T - A_1 \vartheta_2) k_1 \vartheta_1}{2bS}$$

$$y = \frac{k_2}{2bk_4 S} \{(1 - e^{-\vartheta_1 t})(T - A_1 \vartheta_1)[S - (k_1 + k_3)\vartheta_2] + \\ + (1 - e^{-\vartheta_2 t})(T - A_1 \vartheta_2)[(k_1 + k_3)\vartheta_1 - S]\}$$

$$v = \frac{1}{2bS} \{-(1 - e^{-\vartheta_1 t})(T - A_1 \vartheta_1)(S - k_1 \vartheta_2) + \\ + (1 - e^{-\vartheta_2 t})(T - A_1 \vartheta_2)(S - k_1 \vartheta_1)\}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1}{2b} \{-(T - A_1 \vartheta_1) e^{-\vartheta_1 t} + (T - A_1 \vartheta_2) e^{-\vartheta_2 t}\}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k_2}{2bk_4} \{(T - A_1 \vartheta_1)(k_2 + k_4 - \vartheta_2) e^{-\vartheta_1 t} - \\ - (T - A_1 \vartheta_2)(k_2 + k_4 - \vartheta_1) e^{-\vartheta_2 t}\}.$$

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \\ = \frac{k_1 k_4}{k_2} \cdot \frac{-(T - A_1 \vartheta_1) + (T - A_1 \vartheta_2) e^{2bt}}{(T - A_1 \vartheta_1)(k_2 + k_4 - \vartheta_2) - (T - A_1 \vartheta_2)(k_2 + k_4 - \vartheta_1) e^{2bt}}.$$

Letzteren Ausdruck kann man auf eine etwas andere Form bringen, indem man Zähler und Nenner mit e^{-2bt} multipliciert.

Der aufgeschriebene Ausdruck wird von der Zeit unabhängig, wenn $T - A_1 \vartheta_2 = 0$. Aus dem durch Multiplication des Zählers und Nenners mit e^{-2bt} umgeformten Ausdrucke ergibt sich ferner, dass er auch für $T - A_1 \vartheta_1 = 0$ constant wird. Diese beiden Bedingungen für die Constanz des Geschwindigkeitsverhältnisses lassen sich auf die Form bringen

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{k_4}\left(\frac{\Sigma k}{2} - k_2 - k_4 \mp b\right).$$

Denselben Ausdruck erhält man, wenn man Gleichung 16*b*) nach $\frac{A_2}{A_1}$ auflöst. Die aus Gleichung 13) folgende Bedingung für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses ist daher im vorliegenden Falle nicht bloß eine nothwendige, sondern auch eine hinreichende.

Eine besonders einfache Art, die Gleichung 16*b*) zu befriedigen, ist gegeben durch $k_1 = k_2$, $k_3 = k_4$, $A_1 = A_2$. Dann ist $x = y = A_1(1 - e^{-k_1 t})$, $v = 0$.

§. 38*b*. Verlaufen die Reactionen III und IV mit unendlich großer Geschwindigkeit, so liegt der Fall des §. 26*a* vor; die linken Seiten der Reactionsgleichungen I und II sind als identisch zu betrachten. Sie enthalten nämlich hylotrope Formen, zwischen denen sich unendlich rasch ein Gleichgewicht herstellt. In diesem Falle muss nach §. 26*a* zwischen den Reactionen I und II für beliebige Werte der Geschwindigkeitsconstanten und Anfangsconcentrationen ein von der Zeit unabhängiges Geschwindigkeitsverhältnis auftreten.

Dass dies wirklich der Fall ist, sieht man, wenn man in der im vorigen Paragraphen gegebenen allgemeinen Gleichung für $\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt}$ k_3 und k_4 gleich unendlich setzt. Bezeichnet man die Gleichgewichtsconstante $\frac{k_3}{k_4}$ mit $\varkappa$, so wird

$$\Sigma k = k_4(\varkappa + 1)$$

$$S = k_4(k_1 + k_2\varkappa)$$

$$b = \frac{k_4(\varkappa + 1)}{2}$$

$$\vartheta_1 = k_4(\varkappa + 1)$$

$$\vartheta_2 = \frac{k_1 + k_2\varkappa}{\varkappa + 1}.$$

Dadurch wird

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{\varkappa A_1 - A_2 + (A_1 + A_2)\, e^{k_4(\varkappa+1)t}}{A_2 - \varkappa A_1 + \varkappa(A_1 + A_2)\, e^{k_4(\varkappa+1)t}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Bestimmt man den Wert dieses Ausdruckes durch Differentiation oder berücksichtigt man, dass $\varkappa A_1 = A_2$, weil das Gleichgewicht sich unendlich rasch einstellt, so erhält man

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \frac{k_1}{k_2 \varkappa}.$$

Gleichung 16*b*) gibt in diesem Falle die selbstverständliche Bedingung $\varkappa A_1 = A_2$.

§. 38*c*. Es sollen nunmehr folgende Reactionen betrachtet werden:

I. $M_1 \rightarrow M_4$ II. $M_2 \rightarrow M_5$ III. $M_1 \rightarrow M_3$ IV. $M_3 \rightarrow M_1$.

Die Veränderlichen der vier Reactionen seien wieder x, y, z, u.

Als nothwendige Bedingung für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses zwischen den Reactionen I und II ergibt sich aus Gleichung 13)

$$0 = k_1 - k_2 + k_3 - k_4 \frac{A_3}{A_1}. \qquad 16c)$$

Die Geschwindigkeitsgleichungen sind

$$\frac{dx}{dt} = k_1(A_1 - x - v)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2(A_2 - y)$$

$$\frac{dv}{dt} = k_3(A_1 - x - v) - k_4(A_3 + v),$$

wo $v = z - u$.

Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$\Sigma k = k_1 + k_3 + k_4$$

$$b = + \sqrt{\frac{(\Sigma k)^2}{4} - k_1 k_4}$$

$$\vartheta = \frac{\Sigma k}{2} + \sqrt{\frac{(\Sigma k)^2}{4} - k_1 k_4}$$

$$\vartheta' = \frac{\Sigma k}{2} - \sqrt{\frac{(\Sigma k)^2}{4} - k_1 k_4}$$

$$\lambda = \frac{k_1}{\vartheta - k_3 - k_4}$$

$$\lambda' = \frac{k_1}{\vartheta' - k_3 - k_4},$$

so sind die Integrale der Differentialgleichungen

$$x = \frac{k_1 k_3}{2b}\left\{-\frac{k_1 A_1 + \lambda(k_3 A_1 - k_4 A_3)}{\vartheta(\vartheta' - k_3 - k_4)}(1 - e^{-\vartheta t}) + \right.$$
$$\left. + \frac{k_1 A_1 + \lambda'(k_3 A_1 - k_4 A_3)}{\vartheta'(\vartheta - k_3 - k_4)}(1 - e^{-\vartheta' t})\right\}$$

$$y = A_2(1 - e^{-k_2 t})$$

$$v = \frac{k_3}{2b}\left\{\frac{1}{\vartheta}[k_1 A_1 + \lambda(k_3 A_1 - k_4 A_3)](1 - e^{-\vartheta t}) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\vartheta'}[k_1 A_1 + \lambda'(k_3 A_1 - k_4 A_3)](1 - e^{-\vartheta' t})\right\}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1 k_3}{2b}\left\{-\frac{k_1 A_1 + \lambda(k_3 A_1 - k_4 A_3)}{\vartheta' - k_3 - k_4} e^{-\vartheta t} + \right.$$
$$\left. + \frac{k_1 A_1 + \lambda'(k_3 A_1 - k_4 A_3)}{\vartheta - k_3 - k_4} e^{-\vartheta' t}\right\}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 A_2 e^{-k_2 t}$$

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \frac{k_1}{2 b k_2 A_2}\{[A_1(\vartheta - k_4) - k_4 A_3] e^{(k_2 - \vartheta) t} -$$
$$- [A_1(\vartheta' - k_4) - k_4 A_3] e^{(k_2 - \vartheta') t}\}.$$

Dieser Ausdruck wird von der Zeit unabhängig für $k_2 = \vartheta$ und $A_1(\vartheta' - k_4) = k_4 A_3$ oder für $k_2 = \vartheta'$ und $A_1(\vartheta - k_4) = k_4 A_3$. Durch Einsetzung der Werte für ϑ und ϑ' gehen diese zwei Paare von Bedingungen über in

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= \frac{\Sigma k}{2} \pm b \\ \text{und} \\ \frac{A_3}{A_1} &= \frac{1}{k_4}\left(\frac{\Sigma k}{2} \mp b - k_4\right) \end{aligned}\right\} \quad 16d)$$

Man sieht, dass diese Bedingungen die Gleichung 16c) befriedigen, wie es sein muss. Aber diese Gleichung hat auch noch andere Lösungen, welche den Ausdruck für $\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt}$ nicht constant machen; sie ist also im vorliegenden Falle keine hinreichende Bedingung für die Unabhängigkeit des Geschwindigkeitsverhältnisses von der Zeit.

§. 38*d*. Nimmt man nun wieder an, dass die Reactionen III und IV mit unendlicher Geschwindigkeit verlaufen, so ist $k_3 = \infty$, $k_4 = \infty$. Setzt man $\frac{k_3}{k_4} = \varkappa$, so wird

$$b = \frac{k_4(\varkappa+1)}{2}, \quad \vartheta = k_4(\varkappa+1), \quad \vartheta' = \frac{k_1}{\varkappa+1}.$$

Man erhält daher

$$\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt} = \frac{k_1(A_1+A_3)}{k_2A_2(\varkappa+1)}e^{\left(k_2-\frac{k_1}{\varkappa+1}\right)t} = \frac{k_1A_1}{k_2A_2}e^{\left(k_2-\frac{k_1}{\varkappa+1}\right)t},$$

da $A_3 = \varkappa A_1$ ist.

Das Geschwindigkeitsverhältnis erhält im betrachteten Falle einen endlichen constanten Wert, wenn $k_2 = \frac{k_1}{\varkappa+1}$. Das folgt auch aus den durch Gleichung 16*d*) ausgedrückten Bedingungen. Denn diese gehen für $k_3 = k_4 = \infty$ über in

$$k_2 = \infty, \qquad \frac{A_3}{A_1} = -1$$

oder

$$k_2 = \frac{k_1}{\varkappa+1}, \quad \frac{A_3}{A_1} = \varkappa.$$

Das erste Paar von Bedingungen hat keinen chemischen Sinn, da die Anfangsconcentrationen wesentlich positive Größen sind, also $\frac{A_3}{A_1} = -1$ unmöglich ist. Das zweite Paar von Bedingungen entspricht der Folgerung, die sich aus der Formel für das Geschwindigkeitsverhältnis ergibt; denn $\frac{A_3}{A_1} = \varkappa$ ist selbstverständlich, wenn k_3 und k_4 unendlich sind.

Die aus Gleichung 13) folgende Bedingung 16*c*) versagt für unendliche k_3 und k_4, da sie dann nur zur selbstverständlichen Gleichgewichtsbedingung $\varkappa = \frac{A_3}{A_1}$ führt.

§. 38*e*. Ähnlich wie im zuletzt besprochenen Falle versagt die Gleichung 13) immer, wenn *unendlich rasch sich einstellende Gleichgewichte* zu den in die Gleichung eintretenden Reactionen gehören. Man kann jedoch von der Gleichung 13) Gebrauch machen, wenn man entsprechend §. 6*b* die Gleichgewichtsbedingungen in die Geschwindigkeitsgleichungen der langsamer verlaufenden Reactionen einführt.

In dem im vorigen Paragraphen besprochenen Beispiele kann man die Reactionsgleichungen III und IV ersetzen durch die Gleichgewichtsbedingung $\varkappa(A_1 - \xi_1) = A_3 - \xi_3$. Nun sei $A_1 + A_3 = A$, wo A die Anfangsconcentration der gesammten hylotropen Gruppe bedeutet. Nach §. 5 ist ferner $\xi_1 + \xi_3 = x$, da $\xi_1 + \xi_3$ die Änderung der Gesammtconcentration der hylotropen Gruppe bedeutet, welche von den Reactionen mit Gegenwirkungen nicht beeinflusst wird. Daher ist

$$A_1 - \xi_1 + A_3 - \xi_3 = A - x.$$

Durch Einführung der Gleichgewichtsbedingung folgt daraus

$$A_1 - \xi_1 = \frac{A - x}{\varkappa + 1}.$$

Die Geschwindigkeitsgleichungen gehen über in

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1}{\varkappa + 1}(A - x) \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = k_2(A_2 - y).$$

Beim Stattfinden der Reactionen I bis IV und unendlichen k_3 und k_4 haben daher $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ dieselben Werte, wie wenn lediglich die Reactionen $M \rightarrow M_4$ und $M_2 \rightarrow M_5$, und zwar mit den Geschwindigkeitsconstanten $\frac{k_1}{\varkappa+1}$ und k_2 eintreten. M bedeutet darin eine einheitliche Molekelart, durch die man sich die hylotrope Gruppe $M_1 \rightleftarrows M_3$ ersetzt denkt.

Auf dieses *fingierte* Reactionspaar kann nunmehr die Gleichung 13) angewendet werden. Man erhält so als nothwendige und hinreichende (vergl. §. 33) Bedingung für das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{k_1}{\varkappa+1} = k_2$, also dieselbe Bedingung, welche sich im vorigen Paragraphen aus der Integration der den Reactionen I bis IV entsprechenden Differentialgleichungen ergeben hat.

Im Beispiele des §. 38*b*) hat man $\varkappa(A_1-\xi_1) = A_2-\xi_2$, $\xi_1+\xi_2 = x+y$, $A_1-\xi_1+A_2-\xi_2 = A-x-y$. Daraus folgt

$$A_1-\xi_1 = \frac{1}{\varkappa+1}(A-x-y), \quad A_2-\xi_2 = \frac{\varkappa}{\varkappa+1}(A-x-y).$$

Die Geschwindigkeitsgleichungen sind daher

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1}{\varkappa+1}(A-x-y), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{k_2\varkappa}{\varkappa+1}(A-x-y),$$

woraus die nicht an besondere Bedingungen geknüpfte Constanz des Geschwindigkeitsverhältnisses ersichtlich ist.

Die Anwendung der Gleichung 13) ergibt in diesem Falle eine identisch befriedigte Gleichung. Denn den umgeformten Geschwindigkeitsgleichungen entsprechen die fingierten Reactionen $M \rightarrow M_4$ und $M \rightarrow M_5$ mit den Geschwindigkeitsconstanten $\frac{k_1}{\varkappa+1}$ und $\frac{k_2\varkappa}{\varkappa+1}$. Für diese fingierten Reactionen wird $n_1-o_1 = 0$; da nur ein Stoff zu berücksichtigen ist, werden also beide Seiten der Gleichung 13) Null.

V. Constante Concentrationen.

§. 39. Im §. 17 ist bereits erwähnt worden, dass eine Molekelart unter Umständen eine von der Zeit unabhängige Concentration haben kann, wenn sie bei einem Theile der nebeneinander verlaufenden Reactionen gebildet, bei einem anderen Theile verbraucht wird.

Die Bedingungen, unter welchen das eintritt, ergeben sich aus folgendem.

§. 40. Es soll die Concentration der Molekelart M_1 unveränderlich sein, obwohl sie an mehreren Reactionen derart betheiligt ist, dass die einzelnen Reactionen ihre Concentration verändern.

Dann muss für diese Molekelart ξ_1 (§. 4) unabhängig von der Zeit gleich Null sein. Nach Formel 2) ist daher

$$0 = (n_1 - \alpha_1)x + (o_1 - \beta_1)y + \ldots$$

Diese Gleichung eignet sich nicht wohl zur Besprechung, da die $x, y \ldots$ erst durch Integration der Geschwindigkeitsgleichungen als Functionen der Zeit dargestellt werden können. Es muss aber auch $\frac{d\xi_1}{dt} = 0$ sein. Man erhält daher

$$0 = (n_1 - \alpha_1)\frac{dx}{dt} + (o_1 - \beta_1)\frac{dy}{dt} + \ldots \qquad 17)$$

Diese Gleichung kann durch $(n_1 - \alpha_1) = (o_1 - \beta_1) = \ldots = 0$ befriedigt werden. Dann wirkt der Stoff M_1 nur als Katalysator; die stattfindenden Reactionen haben auf seine Concentration keinen Einfluss. Dieser Fall kommt hier nicht in Betracht.

§. 41. Es können aber auch die Gleichungen $n_1 = \alpha_1$ u. s. w. nur für einen Theil der Reactionen oder für gar keine erfüllt sein. Dann sind Reactionen vorhanden, welche die Concentration der Molekelart M_1 ändern. Damit die Concentration von M_1 trotzdem unveränderlich bleibt, muss die Gleichung 17) für jedes t erfüllt sein. Das trifft zu, wenn in den einzelnen Summanden dieselbe Zeitfunction vorkommt und nach Heraushebung dieser Function der Factor Null übrig bleibt.



Die Bedingung, dass in den einzelnen Summanden dieselbe Zeitfunction vorkommt, wird wiedergegeben durch die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = K_2 \frac{dy}{dt} = K_3 \frac{dz}{dt} = \ldots,$$

wo die K_2, K_3,... von der Zeit unabhängig sind. Es müssen also die Geschwindigkeiten jener Reactionen, welche die Concentration der Molekelart M_1 verändern, in einem von der Zeit unabhängigen Verhältnisse stehen. Unter welchen Umständen das der Fall ist, wurde im Abschnitte IV besprochen.

Führt man diese Bedingung in die Gleichung 17) ein, so erhält man

$$0 = (n_1 - \alpha_1) + \frac{o_1 - \beta_1}{K_2} + \frac{p_1 - \gamma_1}{K_3} + \ldots$$

Setzt man die Werte der K nach Gleichung 5) (§. 16) ein, so folgt

$$0 = (n_1 - \alpha_1) k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots + (o_1 - \beta_1) k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} \ldots + \\ + (p_1 - \gamma_1) k_3 A_1^{p_1} A_2^{p_2} \ldots + \ldots \quad 18)$$

Die Concentration einer Molekelart ist also unveränderlich, obwohl sie von einzelnen der nebeneinander verlaufenden Reactionen verändert wird, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Zwischen jenen Reactionen, welche die Concentration der betreffenden Molekelart verändern, muss ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis (entsprechend dem Abschnitte IV) bestehen.

2. Es muss die Gleichung 18) erfüllt sein, welche eine Beziehung zwischen den auf diese Molekelart bezüglichen Coëfficienten in den Reactionsgleichungen, ferner den Geschwindigkeitscoefficienten jener Reactionen, welche die Concentration dieser Molekelart verändern, und den in den Geschwindigkeitsgleichungen dieser Reactionen auftretenden Anfangsconcentrationen ausdrückt.

§. 42. Es soll zunächst folgendes Beispiel untersucht werden. Zwischen den Reactionen

$$n_1 M_1 + n_2 M_2 \rightarrow \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots$$

und

$$o_1 M_1 + n_2 M_2 \rightarrow \beta_1 M_1 + \beta_1 M_2 + \ldots$$

tritt gemäß §. 20 ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis auf, wenn die Concentration von M_1 unveränderlich ist, da hinsichtlich der Stoffe von veränderlicher Concentration (in diesem Falle M_2) Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen besteht.

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Umständen die Concentration von M_1 unveränderlich ist, wenn außer diesen beiden Reactionen nur solche Reactionen stattfinden, welche die Menge von M_1 nicht verändern.

Als Bedingung dafür folgt aus Gleichung 18)

$$0 = (n_1 - \alpha_1) k_1 A_1^{n_1} + (o_1 - \beta_1) k_2 A_1^{o_1},$$

da $A_2^{n_2}$ herausfällt. Anders geschrieben:

$$n_1 - \alpha_1 = (\beta_1 - o_1) \frac{k_2}{k_1} A_1^{o_1 - n_1}. \qquad 19)$$

Diese Bedingung kann (was übrigens selbstverständlich ist) nur erfüllt werden, wenn $n_1 - \alpha_1$ und $o_1 - \beta_1$ verschiedenes Zeichen haben, wenn also M_1 bei der einen Reaction gebildet, bei der anderen verbraucht wird. Außerdem müssen $n_1 - \alpha_1$ und $o_1 - \beta_1$ ganze Zahlen sein.

Ein einfacher specieller Fall wird dargestellt durch die Reactionsgleichungen $M_1 + 2M_2 \rightarrow M_3$ und $2M_2 \rightarrow M_1 + M_4$ für $k_2 = k_1$ und $A_1 = 1$. Diese Reactionsgleichungen geben

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (A_1 - x + y)(A_2 - 2x - 2y)^2$$

und

$$\frac{dy}{dt} = k_2 (A_2 - 2x - 2y)^2,$$

woraus folgt

$$x = \left(\frac{k_2}{k_1} - A_1\right)\left(e^{\frac{-k_1}{k_2} y} - 1\right) + y.$$

Bildet man nun $\xi_1 = x - y$ und setzt die Werte $k_1 = k_2$ und $A_1 = 1$ ein, so erhält man $\xi_1 = 0$.

Dieses Reactionspaar stellt hinsichtlich M_1 eine Folgewirkung dar; es ergibt sich also das interessante Resultat, dass es Folgewirkungen gibt, bei denen das Zwischenproduct von unveränderlicher Concentration ist.

§. 43. Die durch die Gleichung 19) dargestellte Bedingung wird von den Anfangsconcentrationen völlig unabhängig, wenn $n_1 = o_1$ ist.

Das ist der Fall bei den Reactionsgleichungen $M_1 + M_2 \rightarrow M_3$ und $M_1 + M_2 \rightarrow 2M_1 + M_4$. Beim Stattfinden dieses Reactionspaares hat M_1 eine unveränderliche Concentration, wenn $k_1 = k_2$, da dann Gleichung 19) erfüllt ist. Man sieht sofort, dass

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 0$$

ist.

§. 44. Ein Beispiel, bei dem die Constanz der Geschwindigkeitsverhältnisse nach §. 27 ff. eintritt, ist folgendes. Die Reactionsgleichungen seien

$$n_1 M_1 + M_2 \rightarrow \alpha_1 M_1 + M_4 \quad \text{und} \quad o_1 M_1 + M_3 \rightarrow \beta_1 M_1 + M_5.$$

Die Geschwindigkeiten dieser beiden Reactionen können im allgemeinen nur dann in einem constanten Verhältnisse stehen, wenn gemäß Gleichung 13) (§. 30) die Bedingung erfüllt ist

$$0 = (n_1 - o_1)[(n_1 - \alpha_1)k_1 A_1^{n_1 - 1} A_2 + (o_1 - \beta_1)k_2 A_1^{o_1 - 1} A_3] + \\ + k_1 A_1^{n_1} - k_2 A_1^{o_1}. \qquad 20)$$

Ist jedoch die Molekelart M_1 von unveränderlicher Concentration, so ist sie bei Anwendung der Gleichung 13) nicht zu berücksichtigen; es bleibt daher

$$k_1 A_1^{n_1} = k_2 A_1^{o_1} \ldots \qquad 21)$$

Durch Integration der Geschwindigkeitsgleichungen überzeugt man sich leicht, dass unter Voraussetzung unveränderlicher Concentrationen von M_1 und bei Erfüllung der Gleichung 21) ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis auftritt.

Damit aber M_1 von unveränderlicher Concentration sei, ist gemäß Gleichung 18) (§. 41) erforderlich, dass

$$0 = (n_1 - \alpha_1) k_1 A_1^{n_1} A_2 + (o_1 - \beta_1) k_2 A_1^{o_1} A_3$$

sei.

(Man sieht, dass die Einführung dieser Bedingung in Gleichung 20) das erste Glied zum Verschwinden bringt. Der Fall des constanten Geschwindigkeitsverhältnisses bei unveränderlicher Concentration von M_1 ist daher ein specieller Fall des constanten Geschwindigkeitsverhältnisses bei veränderlicher Concentration von M_1.)

Durch Einführung von 21) in die letzte Gleichung erhält man $(n_1 - \alpha_1) A_2 = (\beta_1 - o_1) A_3$. Ist diese Bedingung und die Gleichung 21) erfüllt, so ist die Concentration von M_1 constant.

§. 45. Das trifft unter anderem zu, wenn man setzt $A_2 = A_3$, $\alpha_1 = o_1 = 0$, $n_1 = \beta_1 = 1$. Die Reactionsgleichungen sind dann $M_1 + M_2 \rightarrow M_4$ und $M_3 \rightarrow M_1 + M_5$. Bei diesem Reactionspaare ist also die Concentration von M_1 unveränderlich, wenn $A_2 = A_3$ und (gemäß Gleichung 21) $k_1 A_1 = k_2$. Man kann sich davon durch die allerdings etwas beschwerliche Integration der Geschwindigkeitsgleichungen überzeugen.

Man hat für dieses Reactionspaar im allgemeinen

$$\frac{dx}{dt} = k(A_1 - x + y)(A_2 - x) \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = k_2(A_3 - y).$$

Aus letzterer Differentialgleichung folgt $y = A_3(1 - e^{-k_2 t})$. Entwickelt man die Exponentialfunction in eine Reihe, so erhält man

$$y = A_3 \left(k_2 t - \frac{k_2^2 t^2}{2!} + \frac{k_2^3 t^3}{3!} - \ldots \right).$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung für $\frac{dx}{dt}$ ein, so kann man die Integration durch Reihen ausführen.

Führt man die Bedingungen $A_2 = A_3$ und $k_1 A_1 = k_2$ ein, so erhält man

$$y = A_2 \left(k_1 A_1 t - \frac{k_1^2 A_1^2 t^2}{2!} + \frac{k_1^3 A_3^3 t^3}{3!} - \ldots \right)$$

und

$$x = N_1 t + N_2 t^2 + N_3 t^3 + \ldots,$$

wobei die Methode der unbestimmten Coefficienten für $N_1, N_2 \ldots$ folgende Werte liefert:

$$N_1 = k_1 A_1 A_2$$

$$N_2 = -\frac{k_1^2 A_1^2 A_2}{2}$$

$$N_3 = \frac{k_1^3 A_1^3 A_2}{6}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N_{m+1} = \frac{k_1}{m+1} \Big[N_{m-1} N_1 + N_{m-2} N_2 + \ldots + N_1 N_{m-1} - (A_1 + A_2) N_m$$
$$- k_1 A_1 A_2 N_{m-1} + \frac{k_1^2 A_1^2 A_2 N_{m-2}}{2!} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{k_1^{m-1} A_1^{m-1} A_2 N_1}{(n-1)!}$$
$$+ (-1)^{m-1} \frac{k_1^m A_1^m A_2^2}{n!} \Big].$$

Indem man die ersten N ausrechnet, sieht man bald, dass sie nach der einfachen Gleichung $N_{m+1} = -\frac{k_1 A_1}{m+1} N_m$ gebildet sind.

Es ist daher $x = y$. Nun ist die Concentrationsabnahme von M_1 gegeben durch $\xi_1 = x - y = 0$. Die Concentration von M_1 ist also unveränderlich.

§. 46. Ein ganz einfaches Beispiel ist ferner das bereits am Schlusse des §. 34 erwähnte Reactionspaar $M_1 \rightarrow M_2$ und $M_2 \rightarrow M_1$. Bei diesem tritt ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis auf, wenn die Anfangsconcentrationen dem Gleichgewichte entsprechen ($k_1 A_1 = k_2 A_2$). Gleichung 18) führt zu derselben Bedingung. Es ist also die Concentration von M_1 (und ebenso von M_2) bei Erfüllung der Gleichung $k_1 A_1 = k_2 A_2$ unveränderlich, was in diesem Falle selbstverständlich ist.

§. 47. Die im vorstehenden entwickelten Bedingungen sind die einzigen, unter denen die Concentration der Molekelart M_1 unverändert bleibt, wenn ihre Concentration nur durch zwei Reactionen verändert wird. Dagegen muss ich es dahingestellt

sein lassen, ob das Auftreten eines constanten Geschwindigkeitsverhältnisses zwischen allen die Concentration von M_1 verändernden Reactionen nöthig ist, wenn ihre Zahl größer als zwei ist. Nur die Erfüllung der Gleichung 18) ist unter allen Umständen eine nothwendige Bedingung für das Auftreten einer unveränderlichen Concentration. Das ergibt sich aus folgendem.

Für das Auftreten einer unveränderlichen Concentration von M_1 ist die Erfüllung der Gleichung 17) für jedes t die nothwendige und hinreichende Bedingung. Nothwendig (aber nicht hinreichend) ist daher die Erfüllung der Gleichung 17) für $t = 0$. Setzt man in Gleichung 17) die Werte von $\frac{dx}{dt}$ u. s. w. für $t = 0$ ein, welche man erhält, wenn man in den Gleichungen 3) die ξ gleich Null setzt, so kommt man zur Gleichung 18), welche daher eine nothwendige Bedingung für das Auftreten einer unveränderlichen Concentration von M_1 ist. Neben Gleichung 18) muss aber noch eine Beziehung zwischen den Reactionsgeschwindigkeiten bestehen.

Sind nur zwei Reactionen in Betracht zu ziehen, so folgt aus Gleichung 17) unmittelbar $\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = -\frac{o_1 - \beta_1}{n_1 - \alpha_1}$. Die Reactionsgeschwindigkeiten müssen also in einem constanten Verhältnisse stehen.

Sind dagegen mehr als zwei Reactionen in Betracht zu ziehen, so können vielleicht auch andere Beziehungen zwischen den Reactionsgeschwindigkeiten existieren, welche zu unveränderlichen Concentrationen führen. Die Untersuchung der Natur dieser Beziehungen muss ich Mathematikern überlassen.

Jedenfalls kann es sich nur um singuläre Fälle handeln. Zu ihrer Aufsuchung kann Gleichung 18) dienen, ähnlich wie Gleichung 13) zur Aufsuchung von Fällen mit constantem Geschwindigkeitsverhältnisse benützt werden kann.

§. 48. Bei Erfüllung der Gleichung 18) (§. 41) wird ein Glied der Gleichung 13) (§. 30) gleich Null. Wird daher die Gleichung 13) zum Aufsuchen von Reactionspaaren mit constantem Geschwindigkeitsverhältnisse benützt, so ist eine gesonderte Untersuchung, ob eine der betheiligten Molekelarten

gemäß den Bedingungen des Abschnittes V von unveränderlicher Concentration ist, nicht nöthig, obwohl Stoffe von constanter Concentration bei der Aufsuchung constanter Geschwindigkeitsverhältnisse außer Betracht zu bleiben haben (§. 17). Denn die auf derartige Stoffe von constanter Concentration bezüglichen Glieder fallen aus Gleichung 13) von selbst heraus, beziehungsweise die Gleichung zerfällt in zwei oder mehr Gleichungen, die zum Theile die Bedingungen für constante Concentrationen von Molekelarten ausdrücken.

§. 49. In ähnlicher Weise, wie man ermitteln kann, unter welchen Umständen die Concentration einer Molekelart unveränderlich ist, kann man unter Berücksichtigung des §. 5 auch untersuchen, unter welchen Bedingungen die Concentration einer hylotropen Gruppe unveränderlich ist.

Eine nothwendige, aber nicht immer hinreichende Bedingung ist die Erfüllung einer der Gleichung 18) ähnlichen Gleichung, in welcher nur statt der Coefficienten $(n_1-\alpha_1)$ u. s. w. Coefficienten von der Form $\left(\frac{n_1-\alpha_1}{\nu_1}+\frac{n_{m+1}-\alpha_{m+1}}{\nu_{m+1}}\right)$ auftreten. Die ν und m haben dieselbe Bedeutung in §. 5.

Ist die abgeänderte Gleichung 18) erfüllt und bestehen außerdem zwischen jenen Reactionen, welche die Concentration der hylotropen Gruppe ändern, constante Geschwindigkeitsverhältnisse, so ist die Concentration der hylotropen Gruppe unveränderlich. Bezüglich der Frage, ob auch bei anderen Beziehungen zwischen den in Betracht kommenden Reactionsgeschwindigkeiten constante Concentrationen möglich sind, gilt das in §. 47 Gesagte.

Die zum Gleichgewichte zwischen den Molekelarten der hylotropen Gruppen führenden Reactionspaare ändern die Gesammtconcentration der hylotropen Gruppe nicht und gehören daher nicht zu den Reactionen, welche bei Aufsuchung der Bedingungen für unveränderliche Concentrationen hylotroper Gruppen zu berücksichtigen sind.

Ein einfaches Beispiel bieten die Reactionen

$$\text{I.}\quad M_1+M_4 \rightarrow M_3+M_4$$

$$\text{II.}\quad M_1+M_4 \rightarrow M_1+M_2$$

$$\text{III.} \quad M_1 \rightarrow M_2$$
$$\text{IV.} \quad M_2 \rightarrow M_1,$$

deren Veränderliche mit x, y, z, u berechnet werden sollen.

M_1 und M_2 sind die Molekelarten der hylotropen Gruppe. Die Gesammtconcentration der Gruppe wird dargestellt durch die Summe der Concentrationen von M_1 und M_2.

Die Reactionen III und IV suchen zwischen diesen beiden Molekelarten ein Gleichgewicht herzustellen und ändern die Gesammtconcentration der hylotropen Gruppe nicht.

Dagegen ändern die Reactionen I und II die Gesammtconcentration der hylotropen Gruppe. Da nur zwei Reactionen in Betracht kommen, müssen diese in einem constanten Geschwindigkeitsverhältnisse stehen, wenn die Concentration der hylotropen Gruppe $(M_1 M_2)$ unveränderlich sein soll. Das ist hier wegen Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen (§. 20) der Fall.

Außerdem muss die abgeänderte Gleichung 18) erfüllt sein; auch in diese Gleichung gehen nur die Reactionen I und II ein. ν_1 und ν_{m+1} sind gleich eins. Die Molekelart, welche in §. 5 den Index $m+1$ hatte, hat hier den Index 2. Man erhält also $0 = k_1 A_1 A_4 - k_2 A_1 A_4$ oder $k_1 = k_2$.

Unter diesen Umständen ist $x = y$. Da nun $\xi_1 = x + z - u$ und $\xi_2 = u - y - z$ ist, ist $\xi_1 + \xi_2 = 0$, daher die Gesammtconcentration der hylotropen Gruppe unveränderlich.

Befinden sich unter den Molekelarten Ionen, so ist zu berücksichtigen, dass nur jene Reactionsgleichungen möglich sind, welche nicht das Auftreten freier elektrischer Ladungen bedingen (§. 1).

VI. Constante Umwandlungsverhältnisse.

§. 50. Als »Umwandlungsverhältnis« hat Skraup[1] in einem speciellen Falle das Verhältnis bezeichnet, in welchem ein Stoff durch zwei gleichzeitig verlaufende Reactionen verbraucht wird. Ich will im folgenden diesen Ausdruck in einer etwas allgemeineren Bedeutung gebrauchen.

---

[1] Monatshefte für Chemie, *20*, 587 (1899).

Als Umwandlungsverhältnis bezeichne ich das Verhältnis der Concentrationsabnahmen zweier Stoffe, die im selben System durch Reactionen gebildet oder verbraucht werden, wobei Concentrationszunahmen als negative Concentrationsabnahmen zu behandeln sind. Die Umwandlungsverhältnisse werden also negativ sein, wenn einer der Stoffe gebildet, der andere verbraucht wird.

Die Frage, unter welchen Umständen Umwandlungsverhältnisse von der Zeit unabhängig sein können, ist wichtig geworden, seitdem Skraup in der erwähnten Arbeit das Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses bei der Cinchoninumlagerung dargethan hat.[1] Ich habe diese Frage durch die Aufstellung des folgenden Satzes zu beantworten gesucht:[2] »Ein von der Zeit unabhängiges Verhältnis zwischen den Mengen der durch zwei Reactionen erzeugten Producte beweist immer, dass Reactionen mit Nebenwirkungen vorliegen (da bei Gegenwirkungen und Folgewirkungen ein constantes Verhältnis unmöglich ist), und dass die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten der beiden Reactionen sich nur durch einen von der Zeit unabhängigen Factor unterscheiden«.

Dieser Satz bedarf indes einer kleinen Einschränkung, wie ich bereits in der Abhandlung über die Umlagerung des Cinchonins erwähnt habe. Es war bisher kein Weg bekannt, um Fragen wie die nach den Bedingungen für das Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses systematisch zu untersuchen. Gerade darum empfand ich das Bedürfnis nach einem Schema, welches alle möglichen Reactionstypen als specielle Fälle in sich schließt. Nachdem ich das im Abschnitte I dieser Abhandlung gegebene Schema gefunden hatte, war es möglich, die Frage der constanten Umwandlungsverhältnisse systematisch zu behandeln. Im folgenden werden die Bedingungen für das Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses entwickelt. Die Erörterungen der Abschnitte IV

---

[1] Vergl. meine Abhandlung: »Über die Umlagerung des Cinchonins (ein Beitrag zur Theorie der katalytischen Wirkung)«. Monatshefte für Chemie, *21*, 385 (1900); Zeitschrift für physikal. Chemie, *34*, 290.

[2] Zeitschrift für physikal. Chemie, *30*, 599 (1899).



und V sind hauptsächlich als nothwendige Vorarbeiten für diesen Zweck durchgeführt worden.

§. 51. In den hier gewählten Bezeichnungen wird das Umwandlungsverhältnis zwischen den Molekelarten M_1 und M_2 ausgedrückt durch $\xi_1 : \xi_2$, da die ξ die Concentrationsabnahmen bedeuten (§. 4).

Ein von der Zeit unabhängiges Umwandlungsverhältnis wird daher dargestellt durch $\xi_1 : \xi_2 = C$, wo C von der Zeit unabhängig ist. Daraus folgt

$$\frac{d\xi_1}{dt} : \frac{d\xi_2}{dt} = C. \qquad 22)$$

Beide Gleichungen sind immer gleichzeitig erfüllt. Denn die bei der Integration der Gleichung 22) auftretende willkürliche Constante ist im vorliegenden Falle Null, da für $t = 0$ ξ_1 und ξ_2 gleichzeitig Null werden. Die Erfüllung der Gleichung 22) ist daher die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten eines von der Zeit unabhängigen Umwandlungsverhältnisses zwischen den Molekelarten M_1 und M_2.

§. 52. Führt man in die Gleichung 22) die Werte der Differentialquotienten ein, welche sich durch Differentiation der Gleichungen 2) (§. 4) ergeben, so erhält man

$$\frac{d\xi_1}{dt} : \frac{d\xi_2}{dt} =$$

$$= \frac{(n_1-\alpha_1)\frac{dx}{dt} + (o_1-\beta_1)\frac{dy}{dt} + (p_1-\gamma_1)\frac{dz}{dt} + \ldots}{(n_2-\alpha_2)\frac{dx}{dt} + (o_2-\beta_2)\frac{dy}{dt} + (p_2-\gamma_2)\frac{dz}{dt} + \ldots} = C. \qquad 23)$$

Wenn diese Gleichung erfüllt, also das Umwandlungsverhältnis von der Zeit unabhängig ist, so erhält man den Wert von C, indem man $t = 0$ setzt. Dann ist $x = y = \ldots = 0$. Man erhäit dann ebenso wie in §. 30

$$C = \frac{(n_1-\alpha_1)k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots + (o_1-\beta_1)k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} \ldots + \ldots}{(n_2-\alpha_2)k_1 A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots + (o_2-\beta_2)k_2 A_1^{o_1} A_2^{o_2} \ldots + \ldots}. \qquad 24)$$

§. 53. Soll das constante Umwandlungsverhältnis nicht zwischen zwei Molekelarten, sondern zwischen hylotropen Gruppen bestehen, so bekommt man Bedingungsgleichungen von derselben Form; nur treten statt der $(n_1-\alpha_1)$ u. s. w. Coefficienten von der Form $\left(\frac{n_1-\alpha_1}{\nu_1}+\frac{n_{m+1}-\alpha_{m+1}}{\nu_{m+1}}\right)$ u. s. w. auf, wie aus den in §. 5 gegebenen Erörterungen unmittelbar ersichtlich ist.

Die Reactionen mit Gegenwirkungen zwischen den Molekelarten der hylotropen Gruppen brauchen dabei nicht berücksichtigt zu werden, wie bereits in §. 5 nachgewiesen wurde.

Im folgenden wird die Untersuchung hauptsächlich für constante Umwandlungsverhältnisse zwischen Molekelarten durchgeführt. Die Betrachtungen gelten aber auch für hylotrope Formen, soweit es sich nicht um die in Gleichung 23) auftretenden Coefficienten $(n_1-\alpha_1)$ u. s. w. handelt. Die entsprechenden Änderungen sind leicht durchzuführen.

§. 54. Der Vollständigkeit halber sei zuerst erwähnt, dass sich ein constantes *Umwandlungsverhältnis Null oder* ∞ ergibt, wenn eines der $\frac{d\xi}{dt}$ Null oder ∞ wird.

Nullwerden eines $\frac{d\xi}{dt}$ bedeutet, dass eine der Molekelarten, auf welche sich das Umwandlungsverhältnis bezieht, keine Concentrationsveränderung erleidet. Das tritt ein, wenn diese Molekelart an den stattfindenden Reactionen nicht oder lediglich als Katalysator betheiligt ist (z. B. $n_1=\alpha_1$, $o_1=\beta_1$ u. s. w.) oder wenn jene Reactionen, welche einzeln ihre Concentration ändern, gemäß Abschnitt V zusammen die Concentrationsänderung Null geben.

(Bei hylotropen Gruppen tritt das Nullwerden der gesammten Concentrationsänderung entweder nach Abschnitt V ein oder durch Erfüllung von Bedingungen der Form $\frac{n_1-\alpha_1}{\nu_1}+$ $+\frac{n_{m+1}-\alpha_{m+1}}{\nu_{m+1}}=0$. Letztere Bedingung ist für eine Reaction nicht bloß dann erfüllt, wenn die Molekelarten M_1 und M_{m+1} lediglich als Katalysatoren wirken, sondern auch bei Reactionsgleichungen von der Form

$$n_1 M_1 + n_{m+1} M_{m+1} + X \rightarrow \alpha_1 M_1 + \\ + \left(\frac{\nu_{m+1}(n_1 - \alpha_1)}{\nu_1} + n_{m+1} \right) M_{m+1} + Y.$$

Beispiel: $M_1 + X \rightarrow M_{m+1} + Y$, wenn $\nu_1 = \nu_{m+1}$. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass diese Reaction die Concentration der hylotropen Gruppe nicht ändert.)

Ein $\frac{d\xi}{dt}$ kann unendlich werden, wenn Reactionen vorhanden sind, welche die Concentration des betreffenden Stoffes vermindern und mit sehr großer Geschwindigkeit verlaufen. Dann tritt der Stoff überhaupt nicht auf, da er sofort weiter umgewandelt wird.

Verlaufen mehrere Reactionen mit sehr großer Geschwindigkeit, welche theils die Molekelart erzeugen, theils verbrauchen (wie bei elektrolytischen Dissociationen), so braucht $\frac{d\xi}{dt}$ selbstverständlich nicht ∞ zu werden.

Die Umwandlungsverhältnisse $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ sind ohne Interesse.

§. 55. Ein *endliches*, von der Zeit unabhängiges Verhältnis ergibt sich, wenn aus Gleichung 23) alle Functionen der Zeit herausfallen. Die in der Gleichung vorkommenden Zeitfunctionen sind die Geschwindigkeiten der nebeneinander verlaufenden Reactionen.

§. 56. Reactionen, welche die **Concentrationen** der Stoffe M_1 und M_2 **nicht ändern**, haben auf das Umwandlungsverhältnis dieser Stoffe keinen Einfluss.

Damit eine einzelne Reaction aus der Gleichung 23) herausfällt, ist nothwendig, dass ihre Geschwindigkeit im Zähler und Nenner mit Null multipliciert ist. $\frac{dx}{dt}$ fällt heraus, wenn $n_1 - \alpha_1 = n_2 - \alpha_2 = 0$. Dann sind sowohl M_1, als M_2 bei dieser Reaction nur Katalysatoren. (Bezüglich der Abänderung dieser zwei Bedingungen bei hylotropen Gruppen gilt dasselbe wie in §. 54.)

Es können aber auch Gruppen von Reactionen aus Gleichung 23) herausfallen, wenn sie die Concentrationen beider Stoffe (M_1 und M_2) gemäß Abschnitt V unverändert

lassen. Es muss also zwischen diesen Reactionen ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis bestehen und außerdem müssen zwei Gleichungen von der Form der Gleichung 18) erfüllt sein.

Ein einfaches Beispiel sind die Reactionen

$$M_1+M_3 \rightarrow M_2+M_4 \quad \text{und} \quad M_2+M_3 \rightarrow M_1+M_5$$

für $k_1A_1 = k_2A_2$. Unter dieser Bedingung lassen die beiden Reactionen die Concentrationen von M_1 und M_2 unverändert. Denn Gleichung 18) ergibt sowohl für die Unveränderlichkeit der Concentration von M_1, als auch für die von M_2 diese Bedingung; die Constanz des Geschwindigkeitsverhältnisses der beiden Reactionen tritt aber bei unveränderlicher Concentration von M_1 und M_2 nach §. 20 ein, da der einzige, auf den linken Seiten der Reactionsgleichungen auftretende Stoff von veränderlicher Concentration (M_3) in beiden Gleichungen denselben Coefficienten hat. Durch Integration der Geschwindigkeitsgleichungen überzeugt man sich leicht, dass in diesem Falle $x = y$ und demgemäß die Concentrationen von M_1 und M_2 unveränderlich sind. Diese beiden Reactionen kommen also bei $k_1A_1 = k_2A_2$ nicht in Betracht, wenn noch andere Reactionen die Concentrationen von M_1 und M_2 verändern und die Constanz des Umwandlungsverhältnisses für diese Molekelarten untersucht werden soll.

Man sieht, dass Reactionen, welche aus Gleichung 23) herausfallen, auch in Gleichung 24) verschwinden, also den Zahlenwert eines constanten Umwandlungsverhältnisses nicht beeinflussen.

§. 57. Wenn alle stattfindenden Reactionen unter §. 56 fallen, so ist die Concentration von M_1 und M_2 unveränderlich und das Umwandlungsverhältnis ist $\frac{0}{0}$. Von Interesse sind nur bestimmte und endliche Umwandlungsverhältnisse. Solche können nur auftreten, wenn nach Weglassung der dem §. 56 entsprechenden Reactionen noch andere übrig bleiben. Die Zahl der übrig bleibenden Reactionen kann **eins** oder **größer** sein.

§. 58. Bleibt nur **eine** Reaction übrig, so gehen Gleichung 23) und 24) über in $\frac{d\xi_1}{dt}:\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{n_1-\alpha_1}{n_2-\alpha_2} = C$. Das Umwandlungs-

verhältnis ist dann unter allen Umständen constant. (Das gilt auch für hylotrope Gruppen; nur ist die Form von C nach §. 53 eine andere.) Dieses Ergebnis ist selbstverständlich. Denn wenn die Mengen zweier Stoffe durch eine einzige Reaction verändert werden, stehen die umgewandelten Mengen in einem stöchiometrischen, durch die Reactionsgleichung angegebenen Verhältnisse.

§. 59. Bleibt nach Weglassung der unter §. 56 fallenden Reactionen **mehr als eine** Reaction übrig, so kann Gleichung 23) auf ***zwei Arten*** befriedigt werden: 1. wenn jedes Glied im Zähler und Nenner durch Division mit $\frac{dx}{dt}$ constant wird; 2. wenn Zähler und Nenner die Form besitzen

$$\left(\frac{dx}{dt} + \mu_2 \frac{dy}{dt} + \ldots\right) \times \text{Const.},$$

wo μ_2 u. s. w. im Zähler und Nenner dieselben Werte haben.

Sind mehr als zwei Reactionen zu berücksichtigen, so sind auch Lösungen denkbar, welche unter keine der beiden Arten fallen.

§. 60. Die im vorigen Paragraphen erwähnte **erste** Art, die Gleichung 23) zu befriedigen, führt auf

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = K_1, \quad \frac{dx}{dt} : \frac{dz}{dt} = K_2 \text{ u. s. w.,}$$

wo $K_1, K_2 \ldots$ Constante sind. Unter welchen Umständen diese Bedingungen erfüllt sind, ist in Abschnitt IV besprochen worden.

Man kommt also zu folgendem Satze: Ein constantes Umwandlungsverhältnis zwischen zwei Stoffen tritt auf, wenn zwischen sämmtlichen Reactionen, welche nicht einzeln oder gruppenweise die Concentration beider Stoffe unverändert lassen, constante Geschwindigkeitsverhältnisse bestehen.

Wenn daher die Geschwindigkeitsverhältnisse zweier oder mehrerer neben einander verlaufender Reactionen von der Zeit unabhängig sind, so sind auch die Umwandlungsverhältnisse aller jener Stoffe von der Zeit unabhängig, deren Concentrationsänderungen lediglich von den Reactionen mit constanten Geschwindigkeitsverhältnissen abhängen.

Die in den §. 20 bis 37 gegebenen Beispiele von Reactionspaaren mit constantem Geschwindigkeitsverhältnisse sind daher sämmtlich zugleich auch Beispiele für constante Umwandlungsverhältnisse zwischen allen in ihnen vorkommenden Molekelarten, wenn daneben keine anderen auf diese Molekelarten bezüglichen Reactionen stattfinden.

Bei jenen Reactionspaaren, welche ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis infolge Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen haben (§. 20 bis 26), wird das constante Umwandlungsverhältnis zwischen zwei Molekelarten in keiner Weise gestört durch andere daneben verlaufende Reactionen, wenn letztere in ihrer Gesammtheit auf die Concentrationsänderungen der beiden Molekelarten ohne Einfluss sind (§. 56), da das constante Geschwindigkeitsverhältnis hiedurch nicht berührt wird.

Beispiel: Finden nur die Reactionen $M_1+M_2 \rightarrow M_3$ und $M_1+M_2 \rightarrow M_4$ statt, so treten zwischen allen vier Stoffen constante Umwandlungsverhältnisse auf. Das Hinzutreten der Reaction $M_2 \rightarrow M_5$ stört zwar die constanten Umwandlungsverhältnisse, an denen M_2 betheiligt ist, aber nicht jene zwischen M_1, M_3 und M_4.

Wenn dagegen die Constanz des Geschwindigkeitsverhältnisses gemäß §. 37 eintritt, sind weitere daneben verlaufende Reactionen nur dann ohne Einfluss, wenn sie auf die Concentrationsänderungen sämmtlicher auf den linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen des betrachteten Reactionspaares vorkommenden Molekelarten ohne Einfluss sind; anderenfalls ändern sich die Bedingungen für das constante Geschwindigkeitsverhältnis (§. 38) und demgemäß auch die Bedingungen für das constante Umwandlungsverhältnis.

§. 61. Der Wert des constanten Umwandlungsverhältnisses ist durch Gleichung 24) (§. 52) gegeben. Man sieht, dass er im allgemeinen von den Anfangsconcentrationen abhängt.

Das Umwandlungsverhältnis ist jedoch von den Anfangsconcentrationen unabhängig, wenn es dadurch constant wird, dass die Geschwindigkeitsverhältnisse zwischen jenen Reactionen, welche weder die Concentrationen der beiden Molekelarten (einzeln oder gruppenweise) unverändert lassen

und daher das Umwandlungsverhältnis überhaupt nicht beeinflussen (§. 56), noch die Anfangsgeschwindigkeit Null haben und daher in der Gleichung 24) überhaupt nicht auftreten, infolge Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen (§. 20) constant werden.

Dann ist $n_1 = o_1 = p_1 = \ldots$ und $n_2 = o_2 = p_2 = \ldots$ Zähler und Nenner lassen sich durch $A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots$ dividieren und man erhält

$$C = \frac{(n_1 - \alpha_1)k_1 + (n_1 - \beta_1)k_2 + \ldots}{(n_2 - \alpha_2)k_1 + (n_2 - \beta_2)k_2 + \ldots} \qquad 25)$$

(Handelt es sich um hylotrope Gruppen, so treten wieder die in §. 53 erwähnten Coefficienten auf.)

Besteht Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen nur hinsichtlich der Stoffe von veränderlicher Concentration, nicht aber hinsichtlich daneben vorhandener Molekelarten von constanter Concentration, so tritt ebenfalls ein constantes Umwandlungsverhältnis auf, welches jedoch von den constanten Concentrationen abhängt.

Ist für eine einzelne Molekelart die Bedingung $n_1 = o_1 = = p_1 = \ldots$ erfüllt, so fällt ihre Anfangsconcentration aus Gleichung 24) heraus.

Hat man daher ein constantes Umwandlungsverhältnis beobachtet, welches nicht stöchiometrischer Art ist (§. 58, 62), so kann man durch Abänderung der Anfangsconcentrationen einzelner Molekelarten ermitteln, ob diese Molekelarten auf den linken Seiten jener vollständigen Reactionsgleichungen, welche weder die Anfangsgeschwindigkeit Null haben, noch die Concentrationen der Molekelarten mit constantem Umwandlungsverhältnisse unverändert lassen, mit gleichen Coefficienten vorkommen oder nicht. Durch derartige Ermittlungen kann die Verwertung eines constanten Umwandlungsverhältnisses für die Feststellung der Natur der stattfindenden Reactionen sehr erleichtert werden. Ein von sämmtlichen Anfangsconcentrationen und der Zeit unabhängiges Umwandlungsverhältnis zwischen zwei Molekelarten, welches nicht ein stöchiometrisches

ist, beweist die Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen aller Reactionen, welche die Mengen der zwei Molekelarten verändern und nicht die Anfangsgeschwindigkeit Null haben. Als Reactionen, welche die Concentrationen nicht ändern, sind auch solche zu betrachten, bei denen die entsprechenden Concentrationsänderungen sich gruppenweise aufheben. Die Anfangsgeschwindigkeit Null haben Reactionen, zu deren Eintritt die Gegenwart von Stoffen erforderlich ist, welche am Anfange nicht da sind, sondern erst während der Reaction gebildet werden. (Solche Reactionen können nicht nach §. 60, wohl aber nach §. 68 mit dem constanten Umwandlungsverhältnisse verträglich sein.)

Eine Einschränkung erleidet der besprochene Schluss von dem von den Anfangsconcentrationen unabhängigen Umwandlungsverhältnisse auf die Form der Reactionsgleichungen nur für Molekelarten, die mit anderen in einem sehr rasch sich einstellenden Gleichgewichte stehen. Nach §. 6*a* und 26*a* kann in diesem Falle die eine hylotrope Gruppe durch die andere ersetzt werden, ohne dass das constante Umwandlungsverhältnis gestört wird.

§. 62. Es soll nunmehr die **zweite** im §. 59 erwähnte Möglichkeit für das Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses erörtert werden.

Enthalten Zähler und Nenner des Bruches in Gleichung 23) den Factor $\left(\frac{dx}{dt}+\mu_2\frac{dy}{dt}+\mu_3\frac{dz}{dt}+\ldots\right)$ multipliciert mit constanten Größen, so hat man

$$\frac{d\xi_1}{dt}:\frac{d\xi_2}{dt}=\frac{K_1\frac{dx}{dt}+K_1\mu_2\frac{dy}{dt}+K_1\mu_3\frac{dz}{dt}+\ldots}{K_2\frac{dx}{dt}+K_2\mu_2\frac{dy}{dt}+K_2\mu_3\frac{dz}{dt}+\ldots}=$$

$$=\frac{K_1}{K_2}=C. \qquad 26)$$

Da die Gleichung 23) allgemein giltig ist, ist Gleichung 26) nur möglich, wenn folgende Gleichungen gelten

$$K_1 = n_1 - \alpha_1 = \frac{o_1 - \beta_1}{\mu_2} = \frac{p_1 - \gamma_1}{\mu_3} = \ldots$$

$$K_2 = n_2 - \alpha_2 = \frac{o_2 - \beta_2}{\mu_2} = \frac{p_2 - \gamma_2}{\mu_3} = \ldots$$

Daraus folgt

$$C = \frac{K_1}{K_2} = \frac{n_1 - \alpha_1}{n_2 - \alpha_2} = \frac{o_1 - \beta_1}{o_2 - \beta_2} = \frac{p_1 - \gamma_1}{p_2 - \gamma_2} = \ldots \quad 27)$$

Nun bedeutet $n_1 - \alpha_1$ die Anzahl der nach der Reactionsgleichung I verschwindenden Molekeln von M_1, wobei gebildete Molekeln als negativ verschwindende zu betrachten sind. Die gleiche Bedeutung hat $o_1 - \beta_1$ hinsichtlich des Stoffes M_1 und der Reaction II, $n_2 - \alpha_2$ hinsichtlich des Stoffes M_2 und der Reaction I u. s. w.

Die Gleichung 27) sagt also: Ein constantes Umwandlungsverhältnis zwischen den Molekelarten M_1 und M_2 tritt auf, wenn beide Molekelarten durch sämmtliche Reactionen, welche ihre Concentrationen nicht (einzeln oder gruppenweise) unverändert lassen, in demselben stöchiometrischen Verhältnisse aufgebraucht oder gebildet werden.

(Hinsichtlich hylotroper Gruppen ist wieder auf §. 53 zu verweisen.)

§. 63. Da Bildung als negativer Aufbrauch zu betrachten ist, tritt das constante Umwandlungsverhältnis auch dann auf, wenn die beiden Molekelarten bei einer Reaction gebildet, bei einer anderen in demselben stöchiometrischen Verhältnisse verbraucht werden, oder wenn bei einer Reaction der Stoff M_1 in den Stoff M_2, bei einer anderen umgekehrt M_2 in M_1 in demselben stöchiometrischen Verhältnisse umgewandelt wird.

§. 64. Da in Gleichung 26) die Reactionsgeschwindigkeiten völlig willkürlich bleiben und außerdem nur die auf die Molekelarten M_1 und M_2 bezüglichen Coefficienten der Reactionsgleichungen auftreten, können neben den Molekelarten M_1 und M_2 beliebige andere Molekelarten mit beliebigen Coefficienten in den Reactionsgleichungen auftreten, ohne dass das constante Umwandlungsverhältnis gestört wird.

§. 65. Ein Beispiel für constantes Umwandlungsverhältnis nach §. 62 bietet das Reactionspaar

$$n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_3 M_3 + \ldots \rightarrow \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \ldots$$

und

$$a(n_1 + b) M_1 + a(n_2 + c) M_2 + o_3 M_3 + \ldots \rightarrow a(\alpha_1 + b) M_1 + \\ + a(\alpha_2 + c) M_2 + \beta_3 M_3 + \ldots$$

Das Umwandlungsverhältnis ist für die Molekelarten M_1 und M_2 und nur für diese von der Zeit unabhängig, wenn nicht etwa auch die $n_3, n_4 \ldots, o_3, o_4 \ldots, \alpha_3 \ldots, \beta_3 \ldots$ der Bedingung 27) genügen. Gemäß §. 64 hindern beliebige Werte von n_3, o_3, α_3, β_3 u. s. w. die Constanz des Umwandlungsverhältnisses für M_1 und M_2 nicht.

Der erste im §. 63 erwähnte Fall liegt beispielsweise für die Molekelarten M_1 und M_2 vor bei den Reactionsgleichungen

$$M_3 \rightarrow M_1 + 2 M_2 \quad \text{und} \quad 2 M_1 + 4 M_2 \rightarrow M_5.$$

Der zweite Fall des §. 63 liegt bei allen Gegenwirkungen vor, und zwar hinsichtlich aller betheiligten Molekelarten. Das allgemeine Schema für Gegenwirkungen ist

$$\nu_1 M_1 + \ldots + \nu_m M_m \rightleftarrows \nu_{m+1} M_{m+1} + \ldots + \nu_{m+n} M_{m+n}.$$

Für jede Molekelart wird $n_a = \beta_a$, $\alpha_a = o_a$, wobei außerdem eines der beiden Coefficientenpaare Null ist. Gleichung 27) geht daher über in die Identität

$$\frac{n_a - \alpha_a}{n_b - \alpha_b} = \frac{\alpha_a - n_a}{\alpha_b - n_b}.$$

Durch das Hinzutreten weiterer Reactionen von anderer Beschaffenheit hört die Constanz des Umwandlungsverhältnisses bei allen angeführten Beispielen auf.

§. 66. Das constante Umwandlungsverhältnis nach §. 62 stellt eine rein stöchiometrische Beziehung dar, wie aus Gleichung 27) unmittelbar ersichtlich ist, und gleicht daher dem im §. 58 besprochenen Falle.

§. 67. Haben nur *zwei* Reactionen auf das Umwandlungsverhältnis Einfluss, so sind die in den §§. 60 bis 61 und 62 bis 66 besprochenen Fälle die *einzigen*, in denen das Verhältnis von der Zeit unabhängig wird.

Bei zwei Reactionen folgt nämlich aus Gleichung 23)

$$\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt} = -\frac{(o_1-\beta_1)-C(o_2-\beta_2)}{(n_1-\alpha_1)-C(n_2-\alpha_2)}.$$

Soll nun C constant sein, so muss auch das Geschwindigkeitsverhältnis constant sein (Fall des §. 60), außer wenn die rechte Seite der Gleichung den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ annimmt. Dann ist aber $C = \frac{o_1-\beta_1}{o_2-\beta_2} = \frac{n_1-\alpha_1}{n_2-\alpha_2}$, entsprechend §. 62.

Dasselbe gilt auch für Umwandlungsverhältnisse hylotroper Gruppen.

§. 68. Haben *drei oder mehr* Reactionen auf das Umwandlungsverhältnis Einfluss, so ist die Möglichkeit von constanten Umwandlungsverhältnissen, welche weder dem §. 60, noch dem §. 62 entsprechen, nicht ausgeschlossen. Einen näheren Einblick bekommt man in folgender Weise.

Aus Gleichung 22) folgt durch Differentiation als nothwendige und hinreichende Bedingung für ein constantes endliches Umwandlungsverhältnis

$$\left(\frac{d^2\xi_1}{dt^2}:\frac{d\xi_1}{dt}\right)-\left(\frac{d^2\xi_2}{dt^2}:\frac{d\xi_2}{dt}\right) = 0$$

oder

$$\frac{d\xi_2}{dt}\cdot\frac{d^2\xi_1}{dt^2}-\frac{d\xi_1}{dt}\cdot\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = 0. \qquad 28)$$

Führt man in diese Gleichung die aus den Gleichungen 2) folgenden Werte der Differentialquotienten ein, so erhält man nach gehörigem Ordnen, wobei die Glieder mit $\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$ herausfallen:

$$[(n_1-\alpha_1)(o_2-\beta_2)-(n_2-\alpha_2)(o_1-\beta_1)]\left[\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right]$$

$$+[(n_1-\alpha_1)(p_2-\gamma_2)-(n_2-\alpha_2)(p_1-\gamma_1)]\left[\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \quad 29)$$

Die linke Seite dieser Gleichung enthält so viele Summanden, als man Reactionspaare bilden kann, also bei n Reactionen $\frac{n(n-1)}{2}$ Glieder. Auch diese Gleichung ist eine nothwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses zwischen den Molekelarten M_1 und M_2.

§. 69. Gleichung 29) kann erstens dadurch befriedigt werden, dass jeder einzelne Summand Null wird. Letzteres kann geschehen, indem entweder alle Factoren von der Form $[(n_1-\alpha_1)(o_2-\beta_2)-(n_2-\alpha_2)(o_1-\beta_1)]$ oder alle Factoren von der Form $\left[\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right]$ Null werden. Der erste Fall entspricht dem §. 62, der zweite dem §. 60, da aus

$$\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

folgt

$$\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt}=\text{Const.}$$

Das Nullwerden der einzelnen Summanden erfordert die Erfüllung von $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen, die aber nicht voneinander unabhängig sind, sondern aus den $n-1$ Gleichungen folgen, die sich nach §. 60 oder 62 ergeben.

§. 70. Es ist nicht möglich, die Gleichung 29) in der Weise zu befriedigen, dass ein Theil der Summanden ausschließlich nach §. 60, der Rest ausschließlich nach §. 62 Null wird; vielmehr muss entweder §. 60 oder §. 62 für alle Reactionen zutreffen.

Um das einzusehen, denke man sich aus den stattfindenden Reactionen vier herausgegriffen, etwa die Reactionen I, II, III und IV. Für das Reactionspaar I, II sei nur die Bedingung des §. 60, für III, IV nur die Bedingung des §. 62 erfüllt. Eine der beiden Bedingungen muss aber auch für die Reactionspaare I, III, I, IV, II, III und II, IV erfüllt sein. Nimmt man an, dass für I, III der Fall des §. 60 eintrete, so folgt dasselbe für II, III. Dann muss noch für I, IV und II, IV eine Annahme gemacht werden. Nimmt man auch für I, IV den Fall des §. 60 an, so folgt das Gleiche für II, IV. Es entsprechen also dann alle Reactionspaare dem Falle des §. 60. Nimmt man für I, IV den Fall des §. 62 an, so trifft das auch für I, III zu. Außerdem muss noch für II, IV eine Annahme gemacht werden. Je nachdem man die eine oder die andere der beiden möglichen Annahmen macht, entsprechen dann alle sechs Reactionspaare entweder dem Falle des §. 60 oder 62.

Da die vier Reactionen beliebig gewählt werden können und mit den übrigen Reactionen ebenfalls durch Bedingungen verknüpft sein müssen, gilt also allgemein, dass alle Reactionen entweder dem §. 60 oder dem §. 62 entsprechen müssen. Daneben können einige Reactionen außerdem noch dem zweiten Falle entsprechen.

§. 71. Die Gleichung 29) kann möglicherweise auch befriedigt werden, ohne dass alle einzelnen Summanden Null werden. Da die Gleichung für jedes t gelten muss, muss sie auch für $t = 0$ gelten. Man bekommt daher durch Einsetzen der betreffenden Werte eine allgemein giltige und nothwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses.

Zu diesem Zwecke sind zunächst die Werte von $\frac{d^2 x}{dt^2}$ u. s. w. zu bilden. Man erhält durch Differentiation der Gleichungen 3)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt}\left[\frac{n_1}{A_1 - \xi_1} \cdot \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{n_2}{A_2 - \xi_2} \cdot \frac{d\xi_2}{dt} + \dots\right]$$

und hieraus durch Einführung der Werte für $\frac{d\xi_1}{dt}$ u. s. w.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt}\left\{\left[\frac{n_1(n_1-\alpha_1)}{A_1-\xi_1}+\frac{n_2(n_2-\alpha_2)}{A_2-\xi_2}+\ldots\right]\frac{dx}{dt}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{n_1(o_1-\beta_1)}{A_1-\xi_1}+\frac{n_2(o_2-\beta_2)}{A_2-\xi_2}+\ldots\right]\frac{dy}{dt}+\ldots\right\}.$$

Für $t=0$ hat man

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} =$$

$$= -k_1A_1^{n_1}A_2^{n_2}\ldots\left\{\left[\frac{n_1(n_1-\alpha_1)}{A_1}+\frac{n_2(n_2-\alpha_2)}{A_2}+\ldots\right]k_1A_1^{n_1}A_2^{n_2}\ldots+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{n_1(o_1-\beta_1)}{A_1}+\frac{n_2(o_2-\beta_2)}{A_2}+\ldots\right]k_2A_1^{o_1}A_2^{o_2}\ldots+\ldots\right\}.$$

Analog ist

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{t=0} =$$

$$= -k_2A_1^{o_1}A_2^{o_2}\ldots\left\{\left[\frac{o_1(n_1-\alpha_1)}{A_1}+\frac{o_2(n_2-\alpha_2)}{A_2}+\ldots\right]k_1A_1^{n_1}A_2^{n_2}\ldots+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{o_1(o_1-\beta_1)}{A_1}+\frac{o_2(o_2-\beta_2)}{A_2}+\ldots\right]k_2A_1^{o_1}A_2^{o_2}\ldots+\ldots\right\}$$

u. s. w.

Durch Einsetzung der Werte erhält man

$$\left[\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right]_{t=0} = -k_1k_2A_1^{n_1+o_1}A_2^{n_2+o_2}\ldots$$

$$\ldots\left\{\left[\frac{(n_1-o_1)(n_1-\alpha_1)}{A_1}+\frac{(n_2-o_2)(n_2-\alpha_2)}{A_2}+\ldots\right]k_1A_1^{n_1}A_2^{n_2}\ldots+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(n_1-o_1)(o_1-\beta_1)}{A_1}+\frac{(n_2-o_2)(o_2-\beta_2)}{A_2}+\ldots\right]k_2A_1^{o_1}A_2^{o_2}\ldots+\ldots\right\}. \quad 30)$$

Ähnliche Gleichungen gelten für

$$\left[\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right]_{t=0} \text{ u. s. w.}$$

Der Ausdruck in der großen Klammer ist identisch mit dem Ausdrucke in Gleichung 13), wie es sein muss, weil es sich in beiden Fällen um die Bedingung für das Auftreten constanter Geschwindigkeitsverhältnisse handelt.

Durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichung 29) erhält man eine allerdings etwas umfangreiche Gleichung, deren Erfüllung für das Auftreten constanter Umwandlungsverhältnisse nothwendig, aber nicht hinreichend ist. Diese Gleichung kann ebenso zur Ermittlung von Formen von Reactionsgleichungen und Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitsconstanten und Anfangsconcentrationen dienen, welche zu constanten Umwandlungsverhältnissen führen, wie Gleichung 13) dasselbe für constante Geschwindigkeitsverhältnisse und Gleichung 18) für constante Concentrationen leistet.

Die durch Einführung von Gleichung 30) in Gleichung 29) erhältliche Bedingung lehrt, dass constante Umwandlungsverhältnisse, welche nicht den Bedingungen der §. 60 und 62 entsprechen, nur für bestimmte Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitsconstanten und Anfangsconcentrationen möglich sind. Jene Fälle von constanten Umwandlungsverhältnissen, welche nicht unter §. 60 oder 62 fallen, sind singuläre Fälle, welche in der Regel keine chemische Wichtigkeit haben.

Für Umwandlungsverhältnisse hylotroper Gruppen gilt dasselbe; nur ändern sich die Coefficienten der Gleichungen 29) und 30).

§. 72. **Zusammenfassend** kann man sagen: *Ein bestimmtes und endliches, von der Zeit unabhängiges Umwandlungsverhältnis zwischen zwei Stoffen tritt auf:*

1. wenn die Concentrationen der beiden Stoffe nur durch eine Reaction (§. 58) oder durch mehrere, aber im gleichen stöchiometrischen Verhältnisse geändert werden (§. 62); das Umwandlungsverhältnis ist in diesen Fällen eine rein stöchiometrische Beziehung;

2. wenn die Geschwindigkeiten sämmtlicher Reactionen, welche die Concentrationen der beiden Stoffe ändern, in einem von der Zeit unabhängigen Verhältnisse stehen (§. 60).

Außerdem sind constante Umwandlungsverhältnisse bei singulären Werten der Geschwindigkeitsconstanten und der

Anfangsconcentrationen, welche nicht unter 1 oder 2 fallen, nicht ausgeschlossen, wenn die Zahl der Reactionen, welche die Concentrationen der beiden Stoffe ändern, mindestens drei ist (§. 67 bis 71).

Als Reactionen, welche die Concentrationen der beiden Stoffe nicht ändern, sind nicht bloß jene Reactionen zu betrachten, an welchen diese Stoffe überhaupt nicht oder bloß als Katalysatoren betheiligt sind, sondern auch Reactionen, deren Wirkungen sich hinsichtlich der Concentrationen der beiden Stoffe aufheben (§. 56).

§. 73. Aus dem Vorhergegangenen ergibt sich die Abänderung, welche an dem von mir aufgestellten und im §. 50 erwähnten Satze über den Zusammenhang zwischen constanten Verhältnissen zwischen den Mengen der durch zwei Reactionen erzeugten Producte und Nebenwirkungen vorzunehmen ist. Derartige constante Verhältnisse treten auch bei Folgewirkungen oder bei Reactionen auf, die hinsichtlich der verschwindenden Stoffe völlig verschieden sind, wenn die in §. 25 und 26 erwähnten eigenthümlichen katalytischen Beeinflussungen hinzukommen, oder bei singulären Werten der Geschwindigkeitsconstanten und Anfangsconcentrationen. In letzterem Falle sind auch die Geschwindigkeitsgleichungen der beiden Reactionen nicht lediglich hinsichtlich der Constanten verschieden.

Man sieht zugleich, dass diese Abänderungen keine erhebliche Wichtigkeit gewinnen dürften.

§. 74. Als **Beispiel** soll nunmehr die **Umlagerung des Cinchonins** besprochen werden. Skraup hat in der im §. 50 citierten Abhandlung nachgewiesen, dass bei der Einwirkung von Halogenwasserstoffsäuren auf Cinchonin bei niedriger Temperatur die Mengen des gebildeten Halogenwasserstoffadditionsproductes und des daneben entstehenden α-i-Cinchonins in einem von der Zeit und der Anfangsconcentration der Säure unabhängigen Verhältnisse stehen, solange nicht die Anlagerung von Halogenwasserstoff an das α-i-Cinchonin in erheblichem Maße eintritt. Ich habe daraus in einer ebenfalls im §. 50 citierten Abhandlung den Schluss gezogen, dass die stattfindenden Reactionen den Gleichungen $Ci + HX \rightarrow C_{19}H_{23}XN_2O$ und $Ci \rightarrow Ci'$ (katalytisch beschleunigt durch Halogenwasser-

stoff) entsprechen, wo X ein Halogenatom, Ci die Cinchoninmolekel, Ci' die Molekel des α-i-Cinchonins bedeuten. Auf Grund dieser Annahme habe ich eine atomistisch-kinetische Auffassung der katalytischen Wirkung der Halogenwasserstoffsäure gegeben, welche auch auf andere katalytische Wirkungen übertragbar ist.

Hiebei war die Annahme zugrunde gelegt worden, dass aus dem constanten Umwandlungsverhältnisse auf das Vorliegen von Nebenwirkungen geschlossen werden könne. Diese Annahme bedarf, wie gezeigt, einer Abänderung. Ich will daher im folgenden die Frage, welche Reactionsgleichungen und sonstige Bedingungen mit dem Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses verträglich sind, unter Berücksichtigung der Ergebnisse dieses Abschnittes untersuchen.

§. 75. Ich nehme im folgenden an, dass die Basen nur in Form ihrer Salze mit zwei Molekeln Halogenwasserstoff, und zwar theils undissociiert, theils in Form ihrer zweiwertigen Ionen vorhanden sind.

Es sollen bedeuten:

M_1 Cinchonindichlorhydrat, undissociiert,
M_2 α-i-Cinchonindichlorhydrat, undissociiert,
M_3 Hydrochlorcinchonindichlorhydrat, undissociiert,
M_4 zweiwertige Cinchoninionen,
M_5 zweiwertige α-i-Cinchoninionen,
M_6 zweiwertige Hydrochlorcinchoninionen,
M_7 Chlorwasserstoff, undissociiert,
M_8 Wasserstoffionen,
M_9 Chlorionen.

Was für Chlorwasserstoff gilt, ist selbstverständlich ohne weiteres auf die anderen Halogene zu übertragen.

Hydrolyse kommt wegen des großen Überschusses von Halogenwasserstoff nicht in Betracht.

Zwischen diesen Molekelarten sollen zunächst beliebige Reactionen stattfinden, entsprechend den vollständigen Reactionsgleichungen

$$n_1 M_1 + n_2 M_2 + \ldots + n_9 M_9 \rightarrow \alpha_1 M_1 + \ldots + \alpha_9 M_9$$
$$o_1 M_1 + o_2 M_2 + \ldots + o_9 M_9 \rightarrow \beta_1 M_1 + \ldots + \beta_9 M_9$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§. 76. Es handelt sich hier um ein Umwandlungsverhältnis zwischen hylotropen Gruppen. Die Concentrationsänderung des Cinchonins ist gegeben durch die Summe der Concentrationsänderungen von M_1 und M_4, die des α-*i*-Cinchonins durch die von M_2 und M_5, die des Hydrochlorcinchonins durch M_3 und M_6. Die Coefficienten ν_1 und ν_{m+1} des §. 5 sind eins, da die für die Concentrationen der hylotropen Gruppen charakteristischen Molekelarten in den zu den Dissociationsgleichgewichten gehörigen Reactionsgleichungen immer mit dem Coefficienten eins auftreten. Statt der für Molekelarten giltigen Coefficienten $(n_1 - \alpha_1)$ u. s. w. treten daher im vorliegenden Falle Coefficienten von der Form $(n_1 - \alpha_1 + n_4 - \alpha_4)$ u. s. w. auf (§. 53). Übrigens ist es wegen des Principes der Einfachheit der Reactionsgleichungen ganz unwahrscheinlich. dass für die Bildung des Hydrochlorcinchonins und α-*i*-Cinchonins Reactionsgleichungen in Betracht kommen, welche etwa zweiwertige Cinchoninionen und undissociiertes Cinchonindichlorhydrat nebeneinander enthalten.

Bezeichnet man mit $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ die **gesammten** Concentrationsabnahmen des Cinchonins, α-*i*-Cinchonins und Hydrochlorcinchonins, so geht die Gleichung 23) für das Umwandlungsverhältnis von α-*i*-Cinchonin und Hydrochlorcinchonin über in

$$\frac{d\zeta_2}{dt} : \frac{d\zeta_3}{dt} = \frac{(n_2 - \alpha_2 + n_5 - \alpha_5)\frac{dx}{dt} + (o_2 - \beta_2 + o_5 - \beta_5)\frac{dy}{dt} + \ldots}{(n_3 - \alpha_3 + n_6 - \alpha_6)\frac{dx}{dt} + (o_3 - \beta_3 + o_6 - \beta_6)\frac{dy}{dt} + \ldots} \qquad 31$$

In diese Formel treten nur jene Reactionen ein, welche α-*i*-Cinchonin oder Hydrochlorcinchonin erzeugen oder verbrauchen; die zu den Dissociationsgleichgewichten führenden Reactionen kommen in der Formel nicht vor, da sie die Concentrationen der hylotropen Gruppen nicht ändern (§. 53, 56).

§. 77. Die Gründe, warum das constante Umwandlungsverhältnis nicht als ein stöchiometrisches betrachtet werden

kann, habe ich bereits in der früheren Abhandlung auseinandergesetzt. Es fallen daher die in §. 58 und 62 besprochenen Möglichkeiten fort. Nach §. 62 ist nämlich erforderlich, dass Hydrochlorcinchonin und *α-i*-Cinchonin an jeder der in Gleichung 31) eintretenden Reactionen, und zwar im selben stöchiometrischen Verhältnisse betheiligt sind; dieses stöchiometrische Verhältnis wäre zugleich das Umwandlungsverhältnis.

Es bleiben daher nur die Fälle der §. 60 und 68 zu besprechen. Das Problem vereinfacht sich dadurch, dass die Unabhängigkeit des Umwandlungsverhältnisses von der Säureconcentration festgestellt ist. Es muss daher die Säure in allen Geschwindigkeitsgleichungen, welche Änderungen der Concentration des *α-i*-Cinchonins und Hydrochlorcinchonins hervorbringen und nicht zur Zeit Null die Geschwindigkeit Null ergeben, denselben Factor bedingen, beziehungsweise auf den linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen aller in Gleichung 31) eintretenden Reactionen, deren Anfangsgeschwindigkeit nicht Null ist, in derselben Molekelzahl vorkommen; nur kann die Concentration der dissociierten Säure durch das Product der Ionenconcentrationen entsprechend der Bedingung für das elektrolytische Gleichgewicht ersetzt werden (§. 61).

§. 78. Nach §. 60 ist zum Eintritte eines constanten Umwandlungsverhältnisses die Constanz der Geschwindigkeitsverhältnisse für alle in Gleichung 31) eintretenden Reactionen hinreichend. Diese Bedingung ist nach §. 20 erfüllt, wenn die linken Seiten der betreffenden vollständigen Reactionsgleichungen gleich sind. Nun können aber *α-i*-Cinchonin und Hydrochlorcinchonin nicht auf den linken Seiten aller Reactionsgleichungen vorkommen, weil andernfalls nur bei Anwesenheit dieser Stoffe Reaction eintreten könnte; in Wirklichkeit beginnt sie aber in Abwesenheit dieser Stoffe. Cinchonin und Chlorwasserstoff müssen dagegen auf den linken Seiten der Reactionsgleichungen vorkommen, da sie zum Eintreten der Reaction nothwendig sind. Man kommt daher nach §. 20 zu den Reactionsgleichungen $Ci + HCl \rightarrow C_{19}H_{23}ClN_2O$ und $Ci + HCl \rightarrow Ci' + HCl$, welche ich bereits früher als den Thatsachen entsprechend bezeichnet habe. Daneben können noch andere Katalysatoren

angenommen werden, aber nur in gleicher Weise für beide Reactionen.

§. 79. Es könnten aber auch constante Geschwindigkeitsverhältnisse nach §. 27 in Frage kommen. Da hiebei alle stattfindenden Reactionen zu berücksichtigen sind, empfiehlt es sich, entsprechend §. 38*e* die aus den elektrolytischen Dissociationen folgenden Gleichgewichtsbedingungen in die Geschwindigkeitsgleichungen der langsam verlaufenden Reactionen einzuführen und die den umgeformten Geschwindigkeitsgleichungen entsprechenden **fingierten** Reactionsgleichungen der weiteren Erörterung zugrunde zu legen. Hiebei soll für die elektrolytischen Dissociationen das Massenwirkungsgesetz (beziehungsweise das Ostwald'sche Verdünnungsgesetz) angewendet werden.[1]

Nach §. 26*a* führen zunächst Reactionsgleichungen von der Form $M_1+\mathrm{HCl}\rightarrow M_3$ und $M_4+\mathrm{HCl}+2M_9\rightarrow M_3$ zu identischen Resultaten. Es genügt daher, eine der beiden Formen zu betrachten.

Das Gleiche gilt für Reactionen von der Form

$$M_1+\mathrm{HCl}\rightarrow M_3 \text{ und } M_1+\mathrm{HCl}\rightarrow M_6+2M_9.$$

Denn die Geschwindigkeitsgleichung ist für beide Reactionen wegen der Identität der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen dieselbe. Aber auch das gebildete Product ist nach beiden Gleichungen in jedem Augenblicke dasselbe. Denn innerhalb der hylotropen Gruppe des Hydrochlorcinchonins herrscht in jedem Augenblicke Gleichgewicht; die Vertheilung des Hydrochlorcinchonins auf die beiden Molekelarten M_3 und M_6 hängt nur von seiner jeweiligen Gesammtconcentration, aber nicht davon ab, ob durch eine Reaction primär undissociiertes Salz oder die dazugehörigen Ionen entstehen.

Ferner brauchen aber auch Reactionen von der Form $M_1+\mathrm{HCl}\rightarrow M_3$ und $M_4+\mathrm{HCl}\rightarrow M_6$ nicht gesondert betrachtet zu werden, wenn man die Concentration der Chlorionen als unveränderlich ansieht. Letzteres ist zulässig, weil der Halogen-

[1] Vergl. Jahn, Z. f. physikal. Chemie, *33*, 545 (1900).

wasserstoff bei den Versuchen in großem Überschusse vorhanden war. Bezeichnet man mit C_1 die jeweilige Gesammtconcentration des Cinchonins, so ist $C_1 = A_1 - \xi_1 + A_4 - \xi_4$. Ferner ist $A_1 - \xi_1 = \varkappa_1 (A_4 - \xi_4) A_9^2$, wo $\varkappa_1$ die Dissociationsconstante des Cinchonindichlorhydrates und A_9 die Concentration der Chlorionen bedeutet. Die beiden Gleichungen geben

$$A_1 - \xi_1 = C_1 \frac{\varkappa_1 A_9^2}{1 + \varkappa_1 A_9^2} \quad \text{und} \quad A_4 - \xi_4 = C_1 \frac{1}{1 + \varkappa_1 A_9^2}.$$

Man kann daher jede der beiden in Rede stehenden Reactionen sammt den dazugehörigen Dissociationsgleichgewichten ersetzt denken durch die Reaction

$$\mathrm{Ci + HCl \rightarrow C_{19} H_{23} Cl N_2 O},$$

wobei dann die Geschwindigkeitsconstanten k' oder k'' zu ersetzen sind durch die Constanten $\frac{k' \varkappa_1 A_9^2}{1 + \varkappa_1 A_9^2}$ oder $\frac{k''}{1 + \varkappa_1 A_9^2}$. Es ist zu beachten, dass diese neuen Constanten von der Concentration des Halogenwasserstoffes abhängen.

Treten beide Reactionen nebeneinander auf, so summieren sie sich zu einer einzigen.

Da es auch gleichgiltig ist, ob in der Reactionsgleichung HCl oder $\overset{+}{\mathrm{H}} + \overset{-}{\mathrm{Cl}}$ auftritt, können alle möglichen Reactionen, welche Cinchonin in Hydrochlorcinchonin überführen, sammt den dazugehörigen Dissociationsgleichgewichten ersetzt gedacht werden durch die Reaction $\mathrm{Ci + HCl \rightarrow C_{19} H_{23} Cl N_2 O}$, in deren Geschwindigkeitsgleichung nur die Gesammtconcentrationen des Cinchonins und Chlorwasserstoffes als Veränderliche eingehen.

Gleiches gilt für die anderen langsam verlaufenden Reactionen. Welche Annahmen man auch über die betheiligten Molekeln machen mag, immer können sie sammt den Dissociationsgleichgewichten ersetzt werden durch Reactionen, in deren Geschwindigkeitsgleichungen nur die Concentrationen der hylotropen Gruppen, aber nicht die der Molekelarten auftreten.

§. 80. Man kann sich daher sämmtliche in dem System vorkommenden Reactionen ersetzt denken durch fünf Reactionen, deren gewöhnliche Reactionsgleichungen sind:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & Ci + HCl & \rightarrow C_{19}H_{23}ClN_2O \\
\text{II.} & Ci & \rightarrow Ci' \\
\text{III.} & C_{19}H_{23}ClN_2O & \rightarrow Ci' + HCl \\
\text{IV.} & C_{19}H_{23}ClN_2O & \rightarrow Ci + HCl \\
\text{V.} & Ci' & \rightarrow Ci.
\end{array}$$

Die Reaction $Ci' + HCl \rightarrow C_{19}H_{23}ClN_2O$ kommt nicht in Betracht. Denn aus den Versuchen geht hervor, dass das Umwandlungsverhältnis aufhört constant zu sein, wenn diese Reaction in erheblichem Maße eintritt.

Hält man katalytische Wirkungen der Cinchoninbasen für ausgeschlossen, so kann man über die Form der dazugehörigen vollständigen Reactionsgleichungen Folgendes sagen.

Da die linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen, deren Anfangsgeschwindigkeit nicht Null ist, hinsichtlich des Chlorwasserstoffes identisch sein müssen, muss bei der Reaction II auf beiden Seiten HCl (als Katalysator) hinzugefügt werden. Es steht nichts im Wege, außerdem in allen fünf Gleichungen noch weitere HCl-Molekeln oder Wasserstoff- oder Chlorionen als Katalysatoren hinzuzufügen; jedoch muss dies bei den Reactionen I und II in gleicher Weise geschehen. Hiedurch würde an den folgenden Auseinandersetzungen nichts geändert werden, da wegen des großen Überschusses des Halogenwasserstoffes die Concentrationen der undissociierten Chlorwasserstoffmolekeln, sowie der Chlor- und Wasserstoffionen als constant betrachtet werden können. Die auf diese Molekelarten bezüglichen Factoren in den Geschwindigkeitsgleichungen vereinigen sich mit den Geschwindigkeitsconstanten.

§. 81. Im folgenden werden die Anfangsconcentrationen des Cinchonins, α-i-Cinchonins und Hydrochlorcinchonins mit A_1, A_2, A_3, die Concentrationsabnahmen dieser Stoffe mit $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, die Geschwindigkeiten der fünf Reactionen mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ bezeichnet. A_2 und A_3 sind Null.

Für das Umwandlungsverhältnis zwischen α-i-Cinchonin und Hydrochlorcinchonin hat man

$$\frac{d\zeta_2}{dt} : \frac{d\zeta_3}{dt} = \frac{-\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + \frac{dv}{dt}}{-\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dt} + \frac{du}{dt}}.$$

§. 82. Die Frage, ob zwischen den fünf fingierten Reactionen des §. 80 constante Geschwindigkeitsverhältnisse möglich sind, lässt sich nunmehr leicht erledigen.

Das Reactionspaar I, II hat ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis wegen der Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen. Wenn außerdem die Reactionspaare I, III, I, IV, und II, V constante Geschwindigkeitsverhältnisse aufweisen würden, so würden zwischen allen Reactionen constante Geschwindigkeitsverhältnisse bestehen.

Für das Reactionspaar I, IV gibt Gleichung 13) als nothwendige Bedingung

$$0 = k_1 A_1(A_1 + A_3) + (k_2 - k_3) A_1 A_3 - k_4 A_3 (A_1 + A_3) - k_5 A_2 A_3$$

Für $A_2 = A_3 = 0$ bleibt $0 = k_1 A_1^2$ oder $k_1 = 0$. Das ist aber im vorliegenden Falle nicht möglich, da die Reaction I die einzige ist, bei welcher Hydrochlorcinchonin gebildet wird, und da dieser Körper thatsächlich entsteht. Daher ist die Reaction IV ausgeschlossen, wenn das constante Umwandlungsverhältnis auf constanten Geschwindigkeitsverhältnissen beruhen soll.

Es bleiben daher die Reactionen I, II, III und V möglich. Für das Reactionspaar I, III gibt aber die Gleichung 13) ebenfalls die Bedingung $k_1 = 0$. Daher ist auch die Reaction III ausgeschlossen.

Es bleiben nur noch die Reactionen I, II und V. Damit zwischen den Reactionen II und V ein constantes Geschwindigkeitsverhältnis bestehen kann, ist nach Gleichung 13) nöthig, dass $k_2 = 0$. Dann bleibt keine Reaction übrig, bei der α-i-Cinchonin gebildet wird.

Wenn daher das constante Umwandlungsverhältnis auf constanten Geschwindigkeitsverhältnissen beruhen soll, können nur die Reactionen I und II stattfinden. §. 27 gibt daher keine neuen Bedingungen für das Auftreten des constanten Umwandlungsverhältnisses.

§. 83. Dagegen kann das Umwandlungsverhältnis zwischen α-*i*-Cinchonin und Hydrochlorcinchonin nach §. 68 constant werden. Bei der Untersuchung dieses Falles sollen wieder die fingierten Reactionsgleichungen des §. 80 zugrunde gelegt werden.

Aus den fünf Reactionsgleichungen können zehn Reactionspaare gebildet werden, welche in Gleichung 29) ebenso viele Glieder geben. Doch werden die auf die Reactionspaare I, II und III, IV bezüglichen Glieder wegen Erfüllung der Gleichung 13) Null. Ferner fallen die Paare von Gegenwirkungen (I, IV und II, V) heraus, weil die Coefficienten von der Form

$$[(n_1-\alpha_1)(o_2-\beta_2)-(n_2-\alpha_2)(o_1-\beta_1)]$$

Null werden.

Nach Einführung von $A_2 = A_3 = 0$ erhält man als nothwendige Bedingung für das Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses

$$k_5 = \frac{1}{k_2}(k_1 k_3 + k_2 k_3 + k_2 k_4). \qquad 32)$$

Man sieht wohl, dass der Fall des §. 78 ($k_3 = k_4 = k_5 = 0$) hierin inbegriffen ist.

Die Bedingung 32) ist aber für das Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses zwischen α-*i*-Cinchonin und Hydrochlorcinchonin nicht bloß nothwendig, sondern auch hinreichend, wie die Integration der Geschwindigkeitsgleichungen ergibt.

§. 84. Da fünf Reactionen, aber nur drei Stoffe von veränderlicher Concentration vorkommen, empfiehlt es sich, der Integration nicht die Gleichungen für

$\frac{dx}{dt}$ u. s. w., sondern die Gleichungen für $\frac{d\zeta_1}{dt}$ u. s. w. zugrunde zu legen.

Für $A_2 = A_3 = 0$ ist

$$\frac{dx}{dt} = k_1(A_1-\zeta_1), \qquad \frac{dy}{dt} = k_2(A_1-\zeta_1), \qquad \frac{dz}{dt} = -k_3\zeta_3,$$

$$\frac{du}{dt} = -k_4 \zeta_3, \quad \frac{dv}{dt} = -k_5 \zeta_2.$$

Daraus folgt (Gleichung 2), §. 4)

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = (k_1 + k_2)(A_1 - \zeta_1) + k_4 \zeta_3 + k_5 \zeta_2$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = -k_2 (A_1 - \zeta_1) + k_3 \zeta_3 - k_5 \zeta_2$$

$$\frac{d\zeta_3}{dt} = -k_1 (A_1 - \zeta_1) - (k_3 + k_4) \zeta_3$$

und wegen

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -\left(\frac{d\zeta_2}{dt} + \frac{d\zeta_3}{dt}\right), \quad \zeta_1 = -(\zeta_2 + \zeta_3)$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = -k_2 A_1 - (k_2 + k_5)\zeta_2 + (k_3 - k_2)\zeta_3$$

$$\frac{d\zeta_3}{dt} = -k_1 A_1 - k_1 \zeta_2 - (k_1 + k_3 + k_4)\zeta_3.$$

Setzt man

$$\Sigma k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5$$

$$K = (k_2 + k_5)(k_1 + k_3 + k_4) + k_1 (k_3 - k_2)$$

$$\vartheta' = \frac{\Sigma k}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Sigma k}{2}\right)^2 - K}$$

$$\vartheta'' = \frac{\Sigma k}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Sigma k}{2}\right)^2 - K}$$

$$\lambda' = \frac{k_3 - k_2}{k_1 + k_3 + k_4 - \vartheta'}$$

$$\lambda'' = \frac{k_3 - k_2}{k_1 + k_3 + k_4 - \vartheta''}$$

so wird

$$\zeta_2 = \frac{A_1}{\lambda' - \lambda''} \left\{ -\frac{\lambda''(k_1\lambda' + k_2)}{\vartheta'}(e^{-\vartheta' t} - 1) + \frac{\lambda'(k_1\lambda'' + k_2)}{\vartheta''}(e^{-\vartheta'' t} - 1) \right\}$$

$$\zeta_3 = \frac{A_1}{\lambda' - \lambda''} \left\{ \frac{k_1\lambda' + k_2}{\vartheta'}(e^{-\vartheta' t} - 1) - \frac{k_1\lambda'' + k_2}{\vartheta''}(e^{-\vartheta'' t} - 1) \right\}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = \frac{A_1}{\lambda' - \lambda''} \{\lambda''(k_1\lambda' + k_2)e^{-\vartheta' t} - \lambda'(k_1\lambda'' + k_2)e^{-\vartheta'' t}\}$$

$$\frac{d\zeta_3}{dt} = \frac{A_1}{\lambda' - \lambda''} \{-(k_1\lambda' + k_2)e^{-\vartheta' t} + (k_1\lambda'' + k_2)e^{-\vartheta'' t}\}$$

und

$$\frac{d\zeta_2}{dt} : \frac{d\zeta_3}{dt} = \frac{\lambda''(k_1\lambda' + k_2) - \lambda'(k_1\lambda'' + k_2)e^{(\vartheta' - \vartheta'')t}}{-(k_1\lambda' + k_2) + (k_1\lambda'' + k_2)e^{(\vartheta' - \vartheta'')t}}$$

$$= \frac{-[k_1k_3 + k_2(k_3 + k_4 - \vartheta')] + [k_1k_3 + k_2(k_3 + k_4 - \vartheta'')]e^{2t\sqrt{\left(\frac{\Sigma k}{2}\right)^2 - K}}}{k_1\left[(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - \vartheta'') - (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - \vartheta')e^{2t\sqrt{\left(\frac{\Sigma k}{2}\right)^2 - K}}\right]}. \quad 33)$$

Dieser Ausdruck wird constant für $k_1\lambda' + k_2 = 0$ oder für $k_1\lambda'' + k_2 = 0$. Setzt man die Werte von λ' und λ'' ein und rechnet k_5 aus, so findet man in beiden Fällen

$$k_5 = \frac{1}{k_2}(k_1k_3 + k_2k_3 + k_2k_4).$$

Das stimmt mit Gleichung 32) überein, welche also nicht bloß die nothwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung für das Auftreten eines constanten Umwandlungsverhältnisses ist. In diesem Falle stehen die Reactionen III bis V untereinander (aber nicht mit I und II) in einem constanten Geschwindigkeitsverhältnisse. In der That liefert auch Gleichung 13) dieselbe Bedingung für die Constanz des Geschwindigkeitsverhältnisses zwischen den Reactionen III und V, wenn man berücksichtigt, dass $A_3 = \frac{k_1}{k_2} A_2$ ist.

Bei oberflächlicher Betrachtung der Gleichung für $\frac{d\zeta_2}{dt}:\frac{d\zeta_3}{dt}$ könnte man glauben, dass das Umwandlungsverhältnis auch für $\vartheta' = \vartheta''$ constant wird. Aber dann wird auch $\lambda' = \lambda''$ und $\frac{d\zeta_2}{dt}:\frac{d\zeta_3}{dt} = \frac{0}{0}$. Die Auswertung dieses Ausdruckes (etwa indem man Zähler und Nenner nach k_5 differenziert) gibt

$$\frac{d\zeta_2}{dt}:\frac{d\zeta_3}{dt} = \frac{k_2\lambda + (k_3 - k_2)(k_1\lambda + k_2)t}{k_1\lambda - \left(k_1 + k_3 + k_4 - \frac{\Sigma k}{2}\right)(k_1\lambda + k_2)t},$$

welcher Ausdruck nur für $k_1\lambda + k_2 = 0$ constant wird.

§. 85. Führt man die Bedingung $k_5 = \frac{k_1 k_3}{k_2} + k_3 + k_4$ in Gleichung 33) ein, so erhält man wegen

$$\frac{\Sigma k}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2} + k_3 + k_4 + \frac{k_1 k_3}{2k_2}, \quad \sqrt{\left(\frac{\Sigma k}{2}\right)^2 - K} = \frac{k_1 + k_2}{2} - \frac{k_1 k_3}{2k_2},$$

$$\vartheta' = k_1 + k_2 + k_3 + k_4, \quad \vartheta'' = k_3 + k_4 + \frac{k_1 k_3}{k_2},$$

$$\lambda' = -\frac{k_3 - k_2}{k_2}, \quad \lambda'' = -\frac{k_2}{k_1}:$$

$$\frac{d\zeta_2}{d\zeta_3} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Das Umwandlungsverhältnis ist also dasselbe, als wenn nur die Reactionen I und II stattfinden würden. Das entspricht dem Umstande, dass die Reactionen III bis V die Anfangsgeschwindigkeit Null haben.

§. 86. Das experimentell gefundene Umwandlungsverhältnis, welches im folgenden mit a bezeichnet werden soll, ist von der Säureconcentration unabhängig. Es ist $a = \frac{k_2}{k_1}$. Nun sind aber k_1 und k_2 ihrer Bedeutung nach von der Säureconcentration abhängig (§. 79). Es können daher die den fingierten Reactionen I und II entsprechenden wirklichen Reactionen nicht beliebig gewählt werden.

Die k haben im allgemeinen die Form

$$k = \frac{k' \varkappa A_9^2}{1+\varkappa A_9^2} A_7^{n_7} A_8^{n_8} A_9^{n_9} + \frac{k''}{1+\varkappa A_9^2} A_7^{o_7} A_8^{o_8} A_9^{o_9}.$$

$n_7, n_8, n_9, o_7, o_8, o_9$ bedeuten die Molekelzahlen der Molekelarten M_7, M_8 und M_9 auf den linken Seiten der wirklichen (nicht der fingierten) Reactionsgleichungen.

Unabhängigkeit des $\frac{k_1}{k_2}$ von der Säureconcentration kann daher nur eintreten:

1. wenn bei den den fingierten Reactionen I und II entsprechenden wirklichen Reactionen entweder nur die Molekeln M_1 oder nur die Molekeln M_4 aufgebraucht werden und die linken Seiten der beiden vollständigen Reactionsgleichungen auch hinsichtlich des Halogenwasserstoffes identisch sind (nur Ersatz von HCl durch $\overset{+}{\mathrm{H}} + \overset{-}{\mathrm{Cl}}$ ist nach §. 6 *a* zulässig);

2. wenn den fingierten Reactionen wirkliche Reactionen entsprechen, bei denen theils M_1, theils M_4 aufgebraucht wird, und wenn außerdem $A_7^{n_7+2} A_8^{n_8+2} A_9^{n_9+2} = A_7^{o_7} A_8^{o_8} A_9^{o_9} = \ldots$ ist. Ein Beispiel für letzteren Fall ist

$$M_1 + \mathrm{HCl} \rightarrow M_3 \text{ und } M_4 + 2\overset{-}{\mathrm{Cl}} + \mathrm{HCl} \rightarrow M_2 + \mathrm{HCl}.$$

Auch

$$M_4 + 2\overset{-}{\mathrm{Cl}} + \mathrm{HCl} \rightarrow M_3, \quad M_1 + \mathrm{HCl} \rightarrow M_2 + \mathrm{HCl},$$

$$M_4 + 2\overset{-}{\mathrm{Cl}} + \mathrm{HCl} \rightarrow M_5 + 2\overset{-}{\mathrm{Cl}} + \mathrm{HCl}$$

können neben den beiden ersten Reactionen stattfinden.

Es ist daher auch im Falle des constanten Umwandlungsverhältnisses nach §. 68 für die den fingierten Reactionen I und II entsprechenden wirklichen Reactionen, deren Zahl größer als zwei sein kann, Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen (mit der dem §. 6 *a* entsprechenden Einschränkung) erforderlich.

§. 87. Außerdem besteht eine Bedingung für die Geschwindigkeitsconstanten der anderen drei fingierten Reactionen. Ersetzt man nämlich in Gleichung 32) k_2 durch ak_1, so geht sie

über in $k_5 = k_3\left(1 + \frac{1}{a}\right) + k_4$. Auch diese Gleichung muss bei wechselnden Säureconcentrationen richtig bleiben. Hiebei ist zu beachten, dass die k die im vorigen Paragraphen angegebene Form haben, also möglicherweise Summen von zwei Gliedern sein können, und dass in k_3 und k_4 $\varkappa_3$, dagegen in k_5 $\varkappa_2$ auftritt. Es ist wieder erforderlich, dass die in den Summanden von k_3, k_4 und k_5 auftretenden Säurefunctionen identisch sind; dazu gehört insbesondere auch die Gleichheit von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$. Die Gleichheit der Dissociationsconstanten der Chlorhydrate von α-i-Cinchonin und Hydrochlorcinchonin wird wohl in Wirklichkeit annähernd zutreffen.

Die Gleichung 32) ist also beispielsweise erfüllbar für die Reactionen

$$M_3 \rightarrow M_2 + \mathrm{HCl},\ M_3 \rightarrow M_1 + \mathrm{HCl},\ M_2 \rightarrow M_1,$$

zu welchen noch etwa hinzutreten können

$$M_6 + 2M_9 \rightarrow M_2 + \mathrm{HCl},\ M_6 + 2M_9 \rightarrow M_5 + 2M_9 + \mathrm{HCl} \text{ u. s. w.}$$

Dagegen können nicht neben den vorerwähnten die Reactionen $M_3 + \mathrm{HCl} \rightarrow M_2 + 2\mathrm{HCl}$ oder $M_6 \rightarrow M_5 + \mathrm{HCl}$ stattfinden. Es ist also (unter Berücksichtigung der aus §. 6a folgenden Einschränkung) Gleichheit der linken Seiten der vollständigen Reactionsgleichungen der Reactionen III bis V hinsichtlich des Chlorwasserstoffes nöthig.

§. 88. Es ist schließlich von Interesse, zu untersuchen, ob einzelne der fünf fingierten Reactionen wegbleiben können, ohne dass das constante Umwandlungsverhältnis unmöglich wird.

Dass $k_3 = k_4 = k_5 = 0$ mit dem constanten Umwandlungsverhältnisse, beziehungsweise mit Gleichung 32) verträglich ist, ist bereits erwähnt worden.

k_1 kann nicht Null werden, da sonst α-i-Cinchonin überhaupt nicht gebildet würde.

k_2 kann ebenfalls nicht Null werden; denn in diesem Falle müsste nach Gleichung 32) auch $k_3 = 0$ sein. Dann wäre aber die Bildung von α-i-Cinchonin unmöglich.

Die Reactionen I und II, also die Bildung von Hydrochlorcinchonin durch directe Anlagerung von Chlorwasserstoff an Cinchonin und die directe Umlagerung des Cinchonins in α-*i*-Cinchonin sind also für das Zustandekommen des constanten Umwandlungsverhältnisses unentbehrlich.

Dagegen kann k_3 Null werden; dann ist $k_5 = k_4$. Wenn also $k_3 = 0$ ist, so müssen die Reactionen IV und V entweder beide stattfinden oder beide ausbleiben.

Für $k_4 = 0$ wird $k_2 k_5 = (k_1 + k_2) k_3$; es müssen also in diesem Falle die Reactionen III und V beide stattfinden oder beide ausbleiben.

$k_5 = 0$ ist nicht möglich, wenn nicht gleichzeitig $k_3 = k_4 = 0$ ist. Die k sind ja wesentlich positive Größen. (Von katalytischen Verzögerungen in homogener Lösung ist bei der Betrachtung der Cinchoninumlagerung abgesehen worden.)

Neben den Reactionen I und II können daher nur die Reactionen III, IV und V oder IV und V (die beiden Gegenreactionen) oder III und V oder gar keine andere stattfinden Insbesondere kann die Reaction III, welche der Annahme entspricht, dass das Hydrochlorcinchonin bei der Bildung von α-*i*-Cinchonin aus Cinchonin als Zwischenproduct auftritt, nur stattfinden, wenn gleichzeitig directe Umlagerung von Cinchonin in α-*i*-Cinchonin und umgekehrt stattfindet.

§. 89. Als Schlussresultat ergibt sich, dass für das constante Umwandlungsverhältnis die directe Bildung von Hydrochlorcinchonin und α-*i*-Cinchonin aus Cinchonin nothwendig und maßgebend sind. Daneben können allerdings noch die beiden Gegenreactionen und die Umwandlung von Hydrochlorcinchonin in α-*i*-Cinchonin stattfinden, aber nur, wenn deren Geschwindigkeitscoefficienten in bestimmten, von der Natur des Halogens abhängigen Zahlenbeziehungen stehen. Warum diese Coefficienten unter den unzähligen möglichen Werten gerade diese bestimmten, zum constanten Umwandlungsverhältnisse führenden annehmen, bedarf eigentlich einer besonderen Erklärung, wenn man das Stattfinden dieser accessorischen Reactionen überhaupt annehmen will. Es ist daher das natürlichste, anzunehmen, dass nur die für das constante Umwandlungsverhältnis nothwendigen zwei Reactionen statt-

finden. Diese Annahme entspricht dem in der Naturforschung herrschenden Grundsatze, die einfachste Darstellung der Erscheinungen vorzuziehen, solange nicht die Thatsachen zwingen, sie aufzugeben. Demgemäß können die Schlüsse, die ich in der früher erwähnten Abhandlung über die Cinchoninumlagerung gezogen habe, bis auf weiteres vollinhaltlich aufrecht erhalten werden.

VII. Reactionsgeschwindigkeit bei veränderlichem Volum.

§. 90. Soviel mir bekannt, hat man bisher die Reactionsgeschwindigkeiten lediglich bei constantem Volum betrachtet.

Bei Reactionen in flüssigen und festen Phasen kann man das Volum in allen Fällen als constant ansehen, da die durch Reactionen hervorgebrachten Volumänderungen unbedeutend sind.

Dagegen sind bei isothermen Gasreactionen bedeutende Volumänderungen möglich. Nichtsdestoweniger sind auch bei Gasen die Reactionsgeschwindigkeiten nur bei constantem Volum betrachtet worden, entsprechend dem Umstande, dass diesbezügliche Versuche meist im geschlossenen Gefäße ausgeführt werden. Die in der Natur und in der Technik vorkommenden Gasreactionen erfolgen dagegen in der Regel nicht bei constantem Volum, sondern bei annähernd constantem Drucke; auch sind einzelne experimentelle Untersuchungen bei veränderlichem Volum ausgeführt worden. Es ist daher die Aufstellung der Gesetze für den Reactionsablauf in Systemen von veränderlichem Volum von Interesse.

§. 91. Auf das chemische Gleichgewicht hat selbsverständlich nur das Endvolum Einfluss, aber nicht die während der Einstellung des Gleichgewichtes auftretenden Volumänderungen. Dagegen wird der Reactionsablauf im allgemeinen durch Volumänderungen beeinflusst.

§. 92. Bei veränderlichem Volum kann die Änderung der Concentration in der Zeiteinheit nicht als Maß der Reactionsgeschwindigkeit betrachtet werden. Denn die Concentrationsänderung rührt nur zum Theile von der Änderung der Menge des betrachteten Stoffes infolge der Reactionen, zum Theile aber von der Volumänderung her; in einem Systeme von



veränderlichem Volum treten Concentrationsänderungen auch dann auf, wenn überhaupt keine Reaction stattfindet.

Als Maß für die Reactionsgeschwindigkeit ist daher im allgemeinen die Änderung der Menge des betrachteten Stoffes in der Zeiteinheit in einer gegebenen Masse des reagierenden Systems zu betrachten. Nur bei constantem Volum stellt die Raumeinheit zugleich eine gegebene unveränderliche Masse vor; in diesem speciellen Falle ist es gleichgiltig, ob man die Reactionsgeschwindigkeiten als Mengenänderungen in einer gegebenen Masse oder in einem gegebenen Volum (der Volumeinheit) definiert.

§. 93. Die Grundformel der chemischen Kinetik

$$\frac{dx}{dt} = k(A_1 - \xi_1)^{n_1}(A_2 - \xi_2)^{n_2} \ldots,$$

in welcher die Buchstaben wieder dieselbe Bedeutung haben wie in §. 6, bezieht sich auf constantes Volum, wie aus ihrer molecular-kinetischen Begründung unmittelbar hervorgeht.

Es sei μ die zur Zeit t im ganzen Systeme umgesetzte Menge in Grammolekeln, wobei wieder die auf einer Seite der Reactionsgleichung stehenden Stoffe wie eine Molekel gerechnet werden sollen, und V das Volum des Systemes.

Dann ist $\frac{d\mu}{dt}$ die Reactionsgeschwindigkeit.

Die Änderung von μ in den Zeittheilchen dt ist nun proportional der Zeit, der in der Volumeinheit in der Zeiteinheit eintretenden Umsetzung und dem Volum. Also $d\mu = \frac{dx}{dt} \cdot Vdt$. Die Volumänderung dV tritt in die Formel nicht ein.

Anders geschrieben:

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{d\mu}{dt} = \frac{dx}{dt}.$$

Bei Ableitung dieser Formel ist constantes Volum nicht vorausgesetzt; sie gilt also allgemein. Da $\mu = Vx$, so ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\frac{\mu}{V}}{dt}.$$

Daraus ist unmittelbar ersichtlich, dass in $\frac{dx}{dt}$ das Volum als constant zu betrachten ist.

§. 94. Bezeichnet man die im reagierenden Systeme zur Zeit t enthaltene Menge des Stoffes M_1 mit μ_1, die des Stoffes M_2 mit μ_2 u. s. w., so ist

$$A_1 - \xi_1 = \frac{\mu_1}{V}, \qquad A_2 - \xi_2 = \frac{\mu_2}{V} \text{ u. s. w.}$$

Daher nimmt die Gleichung für die Reactionsgeschwindigkeit die Form an

$$\frac{d\mu}{dt} = V\frac{dx}{dt} = \frac{k\mu_1^{n_1}\mu_2^{n_2}\ldots}{V^{n_1+n_2+\ldots-1}}. \qquad 34)$$

Diese Gleichung für die Reactionsgeschwindigkeit gilt ganz allgemein. Bei veränderlichem Volum ist das Volum als Function der jeweiligen Zusammensetzung des Systemes oder als Function der Zeit einzusetzen. Bei veränderlicher Temperatur ist auch k als Function der Temperatur und letztere als Function der Zeit einzuführen.

Man kann die Gleichung 34) selbstverständlich auch bei constantem Volum benützen; das ist in der That in einem einfachen speciellen Falle (bei der Esterbildung) bereits durch van t'Hoff[1] geschehen.

Die Geschwindigkeitsconstante ist von der Masse des reagierenden Systemes unabhängig, wie aus Gleichung 34) unmittelbar hervorgeht.

§. 95. Bei monomolecularen Reactionen ($n_1 = 1, n_2 = \ldots \ldots = 0$) fällt das Volum aus der Gleichung 34) heraus. Die Reactionsgeschwindigkeit ist also unabhängig von beliebigen während der Reaction stattfindenden Volumänderungen. Das entspricht dem bekannten Satze, dass die Reactionsgeschwindigkeit dieselbe ist, wenn die Reaction bei verschiedenen, aber während der Reactionsdauer constanten Volumen vorgenommen wird.

[1] Ber. der Deutschen chem. Ges., *10*, 671 (1877).

§. 96. Einen speciellen Fall der Reactionen bei veränderlichem Volum bilden die Gasreactionen bei constantem Drucke. Unter Voraussetzung der idealen Gasgesetze lässt sich die Gleichung 34) in folgender Weise umformen.

Das Volum einer Grammolekel ist in diesem Falle gegeben durch $\frac{RT}{p}$, wo R die Gasconstante, T die absolute Temperatur, p den (constanten) Druck bedeutet.

Es sei N die Zahl der beim Umsatze der in der Reactionsgleichung stehenden Mengen verschwindenden Grammolekel N_1 die Zahl der entstehenden Grammolekel.

Beim Umsatze der in der Reactionsgleichung stehenden Quantitäten ($\mu = 1$) vermehrt sich also das Volum um $(N_1 - N)\frac{RT}{p}$, beim Umsatze μ um $(N_1 - N)\frac{RT}{p}\mu$. Ist das Anfangsvolum (für $t = 0$, $\mu = 0$) V_0, so ist das Volum zur Zeit t gegeben durch

$$V = V_0 + (N_1 - N)\frac{RT}{p}\mu. \qquad 35)$$

Drückt man $N_1 - N$ durch die in der Reactionsgleichung auftretenden Coefficienten aus, so erhält man

$$N_1 - N = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots - (n_1 + n_2 + \ldots).$$

Die Formel für die Reactionsgeschwindigkeit in Gasen bei constantem Drucke wird daher

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{k\mu_1^{n_1}\mu_2^{n_2}\ldots}{\left[V_0 + (N_1 - N)\frac{RT}{p}\mu\right]^{n_1+n_2+\ldots-1}}. \qquad 36)$$

§. 97. Aus Gleichung 35) folgt, dass für $N_1 = N$ $V = V_0$ ist. Verlaufen Gasreactionen ohne Änderung der Molekelzahl, so ist bei constantem Drucke auch das Volum constant.

Der Verlauf der Gasreactionen bei constantem Drucke unterscheidet sich daher von dem Verlaufe bei constantem Volum nur, wenn die Reactionen mit Änderung der Molekelzahl verlaufen und außerdem nicht monomolecular sind (§. 95). Nur in diesem Falle ist daher bei constantem Drucke die

Anwendung der Gleichung 36) nothwendig. Bei monomolecularen Reactionen und bei Reactionen ohne Änderung der Molekelzahl kann auch bei constantem Drucke der Reactionsablauf nach der für constantes Volum giltigen Formel berechnet werden.

§. 98. Eine Reaction, deren Verlauf bei constantem Drucke nach Gleichung 36) berechnet werden muss, ist die Vereinigung des Knallgases zu Wasserdampf. Findet die Reaction nach der Gleichung $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ statt, so ist $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $\varkappa_3 = 2$, wenn die Indices 1, 2, 3 sich der Reihe nach auf H_2, O_2 und H_2O beziehen. Dann geht Gleichung 36) über in

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{k\mu_1^2\mu_2}{\left(V_0 - \frac{RT}{p}\mu\right)^2} = \frac{k(M_1 - 2\mu)^2(M_2 - \mu)}{\left(V_0 - \frac{RT}{p}\mu\right)^2}, \qquad 37)$$

wenn M_1 die Anfangsmenge des Wasserstoffes, M_2 die Anfangsmenge des Sauerstoffes (in Grammolekeln) bedeutet. V_0 ist $\frac{RT}{p}(M_1 + M_2)$.

Sind Wasserstoff und Sauerstoff in äquivalenten Mengen vorhanden ($M_1 = 2M_2$), so wird $V_0 = \frac{3RTM_2}{p}$ und

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_p = \frac{4kp^2}{R^2T^2} \cdot \frac{(M_2 - \mu)^3}{(3M_2 - \mu)^2}.$$

Durch Integration erhält man, wenn man gleichzeitig die umgesetzte Menge in Bruchtheilen der Anfangsmenge $\left(x = \frac{\mu}{M_2}\right)$ einführt:

$$\frac{4kp^2}{R^2T^2} = \frac{1}{t}\left\{\frac{8x - 6x^2}{(1-x)^2} - \text{lognat}\,(1-x)\right\}. \qquad 38)$$

Dagegen hat man bei constantem Volum und äquivalenten Mengen, wenn der Anfangsdruck p_0 ist

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_V = \frac{4k(M_2 - \mu)^3}{V_0^2} = \frac{4kp_0^2(M_2 - \mu)^3}{9R^2T^2M_2^2}.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\frac{4kp_0^2}{R^2T^2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{9x-4\cdot 5x^2}{(1-x)^2} .$$

Aus den Geschwindigkeitsgleichungen sieht man, dass die Reaction bei constantem Volum langsamer verläuft als bei constantem Drucke. Für $t = 0$ sind die Ausdrücke identisch. Dann aber bleibt bei constantem Volum der Nenner unverändert, während er bei constantem Drucke fortwährend sinkt. Das entspricht dem Umstande, dass bei constantem Volum der Druck fortwährend sinkt.

Der Unterschied zwischen beiden Formeln wird um so größer, je weiter die Reaction fortschreitet. Bei kleinen Umsetzungen bleiben die Unterschiede klein.

§. 99. Ausgedehnte Versuchsreihen über die Geschwindigkeit der Knallgasvereinigung bei constantem Drucke sind in einer schönen Arbeit von Bodenstein[1] enthalten. Bodenstein hat seine Versuche so berechnet, wie wenn sie bei constantem Volum verlaufen wären; die Constanz der Geschwindigkeitscoefficienten war nicht besonders befriedigend, was Bodenstein dem bei dieser Reaction bekanntlich besonders großen Einflusse der Störungen zuschrieb. Indes zeigt eine von mir vorgenommene theilweise Neuberechnung der Constanten, dass die unbefriedigende Constanz zum Theile der principiell unrichtigen Berechnung Bodensteins zur Last fällt. Es sei jedoch gleich hervorgehoben, dass die wesentlichen Resultate der Bodenstein'schen Arbeit hiedurch nicht berührt werden.

Dass die Versuche mit erheblichen Störungen behaftet sind, hebt Bodenstein mit Recht hervor; das geht direct aus den Versuchszahlen hervor. Die umgesetzte Menge wurde z. B. in derselben Versuchsreihe (Tabelle 2, Rohr I) zur Zeit 50·19 mit 0·160, dagegen zur Zeit 61·62 nur mit 0·120 gefunden.

§. 100. Erheblich bessere Constanten als die Bodenstein'sche Berechnung gibt die Formel 37, beziehungsweise 38 bei den Versuchen mit Rohr II und äquivalenten Mengen. Ich stelle

[1] Zeitschr. f. phys. Chemie, *29*, 665 (1899). Die von mir berechneten Versuche befinden sich auf S. 681, 682, 692, 694 und 696.

im folgenden die von Bodenstein und von mir berechneten Constanten zusammen.

Versuchsreihe Tabelle 1, Rohr II (482°).

Zeit	20·8	34·0	48·4	62·9	79·3	96·0
k nach Bodenstein	0·339	0·288	0·262	0·261	0·244	0·264
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	0·0418	0·0351	0·0316	0·0312	0·0288	0·0306

Bei dieser Versuchsreihe stimmen beide Formeln ungefähr gleich schlecht; bei der ersten Beobachtung stimmt sogar Formel 38) schlechter. Indes ist diese Versuchsreihe zur Prüfung des Unterschiedes der beiden Formeln wenig geeignet, da der größte erzielte Umsatz nur 23·64% betrug.

Versuchsreihe Tabelle 2, Rohr II (509°).

Zeit	8·82	19·01	31·81	46·87	63·40	77·10	100·17
k nach Bodenstein	1·06	1·18	1·23	1·27	1·48	1·25	1·36
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	0·118	0·126	0·126	0·125	0·139	0·117	0·122

Der höchste Umsatz betrug 52·8%. Hier zeigt sich Formel 38) entschieden überlegen. Sieht man von der offenbar mit einem Fehler behafteten Beobachtung für $t = 63·40$ ab, so stimmen die Constanten recht gut, während sie nach der Bodenstein'schen Berechnung erheblich schlechter stimmen und einen ausgesprochen aufsteigenden Gang zeigen.

Versuchsreihe Tabelle 4 *A*, Rohr II (572°).

Zeit	0·99	1·60	5·16	14·70	22·82	26·09	30·50
k nach Bodenstein	10·6 [1]	9·5	11·9	14·9	21·9	17·1	16·3
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	1·04	0·91	1·02	1·13	1·48	1·18	1·10

[1] In der Abhandlung steht irrthümlich 14·2.

Versuchsreihe Tabelle 10, Rohr II (600°).

Zeit	0·716	1·38	2·41	2·95	3·82	5·47
k nach Bodenstein	17·0	16·7	16·2	16·7	18·6	15·8
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	1·52	1·54	1·34	1·38	1·49	1·44

Versuchsreihe Tabelle 6, Rohr II (638°).

Zeit	0·39	0·55	0·84	1·08	1·49	1·72	1·77
k nach Bodenstein	59·9	65·9	60·7	65·0	61·9	68·0	63·3
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	4·89	5·30	4·79	5·02	4·63	4·98	4·52

Versuchsreihe Tabelle 7, Rohr II (652°).

Zeit	0·227	0·346	0·447	0·703	1·97	2·67
k nach Bodenstein	87·3	71·7	77·1	77·0	67·5	94·8
$\frac{4kp^2}{R^2T}$ nach Formel 38)	6·86	5·60	5·89	5·70	4·53	5·89

Versuchsreihe Tabelle 8, Rohr II (670°).

Zeit	0·197	0·449	0·715	1·134	1·490	2·398
k nach Bodenstein	101·0	77·9	80·2	90·2	90·8	95·7
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	8·17	6·04	5·99	6·36	6·33	6·12

Versuchsreihe Tabelle 9, Rohr II (689°).

Zeit	0·178	0·336	0·479	0·623	0·651	1·009
k nach Bodenstein	168	163	168	163	161	154
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	12·7	11·7	11·7	11·1	10·9	9·93

Da die Mittelwerte der Constanten und die mittleren Fehler der einzelnen Werte durch die erheblichen zufälligen Versuchsfehler stark beeinflusst werden, ist die graphische Darstellung der Resultate das geeignetste Mittel zur Prüfung, ob die Berechnung nach Bodenstein oder nach Formel 38) bessere Resultate gibt.

In der beiliegenden Darstellung sind als Abscissen die umgesetzten Mengen gewählt, um einen für alle Versuchsreihen einheitlichen Maßstab zu haben. (Es sei hiebei auf eine in Tabelle 6 auftretende Störung aufmerksam gemacht. Der vorletzte eingerahmte Punkt ist zeitlich der letzte. Der gefundene Umsatz war zur Zeit 1·72 0·452, zur Zeit 1·73 0·433.)

Als Ordinaten sind die berechneten Constanten in willkürlichen, für jede Versuchsreihe und Berechnung verschiedenen Maßstäben aufgetragen, um ein übersichtliches Bild zu bekommen.

Die Curven sollen der Abscissenaxe parallele Gerade sein. Dagegen verstoßen zunächst bei beiden Berechnungen Tabelle 1 und je der erste Wert in Tabelle 7 und 8. Es handelt sich da durchwegs um geringe Umsätze, also um Bedingungen, wo ein erheblicher Unterschied zwischen den beiden Berechnungen nicht auftreten kann.

Ferner zeigen beide der Tabelle 9 entsprechenden Curven einen absteigenden Gang, und zwar die der Gleichung 38) entsprechende Curve stärker als die Bodenstein'sche. Diese Versuchsreihe ist bei einer Temperatur ausgeführt, die nur 10 bis 20° unter der Explosionstemperatur liegt. Unter diesen Umständen ist ein abnormer Reactionsverlauf nicht unwahrscheinlich.

Die Curven der Tabellen 2, 10, 6, 7 und 8 (die beiden letzteren mit Hinweglassung der ersten Beobachtung) zeigen deutlich die Überlegenheit der Formel 38). Denn die Curven nach Bodenstein haben unverkennbar einen aufsteigenden Gang (insbesondere bei Tabelle 2 und 8), welcher bei der Berechnung nach Formel 38) verschwindet. Die nach dieser Formel berechneten Constanten fallen bei Tabelle 10, 2, 7 und 8 (bei letzteren drei nach Hinweglassung je eines Wertes) ziemlich

befriedigend aus. Nur Tabelle 6 gibt auch nach Gleichung 38) schlechte Constanten.

Die Tabelle 4*A* ist in die graphische Darstellung nicht aufgenommen, da der Umsatz bis 71·4% anstieg. Die Überlegenheit der Formel 38) ist bei dieser Versuchsreihe aus den Zahlen unmittelbar ersichtlich.

§. 101. Ähnlich gestaltet sich die Sache bei den Versuchen mit äquivalenten Mengen im Rohre I.

Versuchsreihe Tabelle 1, Rohr I (482°).

Zeit	41·3	67·1	95·7	124·3	156·5	189·5
k nach Bodenstein	0·0530	0·0557	0·0543	0·0651	0·0636	0·0829
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	0·00666	0·00696	0·00676	0·00798	0·00776	0·01005

Der höchste Umsatz war nur 17%. Daher kann ein erheblicher Unterschied zwischen beiden Berechnungen nicht auftreten.

Versuchsreihe Tabelle 2, Rohr I (509°).

Zeit	17·39	37·19	121·70	192·00
k nach Bodenstein	0·257	0·216	0·250	0·398
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	0·0310	0·0243	0·0288	0·0374

Ich habe aus dieser ziemlich unregelmäßig verlaufenen Versuchsreihe nur wenige Werte berechnet. Sie genügen, um zu zeigen, dass die Schwankungen der Constanten durch die Berechnung nach Formel 38) vermindert werden.

Versuchsreihe Tabelle 6, Rohr I (638°).

Zeit	0·77	1·08	1·67	2·15	2·98	3·47	3·48
k nach Bodenstein	31·1	33·0	35·4	51·5	43·9	39·6	38·4
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38)	2·57	2·70	2·78	3·79	3·17	2·83	2·76

Auch hier gibt Formel 38) constantere Werte. Unregelmäßiger verläuft die folgende Versuchsreihe:

Versuchsreihe Tabelle 4 *A*, Rohr I (572°).

Zeit	1·96	5·45	14·93	22·72	42·35	47·82	58·81
k nach Bodenstein	2·83	2·27	2·48	2·07	2·42	2·15	4·09[1]
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 38) ..	0·280	0·222	0·226	0·186	0·200	0·177	0·304

Es ist unverkennbar, dass die Versuche im Rohre I größeren Störungen unterworfen waren als im Rohre II. Rohr I war ein weites U-Rohr, Rohr II ein enges Schlangenrohr. Es liegt daher nahe, zu vermuthen, dass die Unregelmäßigkeiten der Versuche zum großen Theile durch unvollständige Ableitung der Reactionswärme und durch Strömungen in der Röhre hervorgerufen werden. Letztere mischen Theile des Gases, in denen die Reaction bereits weiter fortgeschritten ist, mit solchen, in denen der Umsatz erst einen geringen Betrag erreicht hat, und bewirken daher eine Abweichung von der bei der Rechnung gemachten Voraussetzung, dass die auftretenden Concentrationsänderungen nur durch die Reaction hervorgerufen werden.

Beide Störungen müssen im Rohre I wirksamer sein als im Rohre II.

§. 102. Bei den Versuchen mit nicht äquivalenten Mengen gibt die Formel 37) keine besseren Resultate als die Bodenstein'sche Berechnung. Die von Bodenstein berechneten Constanten dieser Versuche zeigen meistens einen deutlichen Gang, indem sie mit steigender Zeit fallen. Dieser Gang wird noch ausgesprochener bei Anwendung der Formel 37). Es ist kaum zu bezweifeln, dass bei diesen Versuchen besondere Störungen mitwirkten, welche bei den Versuchen mit äquivalenten Mengen keine Rolle spielten. Bodenstein hebt selbst verschiedene auffällige Erscheinungen bei diesen Versuchen hervor.[2]

---

[1] In der Abhandlung steht irrthümlich 3·24.

[2] A. a. O., S. 683.



Für das Gemisch $4H_2 + O_2$ ergibt sich die Formel

$$\frac{4kp^2}{R^2T^2} = \frac{1}{t}\left\{-\frac{4\cdot5x}{2-x} + 34\cdot538775 \log\left(1-\frac{x}{2}\right) - 36\cdot84136 \log(1-x)\right\}, \quad 39)$$

für $2H_2 + 2O_2$

$$\frac{4kp^2}{R^2T^2} = \frac{1}{t}\left\{\frac{9x}{1-x} + 6\cdot907755 \log(1-x) - 9\cdot21034 \log\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}. \quad 40)$$

Im folgenden sind die nach diesen Formeln berechneten Constanten mit den von Bodenstein berechneten zusammengestellt.

Tabelle IV *B*, Rohr I.

Zeit	1·82	1·82	2·79	3·75	4·74	5·37	7·37
k nach Bodenstein	3·38	2·85	3·21	2·45	2·47	1·99	1·65
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 39)	0·337	0·282	0·311	0·242	0·242	0·198	0·161

Tabelle IV *B*, Rohr II.

Zeit	1·14	1·14	1·76	2·37	2·99	3·38	4·77	6·06	12·50
k nach Bodenstein	15·7	15·9	15·6	15·6	14·2	14·3	12·7	12·0	12·0
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 40)	1·52	1·53	1·47	1·45	1·30	1·30	1·13	1·05	0·98

Tabelle IV *C*, Rohr I.

Zeit	1·06	1·30	7·23
k nach Bodenstein	3·16	2·44	1·50
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 40)	0·299	0·243	0·147

Tabelle IV *C*, Rohr II.

Zeit........	0·43	0·44	0·53	0·67	0·85	1·02	1·30	1·56	1·92	2·13	3·05
k nach Bodenstein....	28·0	28·5	26·6	27·0	26·9	27·1	25·1	25·4	24·4	25·9	25·8
$\frac{4kp^2}{R^2T^2}$ nach Formel 39)	2·73	2·78	2·56	2·55	2·56	2·55	2·35	2·34	2·23	2·33	2·18

§. 103. Im ganzen glaube ich sagen zu können, dass die Neuberechnung den Wert der Versuche Bodensteins mit Rohr II nur noch deutlicher hervortreten lässt und dass sie, indem sie einen Unterschied zwischen den Röhren I und II erkennen lässt, zur Aufklärung der Störungen einen Beitrag liefert.

Zusammenfassung.

1. Es wird eine allgemeine Form der Gleichungen für die Reactionsgeschwindigkeiten in homogenen Systemen bei constantem Volum entwickelt, welche alle Arten von Reactionen (Nebenwirkungen, Gegenwirkungen, Folgewirkungen, katalytische Wirkungen) umfasst.

2. Mit Hilfe dieser allgemeinen Darstellung der Reactionsgeschwindigkeiten wird untersucht, wie die Reactionsgleichungen beschaffen sein müssen und welche Bedingungen außerdem erfüllt sein müssen, damit

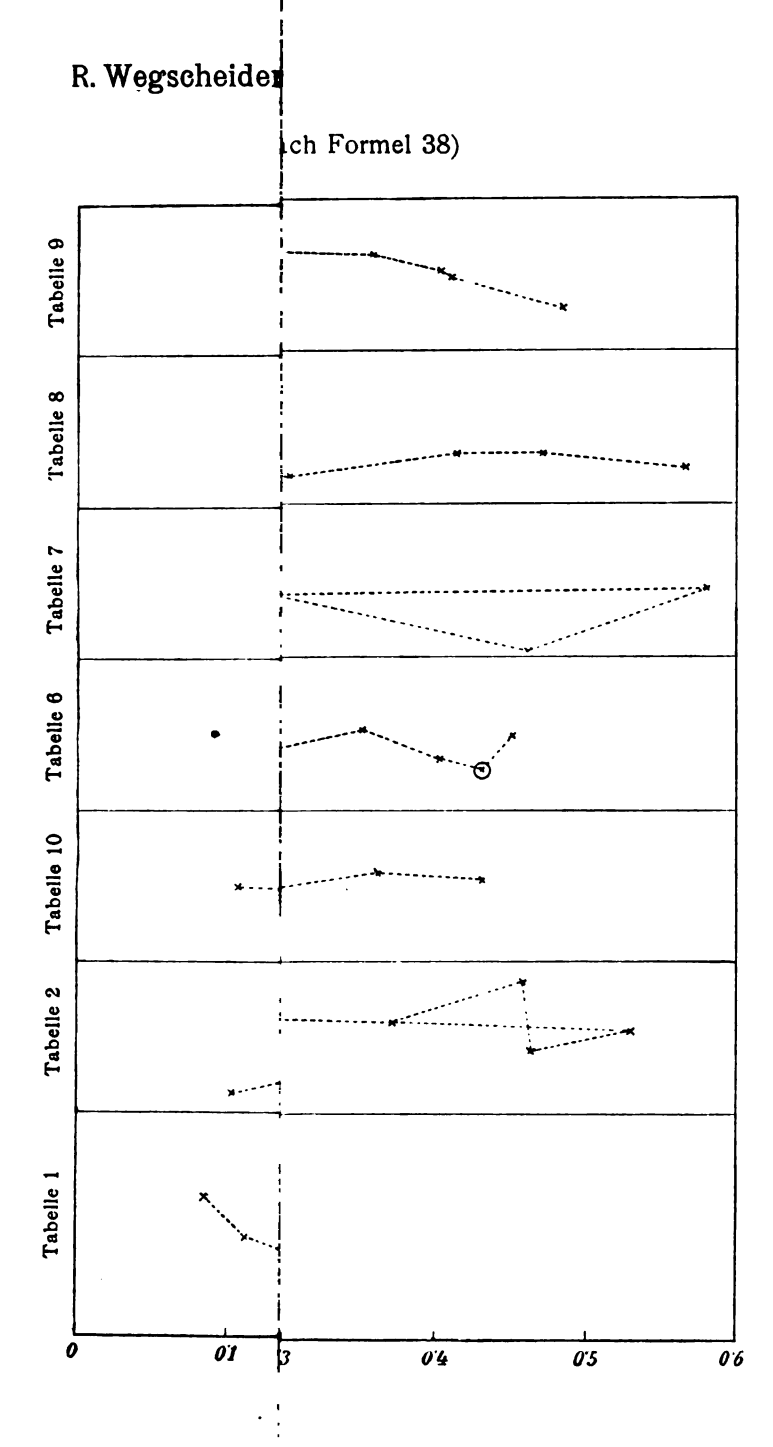
α) die Geschwindigkeiten zweier nebeneinander verlaufender Reactionenen in einem von der Zeit unabhängigen Verhältnisse stehen;

β) die Concentration eines Stoffes unverändert bleibt, welcher durch nebeneinander verlaufende Reactionen theils gebildet, theils verbraucht wird;

γ) die Mengenänderungen zweier Stoffe in einem von der Zeit unabhängigen Verhältnisse stehen. Hievon wird auf das constante Umwandlungsverhältnis bei der Cinchoninumlagerung (Skraup) Anwendung gemacht.



3. Es wird gezeigt, wie die Gleichungen für die Reactionsgeschwindigkeiten bei wechselndem Volum und insbesondere bei Gasen unter constantem Drucke aufzustellen sind. Die erhaltenen Formeln werden zur Berechnung der Versuche von Bodenstein über die Bildung von Wasserdampf aus Knallgas verwendet.


R. Wegscheider
ch Formel 38)
Tabelle 9
Tabelle 8
Tabelle 7
Tabelle 6
Tabelle 10
Tabelle 2
Tabelle 1
0
0·1
3
0·4
0·5
0·6

Über die Regenbildung

von

Dr. **Heinrich Mache.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1900.)

In der Umgebung eines Wassertropfens vom Radius r wird infolge der Oberflächenspannung der Dampfdruck p um

$$\Delta p = \frac{2\omega a}{(w-\omega)r}$$

erhöht. Es ist hierin a die Capillaritätsconstante, w das specifische Volumen des Dampfes, ω das des Wassers.

Befindet sich also ein Wassertropfen in einem sehr großen, mit gesättigter Luft gefüllten Raume, so wird er infolge dieses capillaren Überdruckes in endlicher Zeit verdampfen müssen. Auch sieht man, dass die von der Oberflächeneinheit verdampfte Wassermenge umso größer sein wird, je kleiner der Radius des Tropfens ist.

Befindet sich hingegen der Wassertropfen in übersättigter Atmosphäre, so wird es einen kritischen Radius ρ geben, von der Beschaffenheit, dass sich auf der durch ihn definierten Wasserkugel eben capillarer Überdruck und Übersättigungsdruck das Gleichgewicht halten. Alle Wasserkugeln von anderem als dem kritischen Radius können sich in der übersättigten Atmosphäre nicht im Gleichgewichte befinden. Sie werden entweder durch Condensation wachsen oder durch Verdampfung kleiner werden, je nachdem ihr Radius größer oder kleiner als ρ ist.

Wir wollen das etwas genauer formulieren. Zu diesem Behufe stellen wir einen Ausdruck für den Übersättigungs-

druck auf. In der Raumeinheit der gesättigten Atmosphäre seien nämlich bei der gegebenen Temperatur N Dampfmolekel enthalten. Dann lässt sich die Anzahl der in der übersättigten Atmosphäre enthaltenen Dampfmolekel durch $N+n$ ausdrücken. Ist m die Masse einer Molekel, so ist nm nichts anderes als die Wassermasse μ, um welche die Raumeinheit übersättigt erscheint, und der Übersättigungsdruck

$$\Delta\Pi = \frac{\mu c^2}{3},$$

wo c die mittlere Geschwindigkeit der Molekel darstellt, also c^2 der Temperatur proportional ist.

Der kritische Radius ρ bestimmt sich dann aus der Gleichung

$$\Delta\Pi = \Delta p$$

oder

$$\frac{\mu c^2}{3} = \frac{2\omega a}{(w-\omega)r}.$$

Ist $r < \rho$, so ist $\Delta\Pi < \Delta p$, d. h. die Kugel verdampft; ist $r > \rho$, so ist $\Delta\Pi > \Delta p$, d. h. die Kugel wächst durch die Condensation an ihrer Oberfläche. Es ist ersichtlich, dass diesem Wachsthum keine andere Grenze gesetzt ist als die, welche sich aus der vorhandenen überschüssigen Wassermenge ergibt.

Aus dem Vorhergehenden folgt aber, dass in übersättigter Atmosphäre nur Wasserkugeln, deren Radius größer als ρ ist, als Condensationskerne dienen können. Diese Condensationskerne können sehr wohl durch kleine Staubtheilchen beigestellt werden. An der Oberfläche dieser Theilchen wird sich zunächst infolge von Adhäsion eine dünne Wasserschichte bilden, so dass sie sich dann des weiteren wie Wasserpartikel verhalten.

Wir wollen nun zunächst versuchen, die Geschwindigkeit zu berechnen, mit welcher ein derartiger keimfähiger Condensationskern in übersättigter Atmosphäre wachsen wird.

Die Menge, in welcher sich der übersättigte Dampf auf einer ebenen Wasserfläche condensiert, ist offenbar dem Übersättigungsdrucke $\Delta\Pi$ proportional. Der Proportionalitätsfactor sei K. Auf der Kugel ist hingegen nur $\Delta\Pi-\Delta p$ in Rechnung

zu setzen. Da der Radius der Kugel direct mit der abgelagerten Wassermenge wächst, so ist also

$$\frac{dr}{dt} = K(\Delta\Pi - \Delta p) = K\left[\frac{\mu c^2}{3} - \frac{2\omega a}{(w-\omega)r}\right].$$

Diese Gleichung bestimmt die gesuchte Geschwindigkeit. Sie gestattet uns die Zeit zu berechnen, welche verfließen muss, bis der Condensationskern von seinem ursprünglichen Radius $\rho+\varepsilon$ auf den Radius r angewachsen ist.

Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\frac{2\omega a K}{w-\omega} = a \quad \text{und} \quad \frac{\mu c^2 K}{3} = b,$$

so ergibt sich durch Integration:

$$t = \frac{r}{b} + \frac{a}{b^2}[l(br-a)-1]+C.$$

Die Constante C bestimmt sich aus der Bemerkung, dass zur Zeit $t = 0$ der Radius $r = \rho+\varepsilon$ gewesen sein muss. Diese Gleichung wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, dass in der Umgebung des aus dem Condensationskerne herauswachsenden Wassertropfens der Übersättigungsgrad erhalten bleibt. Das ist, solange der Tropfen ruht, wohl nur unvollkommen der Fall. Thatsächlich wird aber der Tropfen nie ruhen, sondern sich stets unter dem Einflusse der Gravitation bewegen. Während er bis zum Radius R anwächst, wird er mit wachsender Geschwindigkeit um eine Strecke h gefallen sein. Dieser ganze Weg falle in den überall in gleicher Weise übersättigten Raum.

Die Geschwindigkeit c, mit welcher sich eine Kugel in einem widerstehenden Mittel bewegt, lässt sich annähernd durch $c = kr^2$ ausdrücken. Ist g die Beschleunigung der Erdschwere und μ der Reibungscoefficient der Luft, so ist hiebei $k = \frac{2g}{9\mu}$.

Es ist dann:

$$h = \int_0^t c\,dt = \int_{\rho+\varepsilon}^R kr^2 \left[\frac{1}{b} + \frac{a}{b(br-a)}\right] dr =$$

$$= \frac{k}{b}\left[\frac{r^3}{3} + \frac{ar^2}{2b} + \frac{a^2 r}{b^2} + \frac{a^3}{b^3} l(br-a)\right]_{\rho+\varepsilon}^{R}.$$

Bedenkt man, dass $a = b\rho$ und dass ρ eine sehr kleine Zahl ist, so ist auch

$$h = \frac{k}{b}\left[\frac{r^3}{3} + \frac{\rho r^2}{2} + \rho^2 r + \rho^3 lb(r-\rho)\right]_{\rho+\varepsilon}^{R} = \frac{kR^3}{3b} + \rho^3 l \frac{R-\rho}{\varepsilon}.$$

Unter der Annahme, dass ε nicht sehr klein gegen ρ ist, ergibt sich die einfache Beziehung:

$$h = \frac{kR^3}{3b} = \frac{k}{K\mu c^2} R^3.$$

Da in k der Reibungscoefficient der Luft enthalten ist, so ist k noch Function der Temperatur T; ferner ist c^2 der Temperatur T proportional. Man hat also auch

$$h = \frac{f(T)}{\mu} \cdot R^3.$$

Diese vereinfachte Form entspricht übrigens der Gleichung, welche man unter der Annahme erhielte, dass der Tropfen proportional mit der Zeit wächst.

Wir machen nun die folgenden Annahmen:

In einer oben und unten durch Ebenen begrenzten Schichte von der Dicke H befinde sich mit Wasserdampf gesättigte Luft. Durch Temperaturerniedrigung werde diese Schichte plötzlich in allen ihren Theilen bis zu einem Betrage μ übersättigt. Wir haben dann einen Vorgang vor uns, nicht unähnlich demjenigen, wie er sich in den Regenwolken abspielt. Es werden je nach der Größe von μ mehr oder weniger keimfähige Condensationskerne in der Volumeinheit der Schichte enthalten sein. Jeder dieser Condensationskerne wird so lange anwachsen, bis er infolge seiner eigenen Schwere die untere Grenzebene der übersättigten Schichte passiert hat. Von da ab wird auf

dem weiteren Wege bis zur Erde der Radius des Tropfens nahezu constant bleiben, sobald nur einmal die unteren Luftschichten mit Wasserdampf gesättigt sind. Die Größe aber, bis zu welcher ein Condensationskern beim Passieren der Grenzebene angewachsen ist, wenn er sich ursprünglich in der Höhe h über derselben befand, ergibt sich aus der Gleichung

$$R = \sqrt[3]{\frac{h\mu}{f(T)}}.$$

Sind die keimfähigen Condensationskerne in der Schichte gleichmäßig vertheilt und ist ihre Anzahl in der Volumeinheit gleich N, so fallen

$$N\frac{f(T)}{\mu} = NZ \text{ Tropfen vom Radius 0 bis 1}$$

$8NZ$ » » » 0 » 2

$27NZ$ » » » 0 » 3 u. s. w.,

endlich NH » » » 0 » P,

wo P den durch die Dicke H der übersättigten Schichte bestimmten Maximalradius bezeichnet. Es überwiegen somit die größeren Tropfen in cubischem Verhältnisse die kleineren. Die größten Tropfen sind also weitaus die zahlreichsten.

Nach Abschluss der vorliegenden Betrachtung wurde dem Verfasser eine Arbeit von C. T. R. Wilson[1] bekannt, in welcher die hier als kritischer Radius bezeichnete Größe zur Berechnung des Radius der bei seinen Versuchen auftretenden Condensationskerne benützt wird. ρ ist hienach von der Größe 10^{-7} *cm*.

Die bei der Regenbildung giltigen kritischen Radien dürften im allgemeinen erheblich größer sein. So ergeben sich aus den Bestimmungen Herrn V. Conrads[2] über den Wassergehalt

[1] »Condensation of water vapour in the presence of dustfree air and other gases«. Proc. of the R. S. of London, 1897, p. 240.

[2] Wiener Anz., 1899, S. 320.

von Wolken Radien, welche zwischen $1 \cdot 2 . 10^{-4}$ und $2 \cdot 4 . 10^{-5}$ liegen; und selbst unter der Annahme, dass die Übersättigung durch eine plötzliche Temperaturerniedrigung der gesättigten Schichte von 20° auf 0° C. hervorgerufen ist, berechnet sich der kritische Radius erst zu $8 \cdot 7 . 10^{-6}$. Stärkere Übersättigungen sind aber doch wohl ausgeschlossen. Es dürften hienach bei der Regenbildung die Molekelaggregate der höchsten Ordnungen kaum mehr als Condensationskerne dienen können, vielmehr diese Rolle ausschließlich dem Staube zufallen.

Zur Statistik der Kometenbahnen

von

Dr. A. Schobloch.

(Mit 2 Textfiguren.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Mai 1900.)

Für die kurzperiodischen Kometen hat sich ein nachweisbarer Zusammenhang mit Jupiter ergeben. Durch ein- oder mehrmalige Annäherung an denselben können Bedingungen eintreten, welche die Umgestaltung der Bahn in eine Ellipse von kurzer Umlaufszeit bewirken. Nach Tisserand, Mec. cel., IV, p. 201 beträgt die Entfernung, innerhalb welcher man Jupiter als Centralkörper, die Sonne als störenden Körper betrachten kann, 0·322 astr. Einh. Dieser Wert wird für die Distanzen der kurzperiodischen Kometen von der Jupiterbahn erreicht, wie aus Tabelle 20 der vorliegenden Abhandlung ersichtlich ist. Bei der großen Masse des Jupiter werden wir jedoch annehmen können, dass noch auf größere Entfernungen eine wesentliche Mitbestimmung bei der Gestaltung der Elemente einer Kometenbahn eintreten wird, und man kann sich die Frage vorlegen, ob bei den uns bekannten Kometen ein solcher Einfluss nachzuweisen ist. Allgemein könnte man die Frage so stellen: Würden die Bahnen der uns bekannten Kometen wesentlich andere sein, wenn unser System nur aus einem Centralkörper bestehen würde? Es ist klar, dass z. B. für die kurzperiodischen Kometen wesentlich andere Bedingungen vorhanden wären. Das Problem ist indes einer allgemeinen Untersuchung nicht leicht zugänglich, ich möchte daher die vorliegende Arbeit bloß als Versuch betrachtet sehen, inwiefern es möglich ist, über die Frage einige Aufklärung zu gewinnen.

Bestimmt man für eine Kometenbahn den dem Werte des Radius Vectors $r = a$ entsprechenden Wert der wahren Anomalie v, so wird der zugehörige heliocentrische Ort (l, b) erhalten durch: $u = \tilde{\omega} \pm v$, $\sin b = \sin u \sin i$, $\operatorname{tg}(l-\Omega) = \operatorname{tg} u \cos i$. Für $i < 90°$ liegt $l-\Omega$ im gleichen Quadranten wie u, für $i > 90°$ im I., II., III., IV., wenn u respective im IV., III., II., I. Quadranten liegt. Die Lösung ist stets eine doppelte und immer möglich, ausgenommen für Kometen, deren Periheldistanz $> a$ und solche, deren Apheldistanz $< a$ ist.

Der einer Länge l entsprechende Abstand Δ einer Kometenbahn von einem in der Ekliptik mit dem Radius a beschriebenen Kreise beträgt $\Delta^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos b$, daher für $r = a$, $\Delta = 2a \sin \frac{b}{2}$. Betrachtet man nun die Jupiterbahn als eine in der Ekliptik liegende Kreisbahn von 5·20 astr. Einh. Radius, so folgt hieraus, dass alle Kometenbahnen der Jupiterbahn auf weniger als 1 astr. Einh. nahekommen werden, welche für $r = 5 \cdot 20$ die Bedingung $\sin b < \overline{9 \cdot 28}$ erfüllen. Wegen $\sin b = \sin u \sin i$ ist diese Bedingung für alle Kometenbahnen erfüllt, deren Neigung $< 11°$ ist. Da wir keinen Kometen kennen, dessen Periheldistanz $> 5 \cdot 20$ ist, sind bloß jene Kometen ausgenommen, deren Aphel innerhalb der Jupiterbahn liegt. Die Mehrzahl der Kometen als langperiodisch ansehend, werden also beliebige Zeiträume vorausgesetzt für diejenigen, deren Neigung $< 11°$ ist, periodisch Bedingungen eintreten, unter welchen Jupiter wesentlich mitbestimmend auf die Elemente einwirken wird. Hiemit steht wohl die Thatsache in Zusammenhang, dass von den 29 Kometen, deren Neigung $< 14°$ ist, 23 kurzperiodisch sind, anderseits von den bekannten 32 kurzperiodischen Kometen bloß vier Neigungen über 20° besitzen.

Für größere Neigungen als 11° wird die Bedingung $\sin b < \overline{9 \cdot 28}$ nur für Werte von u erfüllt sein, welche unter den in folgender Tabelle gegebenen Grenzen liegen. Machen wir nun die Voraussetzung, dass bei der Gesammtheit »aller« Kometen die Elemente zufällig vertheilt sind, so werden für einen bestimmten Wert der Neigung alle möglichen Werte von $u = \pi - \Omega \pm v$ gleichmäßig vorkommen. Dann ergibt sich aus

der oberen Grenze von u der Procentsatz der Kometen, für welche $\Delta < 1$ sein muss, wie folgt.

Tabelle 1.

Neigung		Procentsatz Kometen, für welche $\Delta < 1$	Obere Grenze von u für $\Delta < 1$	$r = 5 \cdot 20$ $\sin b < \overline{9 \cdot 28}$
0°		100%	90°	
11°	169°	100	90	
15	165	53	47 33'	
20	160	38	33 57	
25	155	30	26 52	und die zugehörigen Supplementwinkel
30	150	25	22 27	
40	140	19	17 17	
50	130	16	14 27	
60	120	14	12 44	
70	110	13	11 44	
80	100	12	11 12	
90°		12	11 0	

Führt man die hier angedeutete Rechnung für eine große Zahl Kometen aus, so werden sich für jeden Wert der Neigung Procentsätze der Kometen ergeben, für welche $\Delta < 1$ ist und welche mit den theoretisch geforderten Procentzahlen verglichen werden können. Ergeben sich erheblich mehr Procente der Kometen, für welche $\Delta < 1$ ist, als in Tabelle 1 angegeben, so wächst die Wahrscheinlichkeit, dass Jupiter für die Gestaltung der Elemente der in einer solchen Gruppe enthaltenen Kometen maßgebend gewesen ist. Natürlich muss in jedem Falle untersucht werden, inwiefern das Resultat dadurch beeinflusst wird, dass die Vertheilung der Elemente bei den uns »bekannten« Kometen keine rein zufällige ist. Diese Rechnung wurde für die folgenden 299, nach Neigungen geordneten Kometen ausgeführt. Die kurzperiodischen sind eingeklammert und wurden als eine besondere Gruppe repräsentierend bei der Bildung der Procentzahlen ausgeschlossen.

Tabelle 2.

0—11°	11—15°	15—20°	20—30°	30—40°	40—50°	50—60°	60—70°	70—80°	80—90°
(1770 I)	1771	(1890 V)	(1892 III)	1846 III	1826 II	1786 II	1680	1898 VI	1885 II
(1743 I)	(1888 IV)	1887 IV	1830 I	1889 III	1850 II	1793 II	1880 V	1785 I	1819 II
(1844 I)	(1896 V)	1867 I	1898 VIII	(1892 V)	1769	1843 II	1773	1763	1781 I
(1894 IV)	(1852 III)	1737 I	1892 VI	1811 II	1854 IV	1840 I	1853 III	1898 I	1886 I
(1895 II)	(1886 IV)	1847 V	(1891 II)	1860 IV	1852 IV	(1885 IV)	1810	1882 I	1672
(1893 III)	(1894 III)	(1858 III)	(1826 IV)	1556	1874 V	1824 II	1807	1851 IV	1863 VI
1702	(1890 VII)		1898 IX	1779	1888 I	1706	1890 III	1884 I	1774
(1891 V)	1757		(1879 I)	1857 IV	1885 V	1896 III	1881 III	1888 III	1886 II
(1884 II)	(1891 III)		1873 VII	1874 IV	1816	1888 V	1863 V	1895 III	1849 I
(1894 I)	(1896 VII)			1618 II	1798 I	1845 II	1788 II	1729	1846 IV
1834	1854 V			1851 III	1887 V	1804	1684	1879 V	1863 I
(1889 V)	(1892 IV)			1892 I	(1783)	1890 I	1889 IV	1877 III	1861 II
1585					1844 III	1802	1874 III	1891 IV	1863 III
(1881 V)					1845 I	1840 IV	1849 III	1881 II	1886 VIII
1833					1744	1874 I	1748 II	1883 I	1762
(1766 II)					1846 I	1885 III	1849 II	1863 IV	1894 II
(1819 IV)					1860 II		1850 I	1878 I	1871 I
(1879 III)					1847 I		1758	1759 II	1886 V
(1889 VI)					1864 IV		1897 III	1860 III	1857 I
					1846 VIII		1898 VII	1860 I	1896 IV
								1861 I	1707
								1840 III	1825 II
									1892 II
									1818 II

169—180°	165—169°	160—165°	150—160°	140—150°	130—140°	120—130°	110—120°	100—110°	90—100°
1855 IV	1889 I	1835 III	1790 I	1792 I	1723	1891 I	1869 II	1886 III	1826 V
1835 I	1898 V	1866 I	1846 VII	1881 IV	1792 II	1890 II	1742	1847 II	1865 I
1862 II	1788 I	1864 V	1781 II	1898 X	1852 II	1840 II	1863 II	1747	1785 II
1759 III		1889 II	1877 I	1808 II	1845 III	1857 III	1881 VI	1886 IX	1748 I
1864 II			1890 IV	1895 IV	1844 II	1877 II	1862 III	1871 II	1859
			1896 I	1880 III	1868 II	1873 V	1854 I	1877 VI	1848 I
			1855 II	1882 II	1787	1870 I	1883 II	1827 I	1873 IV
			1664	1857 VI	1808 I	1853 II	1796	1799 II	1882 III
			1858 VII	1822 III	1743 II	1846 V	1877 V	1823	1847 III
			1813 I	1893 I	1864 I	1880 II	1790 III	1887 II	1867 III
			1801	1843 I	1830 II	1825 I	1818 III	1842 II	1683
			1853 I	1880 I	1827 II	1857 V	1858 VI	1821	1854 II
			1893 II	1881 VIII	1832 II	1739	1853 IV	1811 I	1871 IV
				1806 II	1862 IV	1824 I	1793 I	1879 II	1813 II
				1897 I	1798 II	1780 I		1879 IV	1890 VI
				1825 IV	1887 I	1827 III		1847 VI	1874 VI
				1870 IV	1861 III	1822 I		1854 III	1870 II
				1847 IV	1766 I	1764		1864 III	1858 IV
				1874 II	1887 III	1822 IV			
				1770 II		1855 I			
				1718		1784			
						1799 I			
						1797			
						1793 IV			

Wir haben somit folgende Zusammenstellung:

Tabelle 3.

Neigung	Kometen		Anzahl der Kometen mit Ausschluss der kurzperiodischen
	direct	retrograd	
0—11°	4+(15)	5	9
11—15	3+(9)	3	6
15—20	4+(2)	4	8
20—30	6+(3)	13	19
30—40	11+(1)	21	32
40—50	19+(1)	19	38
50—60	15+(1)	24	39
60—70	20	14	34
70—80	22	18	40
80—90	24	18	42

Von den in der dritten Columne enthaltenen 267 Kometen nähern sich 87 (hievon 15 an zwei Stellen) der Jupiterbahn auf weniger als 1 astr. Einh. Die Vertheilung nach Neigungen, die Werte von v, sin b, Δ und die auf 1900 bezogenen Längen sind aus untenstehender Tabelle ersichtlich. Kometen mit nachgewiesener Excentricität ist ein e zu der Jahreszahl beigefügt.

Tabelle 4.

Komet	i	$r = 5 \cdot 20$ v	sin b	Δ	l 1900
1702	4°25'	—138°42'	8·0769	0·062	2°51'
		+138 42	8·8864	0·400	280 15
1834	5 59	—143 24	9·0177 n	0·542	134 12
		+143 24	8·3882 n	0·127	60 57
1585	6 6	—125 22	8·6682 n	0·242	248 2
		+125 22	9·0232	0·548	138 56
1833	7 18	—145 14	9·0593	0·596	80 14
		+145 14	8·9621	0·477	10 17

Komet	*i*	*r* = 5·20 *v*	sin *b*	Δ	*l* 1900
1771	11°16'	—130°47'	9·2023 *n*	0·828	335°34'
		+130 47	8·9466 *n*	0·460	236 9
1757	12 50	—150 29	9·2916	1·018	335 6
		+150 29	9·2809	0·993	274 49
1854 V*e*	14 9	+119 13	9·2471	0·919	284 8
		+240 47	8·7127	0·268	46 57
1847 V*e*	19 9	+213 14	8·9933 *n*	0·512	294 1
1892 VI	24 48	+128 40	9·1844	0·795	284 11
1898 IX	28 51	—146 56	9·1077	0·666	48 29
1889 III*e*	31 13	+127 42	8·8490 *n*	0·368	17 50
1811 II*e*	31 17	+246 12	9 2621 *n*	0·951	294 33
1860 IV	32 12	—137 31	8·7134	0·269	220 42
1779	32 31	+136 32	9·2372 *n*	0·898	222 36
1826 II	40 0	—103 10	8·6276	0·221	15 45
1769*e*	40 46	+197 32	9·1778	0·783	346 44
1854 IV*e*	40 55	+225 42	8·6978 *n*	0·259	321 48
1852 IV*e*	40 55	+125 53	8·5277 *n*	0·175	169 4
1887 V*e*	44 34	+126 34	9·1605 *n*	0·752	273 15
1845 I	46 51	—130 40	9·3052 *n*	1·050	326 22
1744	47 7	—156 8	8·7769	0·311	44 44
1864 IV	48 53	—134 42	9·3234 *n*	1·095	192 53
1786 II	50 59	—148 2	8·8115	0·337	13 58
1793 II*e*	51 30	+116 28	8·9441 *n*	0·458	187 31
1843 II	52 44	—112 14	9·2181	0·859	165 22
1888 V*e*	56 21	+245 14	8·7621	0·301	315 30
1890 I	56 44	+153 40	8·9739 *n*	0·490	5 3
1885 III	59 7	+135 23	8·4184	0·136	24 4
1680	60 40	—176 2	8·9114	0·424	92 36
		+176 2	9·3022	1·043	88 38
1773	61 14	—124 30	9·1649 *n*	0·760	307 31
1849 III*e*	66 55	+131 8	9·0918	0·642	34 18
1897 III	69 39	+118 38	8·9006 *n*	0·414	213 48
1898 I	72 33	+125 22	9·0885	0·638	80 13
1888 III*e*	74 12	+130 46	9·2215 *n*	0·866	284 25
1877 III*e*	77 10	+232 19	9·2657 *n*	0·959	343 57
1840 III	79 52	—135 24	8·6582	0·237	187 20
1886 I	82 37	—138 51	9·3237 *n*	1·096	34 59
1871 I*e*	87 36	+138 37	8·2958	0·103	279 45
1886 V	87 40	+154 13	8·8943 *n*	0·408	192 38
1818 II	89 44	—122 38	9·2531 *n*	0·932	71 31
1867 III	96 34	—150 49	8·5813 *n*	0·198	65 42

Komet	i	$r = 5{\cdot}20$ v	$\sin b$	Δ	l 1900
1886 III	100°12'	+132°33'	9·1818	0·790	109°33'
1827 I	102 24	−143 38	9·0957	0·648	183 56
1799 II	102 58	−139 24	8·6954 *n*	0·258	328 54
1823	103 48	+154 57	8·7646 *n*	0·302	123 18
1821	106 27	−164 43	8·8749	0·390	48 31
1811 I	106 57	− 52 44	9·3211 *n*	1·089	317 54
1864 III	109 42	+129 56	8·5928	0·204	31 27
1883 II	114 59	−151 44	9·3121 *n*	1·067	270 15
1858 VI *e*	116 58	+218 40	9·2755 *n*	0·981	171 31
1890 II	120 33	+105 26	8·9270	0·440	143 21
1877 II *e*	121 8	+129 28	9·2712 *n*	0·971	130 20
1824 I	125 27	−140 34	9·2802 *n*	0·991	47 27
1852 II	131 6	+130 40	9·1991	0·822	145 55
1868 II	131 33	−141 2	9·2703 *n*	0·969	62 23
1862 IV	137 31	+133 43	8·7044	0·263	353 12
1798 II	137 37	+134 26	9·0914 *n*	0·642	258 45
1887 III	139 47	+127 46	9·2421	0·908	327 45
1881 IV	140 14	−139 8	9·2723 *n*	0·973	110 33
1898 X	140 21	−135 10	9·1082 *n*	0·667	105 21
1808 II	140 41	−140 2	8·9715 *n*	0·487	32 4
1880 III	141 54	−149 43	8·8508	0·369	230 48
1822 III	143 42	+132 23	9·0176	0·542	90 37
1881 VIII *e*	144 50	+253 53	9·0746	0·618	171 55
1806 II	144 57	+125 44	8·9526 *n*	0·466	331 1
1825 IV *e*	146 27	+121 45	9·2484	0·921	201 1
1847 IV	147 21	+115 24	8·9342	0·447	265 12
1874 II	148 24	−131 16	9·2632 *n*	0·953	76 50
1790 I	150 16	−135 27	9·2505 *n*	0·926	192 50
1781 II	152 48	+129 4	8·9166 *n*	0·429	249 47
1855 II	156 53	+141 26	9·0334	0·562	95 41
1664	158 42	−127 16	8·3182 *n*	0·108	261 30
1813 I	158 46	−136 59	9·3050 *n*	1·049	209 57
1801	159 15	+154 20	8·9366	0·449	40 38
1853 I	159 45	−125 28	9·2332	0·890	278 17
1893 II *e*	159 58	+137 49	8·4989 *n*	0·164	152 29
1835 III *e*	162 15	+216 28	9·2191 *n*	0·861	87 42
1866 I *e*	162 42	+224 49	9·2403	0·904	197 22
1889 II *e*	163 50	+ 97 38	9·0907 *n*	0·641	336 14
		+262 22	9·2662	0·960	171 16
1889 I	166 22	−107 34	9·2741 *n*	0·978	124 38
1898 V	166 51	+115 0	9·1874	0·801	140 9

Komet	i	$r = 5 \cdot 20$ v	sin b	Δ	l 1900
1788 I	167°32'	—126°14'	9·3025	1·044	226°27'
		+126 14	8·1830 *n*	0·079	334 33
1855 IV	169 49	—121 46	8·8529 *n*	0·370	208 46
		+121 46	9 2471	0·919	324 56
1835 I	170 52	—102 26	9·1785	0·784	311 2
		+102 26	9·0653 *n*	0·604	106 0
1862 II	172 6	—128 30	9·1300 *n*	0·702	68 29
		+128 30	8·7523	0·294	171 10
1759 III	175 8	—128 56	8·0503	0·058	269 20
		+128 56	8·9046	0·417	11 34
1864 II *c*	178° 8'	+130 48	8·5036 *n*	0·166	173 54
		+229°12	8·0521	0·059	75°30'

Wir haben hienach für die einzelnen Neigungen folgende Procentsätze der Kometen, für welche $\Delta \gtreqless 1$ ist.

Tabelle 5. $r = 5 \cdot 20$, $\sin b < \overline{9 \cdot 28}$.

Neigung	Zahl der Kometen für die $\Delta \leqq 1$ astr. Einh.		Theor. Procentsatz nach Tabelle 1
0—11°	4+ 5 = 9, d. i. nach Tabelle 3	100%	100%
11—15	3+ 3 = 6,	100	53—100
15—20	1+ 3 = 4,	50	38 – 53
20—30	2+ 8 = 10,	53	25—38
30—40	4+10 = 14,	44	19—25
40—50	8+ 5 = 13,	34	16—19
50—60	6+ 3 = 9,	23	15%
60—70	4+ 2 = 6,	18	13·5
70—80	4+ 7 = 11,	27	12·5
80—90	4+ 1 = 5,	12	12%

Der Unterschied in den beiden Procentreihen ist beträchtlich. Ehe wir näher auf dieses Resultat eingehen, sollen analoge Untersuchungen über die relative Bahnlage der Kometen

zu den Bahnen der übrigen äußeren Planeten angestellt werden. Es ist zunächst für eine Kometenbahn, die der Saturn-, Uranus-, Neptunbahn auf weniger als 1 astr. Einh. nahekommen soll, erforderlich, dass die Bedingungen erfüllt sind:

für Saturnbahn $r = 9\cdot54$, $\sin b < \overline{9\cdot02}$,
» Uranusbahn $r = 19\cdot18$, $\sin b < \overline{8\cdot72}$,
» Neptunbahn $r = 30\cdot05$, $\sin b < \overline{8\cdot55}$,

wobei wir der Einfachheit wegen von Excentricität und Neigung der Planetenbahn absehen.

Analoge Betrachtungen wie oben lassen für die einzelnen Gruppen folgende, den Neigungen entsprechende obere Grenzen von u und Procentsätze der Kometen, für welche $\Delta < 1$ sein muss, aufstellen.

Tabelle 7.

Neigung	Procentsatz der Kometen, für die $\Delta < 1$ sein muss	Obere Grenze von u für $\Delta < 1$	$r = 9\cdot54$ $\sin b < \overline{9\cdot02}$
0°	100%	90°	und die zugehörigen Supplementwinkel
6°	100	90	
10	41	36 58'	
20	20	17 47	
30	13	12 3	
40	10	9 21	
50	9	7 51	
60	8	6 55	
70	7	6 23	
80	7	6 6	
90	7	6 0	

Tabelle 8.

Neigung	Procentsatz der Kometen, für die $\Delta < 1$ sein muss	Obere Grenze von u für $\Delta < 1$	$r = 19 \cdot 18$ $\sin b < \overline{8 \cdot 72}$
0°	100%	90°	und die zugehörigen Supplementwinkel
3	100	90	
10	20	17 35'	
20	10	8 50	
30	7	6 2	
40	5	4 41	
50	4	3 56	
60	4	3 28	
70	4	3 12	
80	3	3 4	
90	3	3 0	

Tabelle 9.

Neigung	Procentsatz der Kometen, für die $\Delta < 1$ sein muss	Obere Grenze von u für $\Delta < 1$	$r = 30 \cdot 05$ $\sin b < \overline{8 \cdot 55}$
0°	100%	90°	und die zugehörigen Supplementwinkel
2	100	90	
5	27	24 2'	
10	13	11 47	
20	7	5 57	
30	5	4 4	
40	4	3 10	
50	3	2 39	
60	3	2 34	
70	2	2 10	
80	2	2 4	
90	2	2 2	

Diejenigen der in Tabelle 3 enthaltenen Kometen, welche der Saturn-Uranus-Neptunbahn auf weniger als 1 astr. Einh. nahekommen, sind in den folgenden drei Tabellen enthalten, welche wie Tabelle 4 eingerichtet sind.

Tabelle 10.

Komet	i	$r = 9\cdot54$ v	$\sin b$	Δ	l 1900
1702	4°25'	—149°50'	8·4222	0·252	351°46'
		+149 50	8·8804	0·724	291 23
1834	5 59	—153 10	9·0071 *n*	0·970	124 23
		+153 10	8·6159 *n*	0·394	70 40
1585	6 6	—140 24	8·3071 *n*	0·194	233 5
		+140 24	8·9940	0·940	154 3
1833	7 18	+154 31	9·0198	0·998	19 35
1898 X	28 51	—155 45	8·7429	0·528	40 42
1811 II*c*	31 17	+226 55	8·0876 *n*	0·117	275 35
1885 V	42 26	+140 40	8·6409	0·417	79 41
1798 I	43 48	—153 56	9·0361 *n*	1·037	310 5
1860 II	48 13	+136 34	8·4600	0·275	187 58
1843 II	52 44	—131 22	8·9959 *n*	0·945	153 42
1804	56 29	—140 50	8·2108 *n*	0·155	4 20
1890 I	56 44	+160 39	7·8774	0·072	8 53
1840 IV*c*	57 58	+224 23	8·4747 *n*	0·285	248 42
1680	60 40	—177 4	8·9876	0·927	92 4
1773	61 14	—139 48	8·9398	0 831	300 7
1788 II	64 30	+147 16	8·5590	0·346	172 58
1684	65 25	—143 3	9·0567 *n*	1·087	94 15
1874 III*c*	66 21	+210 45	8·6973	0·475	120 22
1898 VII	69 55	+130 4	8·7416	0·526	75 11
1898 VI	70 2	+150 18	8·8274 *n*	0·641	257 44
1861 I*c*	79 46	+145 18	8·3375 *n*	0·208	30 15
1774	83 20	—134 24	8·6037	0·383	182 46
1861 II*c*	85 26	+212 42	8·6875 *n*	0·465	99 45
1894 II	87 4	—142 32	8·4843 *n*	0·291	26 31
1886 V	87 40	+161 2	8·6063	0·385	192 55

Komet	*i*	*r* = 9·54 *v*	sin *b*	Δ	*l* 1900
1896 IV	88°26'	+139°30'	7·9687 *n*	0·089	331° 8'
1892 II	89 42	—125 56	8·7731	0·566	253 34
1886 III	100 12	+145 26	8·8367 *n*	0·655	107 15
1827 I	102 24	— 153 21	8·6087 *n*	0·388	185 59
1821	106 27	—168 45	7·8769	0·072	49 39
1742	112 28	—147 0	8·3836 *n*	0 231	6 47
1862 III *c*	113 34	+213 21	8·9886	0·929	135 32
1824 I	125 27	— 151 10	8·6200 *n*	0·398	53 42
1784	128 51	—148 23	9·0185 *n*	0·996	233 36
1792 II	130 58	—142 54	8·7596	0·548	281 53
1852 II	131 6	+144 7	8·2438 *n*	0·167	137 0
1844 II *c*	131 24	+145 11	8·6690 *n*	0·445	34 48
1798 II	137 37	+146 44	8·3136	0·196	250 37
1861 III	138 1	—145 30	8 8506 *n*	0·677	321 7
1887 III	139 47	+142 5	8·1925	0·148	316 41
1881 VIII *c*	144 50	+231 48	9·0085 *n*	0·973	190 3
1806 II	144 57	+140 39	8·7735	0·566	318 46
1847 IV	147 21	+133 32	8·9247 *n*	0·802	249 49
1874 II	148 24	— 144 32	8·8183 *n*	0·628	88 19
1855 II	156 53	+151 47	8·5833	0·366	86 6
1664	158 42	—141 43	8·8473	0·671	274 58
1893 II	159 58	+149 13	8·9842 *n*	0·920	84 48
1866 I *c*	162 42	+207 15	8·9683	0·887	214 27
1889 II *c*	163 50	+121 50	8·0016 *n*	0·096	312 53
1898 V	166 51	+133 16	8·9716	0·894	122 4
1788 I	167 32	+141 0	8·8426 *n*	0·664	320 7
1855 IV	169 49	—137 54	8·3709 *n*	0·224	85 52
		+137 54	8·6137	0·392	169 44
1835 I	170 52	+124 54	8·8208 *n*	0·632	83 38
1862 II	172 6	+142 35	8·3860	0·232	157 12
1759 III	175 8	— 142 54	8·4955	0·299	283 16
		+142 54	8·9286	0·810	346 3
1864 II *c*	178 8	+144 22	8·4687 *n*	0·281	160 19
		+215 38	7·5788	0·036	10 37

Tabelle 11.

Komet	i	$r = 19\cdot18$ v	sin b	Δ	l 1900
1702	4°25'	—158°52'	8·5732	0·722	342°44'
1585	6 6	—152 26	7·2781	0·037	221 7
1867 I*e*	18 13	+191 42	8·6994 *n*	0·965	267 41
1898 IX	28 51	—163 0	7·7493 *n*	0·108	34 20
1874 IV*e*	34 8	+210 40	7·4170	0·050	216 26
1892 I*e*	38 42	+153 29	8·3389	0·421	59 27
1798 I	43 48	—161 44	8·1731 *n*	0·287	304 26
1804	56 29	—152 44	8·0568	0·220	357 42
1785 I	70 14	+151 59	8·5865 *n*	0·744	265 1
1860 I	79 36	+151 8	8·1555	0·276	324 46
1819 II	80 45	+164 43	8·5033	0·614	94 31
1781 I	81 43	—156 51	8·0612 *n*	0·222	84 35
1849 I	85 3	+154 13	8·5891	0·748	216 7
1846 IV*e*	85 6	+165 33	8·4352	0·525	258 10
1886 VIII	85 35	+147 50	7·6929	0·095	78 23
1707	88 38	+155 36	8·6783 *n*	0·919	235 36
1874 VI	99 13	+161 19	8·6163	0·797	102 43
1821	106 27	—172 5	8·6834 *n*	0·930	50 36
1880 II	123 4	—144 16	8·1352	0·263	257 1
1822 I	126 23	—161 23	8·6704 *n*	0·903	356 33
1855 I*e*	128 36	+216 27	7·7881	0·119	10 38
1784	128 51	—157 54	8·3925	0·476	239 35
1723	130 0	—153 41	8·4909	0·597	198 8
1827 II	136 21	+156 21	8·5578	0·696	141 22
1832 II	136 40	+151 19	8·6890 *n*	0·942	76 23
1861 III	138 1	—155 55	8·7036	0·974	328 52
1792 I	140 13	—149 59	8·6810	0·925	188 58
1874 II	148 24	—155 15	8·5049	0·617	97 28
1855 II	156 53	+160 15	8·2930 *n*	0·379	78 18
1858 VII	158 43	—148 26	8·6518	0·865	153 42
1866 I	162 42	+183 45	8·5125 *n*	0·628	237 54
1898 V	166 51	+147 36	8·5959	0·761	108 3
1855 IV	169 49	—150 43	8·2035	0·308	98 28
1835 I	170 52	+142 2	8·3179 *n*	0·401	66 41
1862 II	172 6	+153 55	7·4410 *n*	0·053	145 59
1759 III	175 8	—154 8	8·6642	0·890	294 28
1864 II*e*	178 8	+155 23	8·4184	0·505	149 18
		+204 37	7·3912 *n*	0·047	100 4

Tabelle 12.

Komet	i	$r = 30·05$ v	sin b	Δ	l 1900
1585	6° 6'	—158° 0'	8·0860	0·366	215°35'
1898 IX	28 51	—166 25	8·5360 *n*	1·033	31 20
1873 VII	29 55	+162 2	8·3045	0·606	248 50
1798 I	43 48	—165 24	8·4682	0·883	301 47
1845 II	56 24	+156 25	8·4334	0·815	348 55
1802	57 1	+157 58	7·3416	0·066	131 33
1853 III	61 31	—168 23	8·4975	0·945	142 8
1819 II	80 45	+167 46	8·3153 *n*	0·621	95 1
1748 I	94 32	+160 45	8·4917	0·932	55 7
1813 II	98 52	+156 49	8·5076	0·967	43 45
1874 VI	99 13	+165 2	8·3557 *n*	0·682	102 7
1847 II	100 26	+149 14	8·4342 *n*	0·816	352 24
1840 II *e*	120 47	+202 32	8·1138 *n*	0·390	238 7
1853 II	122 11	+161 48	8·1766	0·451	41 4
1822 I	126 23	—165 7	7·7498	0·169	358 46
1864 I	135 0	—163 24	8·5226 *n*	1·001	353 34
1827 II	136 21	+161 7	8·3279 *n*	0·639	137 55
1832 II	136 40	+157 6	8·3087	0·612	72 10
1792 I	140 13	—156 3	8·2950 *n*	0·593	193 38
1890 IV *e*	154 18	+200 49	7·9069	0·242	264 32
1858 VII	158 43	—154 48	7·6669	0·140	159 39
1889 I	166 22	—151 33	8·5626 *n*	1·098	168 54
1898 V	166 51	+154 10	8·1322	0·407	101 39
1855 IV	169 49	—156 39	8·5327	1·025	104 20
1835 I	170 52	+149 48	6·8101	0·019	59 1
1862 II	172 6	+159 11	8·1868 *n*	0·462	140 45
1864 II *e*	178 8	+160 34	8·3866 *n*	0·732	144 6
		+199 26	7·7312 *n*	0·162	105 15

Wir können hieraus die den einzelnen Neigungen entsprechenden Procentsätze der Kometen, für welche $\Delta \lesseqqgtr 1$ ist, entnehmen und erhalten folgende Zusammenstellung:

Tabelle 13. $r = 9\cdot54$, $\sin b < \overline{9\cdot02}$.

Neigung	Zahl der Kometen für die $\Delta \leqq 1$ astr. Einh.			Theor. Procentsatz nach Tabelle 7
0— 6°	2+2 = 4,	d. i. nach Tabelle 3	100%	100%
6—10	2+2 4,		100	41—100
10—20	5 5,		33	20—41
20—30	1+3 4,		21	13—20
30—40	1+4 5,		16	10—13
40—50	3+6 9,		24	9·5
50—60	4+2 6,		15	8·5
60—70	6+2 8,		24	7·5
70—80	2+3 5,		12	7
80—90	6 6,		14	7

Tabelle 14. $r = 19\cdot18$, $\sin b < \overline{8\cdot72}$.

Neigung	Zahl der Kometen für die $\Delta \leqq 1$ astr. Einh.			Theor. Procentsatz nach Tabelle 8
0— 3°	1,	d. i. nach Tabelle 3	100%	100%
3—10	5,		71	20—100
10—30	7,		21	7—20
30—50	8,		11	4—7
50—70	6,		8	4
70—80	3,		7·5	3·5
80—90	7,		16·5	3

Tabelle 15. $r = 30\cdot05$, $\sin b < \overline{8\cdot55}$.

Neigung	Zahl der Kometen für die $\Delta \leqq 1$ astr. Einh.			Theor. Procentsatz nach Tabelle 7
0— 2°	1,	d. i. nach Tabelle 3	100%	100%
2—10	3,		43	13—100
10—20	3,		20	7—13
20—40	5,		10	4—7
40—50	4,		11	3·5
50—60	5,		13	3
60—80	2,		3	2·5
80—90	4,		10	2

Die in Tabelle 5, 13, 14, 15 enthaltenen Resultate lassen sich sehr übersichtlich graphisch darstellen, wenn man die Neigungen als Abscissen, die Procentsätze als Ordinaten aufträgt; man erhält so für die theoretischen Procentzahlen eine

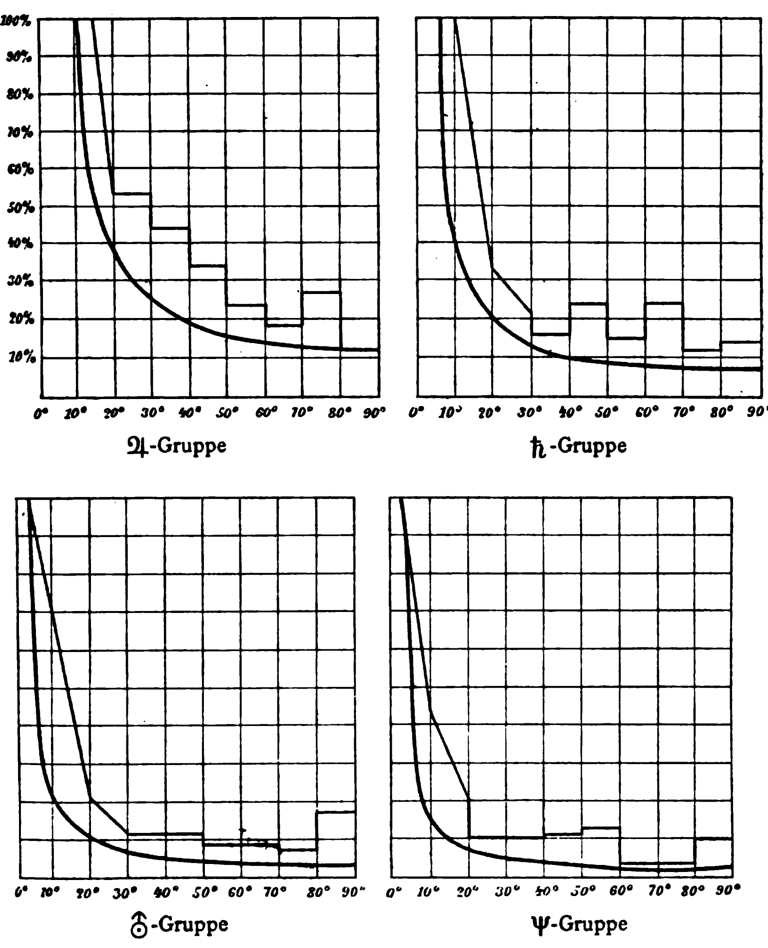


Fig. 1.

Curve, für die wirklichen eine gebrochene Linie. Stellt die Fläche des Quadrates in der Zeichnung die Gesammtheit aller Kometen dar, so das von der Curve und den Coordinatenaxen begrenzte Flächenstück die Zahl derjenigen Kometen, welche zufällig der betreffenden Planetenbahn auf weniger als 1 astr.

Einh. nahekommen. Die Procentzahlen, wie sie die gebrochene Linie darstellt, sind erheblich größer als die durch die Curve dargestellten. Am auffallendsten sind aber die Maxima für die Neigungen 80—90° für die drei letzten Gruppen. Es ist naheliegend, hiefür eine gemeinsame Ursache zu vermuthen und zu untersuchen, inwiefern die hier gefundenen Resultate dadurch beeinflusst werden, dass die Vertheilung der Elemente der uns »bekannten« Kometen keine zufällige ist.

Nach den Untersuchungen von Holetschek sind die Längen der Perihele bei den uns bekannten Kometen so vertheilt, dass ein Überwiegen der in der Nähe von 90 und 270° befindlichen Werte besteht. Ordnen wir nun die zu den vier Gruppen gehörigen Kometen von 80—90° Neigung nach Längen des Perihels, so erhalten wir folgendes Bild:

Tabelle 16.

Länge des Perihels	Zahl der Kometen von 80—90° Neigung			
	♃-Gruppe	♄-Gruppe	♅-Gruppe	♆-Gruppe
0°—60°	1	2	0	0
60—120	0	0	3	0
120—180	2	1	0	0
180—240	2	1	0	0
240—300	0	1	3	4
300—360	0	1	0	0

Wir sehen also, dass unser Resultat bei den zu den zwei letzten Gruppen gehörigen Kometen wesentlich dadurch beeinflusst wird, dass die Perihele derselben in der Umgebung von 90° und 270° liegen. Bei den Kometen der ♅-Gruppe liegt bis auf einen die Hälfte der Perihele bei 90°, die andere Hälfte bei 270°. Bei den Kometen der ♆-Gruppe liegen jedoch alle Perihele in der Nähe von 270°. Es ist dies eine sehr eigenthümliche Erscheinung. Die hiehergehörigen Kometen sind aber noch in einer anderen Beziehung merkwürdig. Es liegt nämlich in der Natur der Sache, dass bei den zu den vier Gruppen

gehörigen Kometen starker Neigung die Stelle $r = a$ in der Nähe eines der Knoten liegt. Es ist daher zu erwarten, dass wenn man für diese Kometen den dem ☊, respective ☋ entsprechenden Radius Vector $r = q/\cos^2 {}^1/_2 \bar{\omega}$, respective $r = q/\sin^2 {}^1/_2 \bar{\omega}$ berechnet, man für die einzelnen Gruppen nahe gleiche Werte von r erhalten werde. So ist z. B.

Tabelle 17.

☋	i	q	r Knoten
1867 III	96°34'	0·33	4·52
1871 I	87 36	0·65	4·97
1886 V	87 40	0·26	7·59
1896 IV	88 26	1·14	9·30
1894 II	87 4	0·98	10·46
1774	83 20	1·43	10·53
1892 II	89 42	1·97	10·76
1861 II	85 26	0·82	12·36
1707	88 38	0·86	15·61
1849 I	85 3	0·96	16·38
1781 I	81 43	0·78	18·22
1886 VIII	85 35	1·48	19·62
1819 II	80 45	0·34	24·96
1874 VI	99 13	0·51	25·34
1813 II	98 52	1·22	25·84
1863 III	85 30	0·63	28·91

Bezüglich der Lage der Knoten der übrigen nicht zu den vier Gruppen gehörigen Kometen von 80—100° Neigung zeigt eine analoge Zusammenstellung, dass nahe gleiche Werte von r über 30 astr. Einh. hinaus nicht vorhanden sind. Das in Tabelle 17 dargestellte Resultat hat eine gewisse Analogie mit den von Roller in Astr. Nachr. 1797 vom Jahre 1870 durch Anordnung der elliptisch berechneten Kometen nach Apheldistanzen erhaltenen Mittelwerten.

Die Vertheilung der Perihellängen der übrigen Kometen der vier Gruppen von 30° Neigung angefangen ist:

Tabelle 18.

i	π 0—10°				60—120°				120—180°			
	1.,	2.,	3.,	4. Gr.	1.,	2.,	3.,	4. Gr.	1.,	2.,	3.,	4. Gr.
30—40°	2	1	1	0	2	0	0	0	2	1	0	0
40—50	1	1	0	0	4	3	2	1	4	1	0	1
50—60	2	2	2	1	2	0	0	0	1	1	3	1
60—70	1	1	0	0	2	1	0	0	0	1	0	0
70—80	0	0	0	0	2	1	1	0	1	0	1	0
80—90	1	2	0	0	0	0	3	0	2	1	0	0
Summe der ☊	18				24				21			

i	180—240°				240—300°				300—360°			
	1.,	2.,	3.,	4. Gr.	1.,	2.,	3.,	4. Gr.	1.,	2.,	3.,	4. Gr.
30—40°	3	1	0	0	2	2	2	0	3	0	1	1
40—50	2	0	0	0	0	2	1	1	2	1	1	1
50—60	2	2	0	1	2	1	0	1	0	0	1	1
60—70	0	1	0	0	3	3	0	0	0	1	0	1
70—80	2	1	1	1	1	1	0	0	5	2	0	0
80—90	2	1	1	0	0	1	3	4	0	1	0	0
Summe der ☊	21				30				22			

Diese Zahlen mit der graphischen Darstellung verglichen lassen erkennen, in welcher Weise einzelne Maxima der gebrochenen Linie durch die Häufung der Perihele an bestimmten Stellen beeinflusst werden. Aus den am Fuße der Tabelle gegebenen Summen ist überhaupt ein Überwiegen der Perihele bei 90° und 270° ersichtlich. Es wäre denkbar, die Procentsätze abzuleiten, indem man den Kometen je nach der Lage

der Perihele verschiedene Gewichte ertheilt. Wir haben jedoch noch zu untersuchen, inwieweit die Periheldistanz auf die hier in Betracht kommenden Fragen von Einfluss ist. Zu diesem Zwecke habe ich ein constructives Verfahren angewendet, welches den Vortheil großer Übersichtlichkeit hat. Aus

$r = q/\cos^2 {}^1\!/_2 v$, $\sin b = \sin u \sin i$, $u = \tilde{\omega} \pm v$, $\Delta = 2a \sin\frac{b}{2}$

folgt durch Substitution:

$$\Delta = \frac{2a^2 \sin i}{\sqrt{4a^2-\Delta^2}}\{\pm 2\cos\tilde{\omega}\sqrt{q/a}\sqrt{1-q/a}-\sin\tilde{\omega}(1-2q/a)\}.$$

Dieser Ausdruck stellt den Abstand einer parabolischen Bahn von einem in der Ekliptik mit dem Radius a beschriebenen Kreise dar für jene zwei Stellen, für welche $r = a$ ist. Da wir uns auf Werte von $\Delta < 1$ beschränken, so kann man im Nenner Δ^2 gegen $4a^2$ vernachlässigen und erhält, wenn man noch setzt:

$$\alpha = \pm a \sin i \sqrt{q/a}\sqrt{1-q/a} \qquad \Delta = 2\alpha\cos\tilde{\omega} + 2\beta\sin\tilde{\omega}.$$
$$2\beta = -a \sin i (1-2q/a)$$

Betrachtet man nun Δ und $\tilde{\omega}$ als variabel, so stellt diese Gleichung einen durch den Coordinatenanfang gehenden Kreis dar. Δ ist der Radius Vector, $\tilde{\omega}$ der Polarwinkel, α und β sind die Coordinaten des Mittelpunktes, der Radius des Kreises ist: $R = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{a}{2}\sin i$, ist also von q unabhängig. Es sind α und β für einen bestimmten Wert von a und i Functionen von q. Variiert q von 0 bis a, so bewegt sich der durch $\alpha\beta$ dargestellte Kreismittelpunkt auf einem vom Coordinatenanfang als Mittelpunkt mit dem Radius $\frac{a}{2}\sin i$ beschriebenen Kreise.

Nehmen wir z. B. $a = 5{\cdot}20$, $i = 90°$, $q = 1$ an, so wird:

$$\alpha = \pm 2{\cdot}05$$
$$\beta = -1{\cdot}60$$
$$R = 2{\cdot}60,$$

sei Strecke S die Einheit. Vom Coordinatenanfang O aus beschreiben wir mit dem Radius $R = 2 \cdot 60$ einen Kreisbogen MN. Die Coordinaten $\alpha = \pm 2 \cdot 05$, $\beta = -1 \cdot 60$ bestimmen auf demselben zwei Punkte P und Q. Von diesen als Mittelpunkt beschreiben wir die durch den Coordinatenanfang gehenden Kreise I und II. Dann sind die Radien Vectoren dieser Kreise die Δ, die zugehörigen Polarwinkel die $\bar{\omega}$. Ein aus dem Coordinatenanfang mit dem Radius 1 beschriebener Kreis schneidet

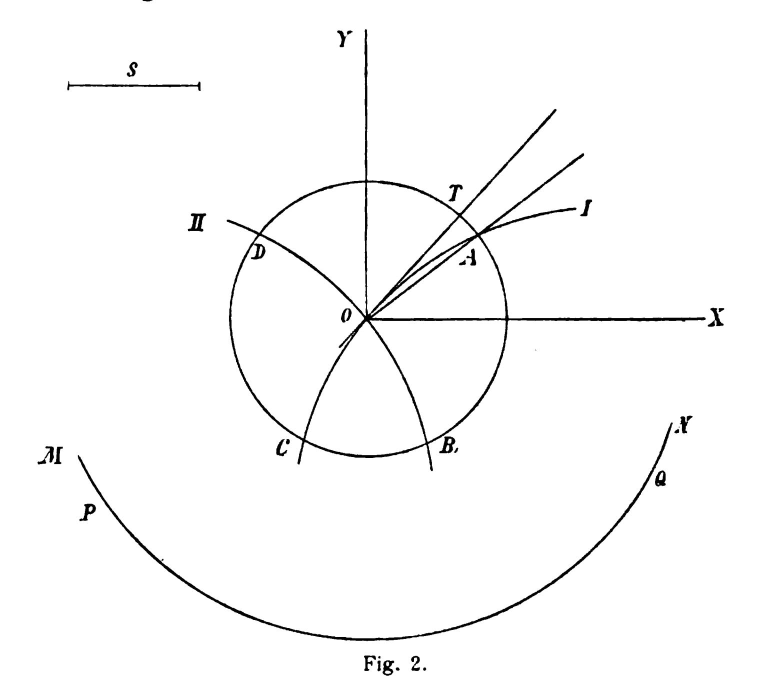


Fig. 2.

die Kreise I und II in vier Punkten $ABCD$. Ziehen wir nun die Radien Vectoren OA, OB, OC, OD und die Tangenten an die Kreise I und II im Punkte O OT, OT'..., so geben die Winkel XOA und XOT, ebenso in den anderen Quadranten die entsprechenden Winkel die Grenzen für $\bar{\omega}$ an, innerhalb welcher $\Delta \leqq 1$ ist.

Für andere Werte von i sind für α, β, R Werte zu nehmen, welche proportional $\sin i$ sind. Lassen wir nun q von 0 bis a variieren, dann erreicht α ein Maximum für $q = \frac{a}{2}$ (in unserem

Beispiele 2·60) und nimmt sowohl für größere als kleinere Werte von q bis 0 ab. Es wird in der Grenze für

$$q = 0 \qquad \alpha = 0 \qquad \beta = -\frac{a}{2}$$

$$q = a \qquad \alpha = 0 \qquad \beta = +\frac{a}{2}.$$

Für den Fall des Maximums liegen die Punkte PQ auf der Abscissenaxe, der Sector AOT an der Ordinatenaxe.

Für die beiden Grenzfälle liegen die Punkte PQ auf der Ordinatenaxe, der Sector AOT an der Abscissenaxe.

Es ist leicht ersichtlich, dass der Winkel AOT nichts anderes ist als die in Tabelle 1, 7, 8, 9 gegebene obere Grenze von u. Da die Werte von $\bar{\omega}$ für die verschiedenen Werte von q durch einfache Drehung der Punkte PQ auf dem Kreise MN erhalten werden, so ist klar, dass das Intervall AOT von q unabhängig ist. Wir waren daher berechtigt, für einen bestimmten Wert der Neigung die Procentsätze aus der oberen Grenze von u zu bestimmen. Man kann nun leicht eine Tabelle anlegen, in welcher mit zwei Eingängen i und q die Werte von $\bar{\omega}$ erhalten werden, für welche $\Delta \leqq 1$ ist. Ich sehe hier von der Wiedergabe dieser Tabelle der Raumersparnis wegen ab und bemerke nur, dass diese Werte sehr einfach aus:

$$v = 2 \operatorname{arc} \cos \sqrt{q/a} \qquad \bar{\omega} = u \pm v,$$

wo u in jedem Falle die in den Tabellen 1, 7, 8, 9 gegebenen oberen Grenzen vorstellt, erhalten werden. Die so sich ergebenden Werte von $\bar{\omega}$ und die zugehörigen Supplementwinkel sind dann die oberen Grenzen von $\bar{\omega}$, die unteren Grenzen folgen für $u = 0$. So ist z. B. für

$$a = 30\cdot05$$
$$i = 90°$$
$$q = 0\cdot70$$

das Intervall für $\bar{\omega}$:

15° 32′—	17° 34′
162 26 —	164 28
197 34 —	199 36
340 24 —	342 26

Ich habe nun anderseits eine Tabelle mit zwei Eingängen q und i angelegt, in welcher die Werte von $\bar{\omega}$ für alle hier untersuchten Kometen mit Ausschluss der kurzperiodischen eingetragen wurden. Man kann dann die Procentsätze für die einzelnen Gruppen (q, i) bestimmen. Leider ist aber die Anzahl Kometen, welche für eine solche Gruppe zur Verfügung steht, so gering, dass man kaum bindende Schlüsse hieraus ziehen kann. Bei der zunehmenden Zahl der alljährlichen Kometenentdeckungen dürfte in etwa 50 Jahren das statistische Material so angewachsen sein, dass ähnliche Untersuchungen mit größerem Erfolge unternommen werden könnten. Ich möchte indes aus dieser Tabelle doch die Kometen zwischen 0·6 und 1·2 Periheldistanz und 30—90° Neigung anführen, da hieraus die immerhin hohen Procentsätze auch für die einzelnen kleinen Gruppen ersichtlich sind. Neben den Werten von $\bar{\omega}$ ist angeführt, zu welcher der vier Gruppen der betreffende Komet gehört.

Tabelle 19.

i	q 0·6—0·8	0·8—1·0	1·0—1·2
30—40°	62°12' ♃ 122 7 ♃ 123 34 ♃ 131 32 ♃ 180 58 311 57 ♃	87°17' 237 45 ♃ 331 45 ♃♄⛢	6°16' 24 31 ⛢ 60 8 ♃ 85 13 95 5 172 18 225 17 ♃♄
40—50°	118°28' ♃ 129 56 ♃ 215 1 ♃♄ 346 6 ♆ 359 56	20°39' ⛢♆ 26 54 37 13 ♃♄ 92 38 93 58 114 36 ♃ 147 16 ♄ 211 15 ♄ 230 34 ♃ 331 35 ♄⛢	35°37' ♄ 36 32 ♃♄ 65 20 ♃ 204 36 ⛢♆

i	*q* 0·6—0·8	0·8—1·0	1·0—1·2
50—60°	42°52' ♃ 72 14 104 47 336 5 ♄ ♅	63° 8' ♃ 95 48 107 14 199 13 ♆ 331 22 ♅ 347 27	21°53' ♆ 85 15 181 5 198 13 331 57 ♄ ♅
60—70°	4° 8' 11 41 30 26 ♄ 85 40 115 41 119 28 152 22 ♄ 245 39 328 30 ♄ 354 15	114°56' 152 46 ♄ 236 35 ♃ 330 21 ♄ 348 5	4° 0' 33 11 103 15 180 32 314 6 ♃ ♄ 345 52
70—80°	74°34' 86 20 110 53 136 29 ♃ 138 3 ♃ 199 12 205 36 ♄ 357 13	3°44' 38 34 ♃ ♄ 59 12 ♃ 84 15 115 26 213 26 ♄ 232 27 ♃ 268 33 273 55 298 46	47°15' ♃ 65 24 ♃ 96 20 116 46 ♃ 205 40 ♅ 209 42 ♅
80—90°	12°53' ♅ 55 37 74 27 109 34 121 35 126 35 ♃ 156 11 ♅ 193 47 222 31 ♃ 242 53	17°28' ♆ 27 8 ♅ 177 18 208 1 ♅ 254 18 324 17 ♄ 330 6 ♄	41° 2' ♄ 112 19 ♃ 115 29

Schlüsse aus so wenig zahlreichen statistischem Materiale erfordern die größte Vorsicht. Ich möchte mich daher hier beschränken, auf die auffallend hohen Percentsätze der zu den einzelnen Gruppen gehörigen Kometen hinzuweisen.

Es ist im Eingang der vorliegenden Arbeit der kurzperiodischen Kometen Erwähnung geschehen; nachdem dieselben bisher ausgeschlossen wurden, sollen übersichtlich die Bahnlagen derselben zur Jupiterbahn angegeben werden. Ganz innerhalb der Jupiterbahn liegen die Kometenbahnen, welche durch die gruppenweisen Neigungen auffallend sind:

1844 I	*i* 2°55'		1891 V	*i* 5°23'		1819 IV	*i* 9° 1'
1894 IV	2 58		1884 II	5 28		1879 III	9 46
1886 IV	*i* 12°43'		1892 III	*i* 20°47'			
1894 III	12 44						
1890 VII	12 50		1783	45 7.			
1891 III	12 55						

Von den übrigen 20 kurzperiodischen Kometen nähem sich 17 der Jupiterbahn an 2 Stellen, 3 an einer Stelle auf weniger als 1 astr. Einh., wie aus Tabelle 20 ersichtlich.

Tabelle 20.

Komet	$r = 5 \cdot 20$ v	sin b	Δ	i	l 1900
1892 V	197°34'	8 8357	0·356	31°16'	33° 7'
1766 II	172 42	8·3961 *n*	0·130	8 2	65 53
	187 18	8·0234	0·055		80 20
1858 III	159 17	8·4624 *n*	0·151	19 30	80 26
1892 IV (W)	166 26	8·9628 *n*	0·477	14 32	83 22
	193 34	8·3939	0·129		109 41
1890 V (d'A)	159 3	9·1040 *n*	0·664	15 43	119 19
1896 V Giacob.	157 54	9·2401 *n*	0·904	11 23	132 5
1895 II Swift	154 27	8·5066 *n*	0·167	3 0	132 38
1890 V (d'A)	200 57	8 8138	0·338	15 43	159 50
1889 V	162 18	8·7728	0·308	6 4	164 11

Komet	$r = 5 \cdot 20$ v	sin b	Δ	i	l 1900
1770 I Lexell	167°48'	8·1645	0·076	1°34'	165°53'
1893 III (Fi)	159 16	8·6816	0·250	3 2	167 24
1852 III (B)	160 0	8·9339	0 447	12 34	169 4
1881 V	154 4	9·0582	0·594	6 51	172 48
1896 V Giacob.	202 6	8·7739 n	0·309	11 23	176 7
1891 II (Wo)	159 50	9·2923 n	1·019	25 15	181 25
1895 II Swift	205 33	8·0818	0 063	3 0	183 40
1889 VI	144 59	9·0073 n	0·529	10 17	184 53
1770 I Lexell	192 12	8·3602	0·119	1 34	190 17
1889 V	197 42	7·3799 n	0·012	6 4	199 26
1888 IV (F)	151 26	8·3992 n	0·130	11 20	202 34
1893 III (Fi)	200 44	8·3283	0·111	3 2	208 52
1896 VII Perrine	160 48	9·1354 n	0·710	13 40	212 9
1891 II (Wo)	200 10	8·9809	0·497	25 15	218 16
1881 V	205 56	8·6417	0·228	6 51	224 48
1896 VII Perrine	199 12	8·1066	0·066	13 40	249 41
1889 VI	215 1	9·2368 n	0·897	10 17	255 35
1885 IV (Tu)	141 18	9·2247 n	0·872	54 20	262 54
1743 I	172 17	6·8752	0·004	1 54	267 48
1852 III (B)	200 0	9·2882	1·010	12 34	269 16
1743 I	187 43	7·9071 n	0·042	1 54	283 14
1894 I	153 36	8·5152 n	0·170	5 32	284 14
1879 I (Br)	168 54	8·5141 n	0·170	29 23	284 57
1888 IV (F)	208 34	9·1761	0·780	11 20	285 59
1879 I (Br)	191 6	9·3329 n	1·119	29 23	304 39
1894 I	206 24	8·9638 n	0·478	5 32	337 3

Eine Vergleichung der Tabellen 4 und 20 zeigt, dass in Länge 284° die Kometen 1854 V, 1879 I (Br), 1888 III, 1892 VI und 1894 I innerhalb weniger Minuten die Jupiterbahn kreuzen. Ich hebe dies hier bloß deshalb hervor, weil für 2 derselben (1879 I und 1894 I) nach V. J. 1895, S. 124 eine nahezu gleichzeitige Anwesenheit an dieser Bahnstelle stattgefunden hat. Diese Gruppe würde eine nähere Untersuchung verdienen. Zu

bemerken wäre hiezu noch, dass in Länge 280° der absteigende Knoten der Jupiterbahn sich befindet. Betrachtet man die auf 1900 reducierten Längen der Schnittpunkte der Kometenbahnen in Tabelle 20, so gewinnt man die Vorstellung, dass die Jupiterbahn von kurzperiodischen Kometenbahnen geradezu eingehüllt ist. Ein hienach construiertes Modell würde einen überaus charakteristischen Anblick gewähren. Es ist leicht zu ersehen, dass für diese Kometen die Bedingungen für einen fortdauernden Umwandlungsprocess der Bahnelemente vorhanden sind.

Untersuchungen über permanente Magnete. IV.

Bemerkungen über die Abnahme des Momentes

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1900.)

Die Abnahme des Momentes permanenter Magnete ist wiederholt Gegenstand eingehenden Studiums gewesen; es ist jedoch bisher nicht gelungen, ein allgemein giltiges Gesetz dafür aufzufinden. Hansteen[1] hatte im Jahre 1842 den Versuch gemacht, den Kraftverlust der Magnete durch die einfache Formel

$$M = C + Be^{-qt}$$

darzustellen. Darin bedeutet M das Moment des Magnetes zur Zeit t, C das Moment für $t = \infty$. C und q sind constante Größen. Die Beobachtungen Hansteens zeigten eine nur mäßige Übereinstimmung mit der Formel, eine Thatsache, welche aber auch auf Beobachtungsfehler geschoben werden konnte. Viel genauere Beobachtungen hat Lamont angestellt und »dabei die früher nicht beachtete Thatsache erkannt, dass der Kraftverlust nicht in regelmäßiger Progression vor sich geht, wie man gewöhnlich anzunehmen pflegt, sondern größer wird, wenn die Temperatur hoch, und kleiner, wenn sie tief ist. Ein Magnet, der in einem Observatorium oder ungeheizten Zimmer sich befindet, verliert im Sommer viel, im Winter gar wenig oder gar nichts«.

[1] Vide: Lamont, »Handbuch des Magnetismus« in Karstens »Allgemeine Encyklopädie der Physik«, Leipzig, 1867, 5407.

Ferner macht Lamont auf Grund seiner Beobachtungen folgende Bemerkung:

»Bezüglich der Darstellung der allmählichen Abnahme des Magnetismus durch eine mathematische Formel darf überhaupt bezweifelt werden, ob der Kraftverlust am Anfange und in späterer Zeit nach gleichem Gesetze vor sich geht.«

Diese Ansicht Lamonts scheint in der That zutreffend zu sein. Danach muss aber bei der Abnahme des Momentes mehr als eine Ursache thätig sein, und zwar in der Weise, dass bald die eine, bald die andere überwiegt. Die Annahme zweier selbständig wirkender Ursachen würde schon genügen, die scheinbare Regellosigkeit der Beobachtungsdaten über die zeitliche Abnahme des Momentes zu erklären und die Unmöglichkeit der Darstellung des Kraftverlustes durch die Hansteen-sche Formel ersichtlich zu machen.

Im Nachfolgenden sollen die beim Momentverluste wirksamen Ursachen besprochen und zugleich auf Grund der in der Untersuchung III enthaltenen Beobachtung vorläufig einige Belege für das Vorhandensein und für die Wirkungsweise derselben beigebracht werden. Für die weitere Erforschung dieser Ursachen werden wohl die Beobachtungen so zu machen sein, dass man die beiden Ursachen möglichst trennt, respective bei der experimentellen Anordnung das Übergewicht bald der einen, bald der anderen ertheilt.

Im allgemeinen können zwei Hauptursachen für die allmählichen Änderungen des Momentes angeführt werden, deren Wirkung wieder von verschiedenen Umständen, wie Erschütterung, Temperatur u. s. w. beeinflusst wird.

Als erste Ursache kann die Nachwirkung bezeichnet werden, welche sich als ein Folgezustand der durch die magnetisierende Kraft im Magnetstabe hervorgebrachten Änderungen ergibt.

Ob diese Änderungen in Umlagerungen, respective Drehungen der Molecüle oder Vertheilungen innerhalb der Molecüle beruhen, soll hier nicht weiter in Betracht gezogen werden. Es ist jedoch eine Thatsache, dass durch die Magnetisierung eines Stabes auch andere physikalische Eigenschaften desselben geändert werden, und sodann ist es ja bekannt, dass es eine

magnetische Nachwirkung oder sogenanntes »Kriechen« gibt, welches eine ganz besondere Ähnlichkeit mit der elastischen Nachwirkung hat.

Die Magnetisierung hinterlässt also einen allmählich ablaufenden Folgezustand, der in besonders auffallender Weise beim weichen Eisen und bei kleinen Feldstärken auftritt; er ist jedoch auch bei großen Feldstärken vorhanden, wie dies von mir nachgewiesen wurde. Ein gleicher Folgezustand tritt sicher auch beim Stahl auf, und die Abnahme des Momentes insbesonders in der ersten Zeit nach der Magnetisierung dürfte in diese Kategorie der Erscheinungen einzureihen sein. Der Verlauf dieser Nachwirkungen wird von der Form, respective dem Dimensionsverhältnisse beeinflusst.

Die zweite Ursache der Momentabnahme ist in den molecularen Structuränderungen, respective Umlagerungen zu suchen, welche sich als eine Folge vorausgegangener Deformationen, insbesonders aber vorausgegangener Temperaturerhöhungen ergeben. Jeder Metallstab oder Draht hat ja doch einmal eine Erwärmung bis zur Schmelztemperatur, der Magnetstab auch eine solche bis zur Härtungstemperatur durchmachen müssen. Diese Proceduren hinterlassen alle einen inconstanten Zustand der Molecüle, welcher sich je nach dem Materiale mehr oder weniger schnell einem definitiven Zustande nähert und während dessen durch einen fortwährend veränderlichen Stand der physikalischen Eigenschaften des Körpers bezeichnet ist.

Schon Lamont[1] hat nachgewiesen, dass die Inductionsfähigkeit des weichen Eisens mit der Zeit abnimmt. So hatte z. B. die Inductionsfähigkeit eines Eisenstabes im Verlaufe eines Jahres von 1 auf 0·873 abgenommen. An der gleichen Stelle werden Beobachtungen Bessels angeführt, wonach der Wärmeausdehnungscoefficient der zu den Basismessungen benützten Eisenstangen eine langsame aber sicher constatierbare Abnahme zeigt. Es hatte z. B. Stab Nr. 1

im	Jahre	1834	den	Coefficienten	0·0000144
»	»	1846	»	»	139
»	»	1854	»	»	127.

[1] Vide: »Handbuch des Magnetismus« etc., S. 257.

Die in einem frisch ausgeglühten Eisendrahte auftretende magnetische Nachwirkung wird nach meinen Beobachtungen[1] immer schwächer.

Die angeführten Beobachtungen, die sich noch durch mehrere andere ergänzen ließen, deuten darauf hin, dass im weichen Eisen Umlagerungen vor sich gehen, zufolge welcher es immer härter wird. Ähnliche Änderungen sind auch bei anderen Metallen vorhanden, wie dies z. B. aus den Beobachtungen an Widerstandsspulen hervorgeht. Auch der Stahl wird nicht frei sein von solchen Nachwirkungen, nur ist es nicht ausgeschlossen, dass er wenigstens von einem gewissen Härtegrade an infolge derselben nicht härter, sondern weicher wird,[2] und dass es zwischen dem sehr harten Stahle und dem weichen Eisen einen mittleren Zustand gibt, bei dem die allmählichen Veränderungen keine Verschiebung der magnetischen Eigenschaften bedingen.

Im allgemeinen aber wird durch solche Vorgänge auch der Magnetismus eines Stabes verändert, und zwar nimmt er ab. So wenigstens sind die Beobachtungen an Magneten zu deuten, die noch Jahre lang nach der Magnetisierung eine Abnahme des Momentes zeigen.

Was nun den Einfluss des Härtegrades auf den Ablauf dieser Änderungen anbelangt, so möchte ich auf die in Untersuchung III mitgetheilten Beobachtungen hindeuten, wonach bei ruhigem Lagern die Magnete ihr Moment umso besser halten, je kleiner ihre Coercitivkraft ist.

Die Wirkung beider Ursachen ist wieder von der Temperatur abhängig. Wie weit dieselbe von der Höhe der Temperatur abhängt, oder ob sie überhaupt nur bei Temperaturschwankungen auftritt, kann nach dem jetzigen Stande der Erfahrung nicht entschieden werden.

Sowohl Hansteen, wie Lamont hatten ihre Magnete vor Beginn der Beobachtungen zumeist abwechselnd in warmes und kaltes Wasser getaucht; auch erstreckten sich ihre Beobachtungen auf einen größeren Zeitraum; sie hatten es daher

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II a., März 1897.

[2] Nach Barus wird Stahl durch Temperaturschwankungen, wie sie in Zimmern vorkommen, weicher. Vide: Thompson, »Der Elektromagnet«, S. 357.

hauptsächlich mit der zweiten Ursache zu thun. Dass nichtsdestoweniger der Gang der Abnahme durch die Hansteen'sche Formel nicht genügend gut dargestellt werden konnte, dürfte seinen Grund in dem Wechsel der Temperatur haben.

Ich habe in einer früheren Abhandlung[1] einige Beobachtungen über die Abnahme des Momentes verschiedener Magnete mitgetheilt. Die Beobachtungen umfassen zwei Perioden. Die erste beginnt mit dem Zeitpunkte, respective zwei bis drei Stunden nach der Magnetisierung und hat eine Dauer von 3 Wochen; die zweite beginnt circa 2 Monate nach der Magnetisierung und hat eine Dauer von 15 Monaten. Das Ziel dieser Beobachtungen galt zwar der Beantwortung anderer Fragen, doch lässt sich daraus auch einiges über die Wirkungsweise der beiden oben angeführten Ursachen erschließen.

Bevor ich zu diesem Punkte komme, möchte ich noch in Kürze einige Daten über die untersuchten Magnete wiederholen.

Die Magnete, 40 an der Zahl, waren aus steirischem Wolframstahl von Böhler & Cie. in vier Gruppen zu 10 Stück. Jede Gruppe hatte je zwei ganz gleiche Magnete aus Stahlsorten mit den Fabriksmarken »UI«, »00«, »0«, »45« und »43«.

Der Querschnitt der Stäbe war quadratisch; die übrigen Dimensionen sind aus der nachfolgenden Zusammenstellung ersichtlich.

Gruppe	Länge	Seite	Dimensionsverhältnis
I	15 *cm*	6 *mm*	25
II	6	6	10
III	10	4	25
IV	4	4	10

Diese Magnete sind im Monate April 1898 in der Fabrik selbst möglichst gleichmäßig gehärtet worden. Die ersten Beobachtungen hinsichtlich der Abnahme des Momentes der einzelnen Magnete geschahen in der Zeit vom 2. bis 6. Mai 1898, und zwar wurde die erste Beobachtung des Momentes zwei bis drei Stunden nach der Magnetisierung gemacht. Zur Magnetisierung diente das homogene Feld einer stromdurchflossenen

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 109, Abth. II. a, April 1900.

Spule von circa 700 abs. E. Die zweite Momentbestimmung erfolgte 2 Tage nach der Magnetisierung, eine dritte 6, eine vierte 13 und eine fünfte 27 Tage darnach.

Die Art und Weise der Beobachtung ist schon in der erwähnten Abhandlung beschrieben worden; ich bemerke nur, dass auf die Variationen der Horizontalcomponente Rücksicht genommen wurde. Es ergaben sich in den verschiedenen Perioden folgende (Tabelle I) mittlere Momentabnahmen pro Tag und Magnet, ausgedrückt in Procenten des ganzen Momentes.

Aus den Daten dieser Tabelle geht Folgendes hervor:

1. Es ist klar, dass sich der durch die Daten dieser Tabelle ausgedrückte Verlauf der Abnahme nicht durch eine einfache Formel, etwa wie die von Hansteen ausdrücken lässt.

Tabelle I.

Periode	Procentabnahme pro Tag und Magnet			
	I	II	III	IV
0. bis 2. Tag.......	0·141	0·134	0·086	0·077
2. bis 6. Tag.......	0·039	0·046	0·029	0·047
6. bis 13. Tag.......	0·034	0·058	0·029	0·049
13. bis 27. Tag.......	0·030	0·031	0·021	0·021

2. Die Abnahme in den ersten zwei Tagen ist besonders groß; dann fällt sie plötzlich, um sich von da ab bis zum 27. auf einem sehr langsam sinkenden Niveau zu halten. Insbesondere kann die Abnahme pro Tag und Magnet vom 2. bis 13. Tage als constant angesehen werden und sie ist dann für die Zeit vom 13. bis 27. Tage merklich kleiner. Gruppe IV zeigt allerdings für diese letzte Periode einen bedeutenden Sprung; es sind jedoch gerade die Beobachtungen dieser Gruppe mit den größten Fehlern behaftet; überdies konnten bei derselben nur die Bestimmungen von 8 Magneten verwertet werden.

3. In den ersten zwei Tagen ist die procentische Abnahme bei den Dimensionsverhältnissen 25 größer als bei 10. Für die Gesammtperiode vom 0. bis 27. ist es jedoch umgekehrt.

Die beobachteten Thatsachen lassen sich durch die Annahme zweier Ursachen erklären, wenn man annimmt, dass der Ursprung dieser Ursachen vom Anfangspunkte der Beobachtungen zeitlich verschieden weit weg liegt. Dies war ja bei diesen Magneten in der That der Fall. Die Härtung geschah etwa drei Wochen, die Magnetisierung aber unmittelbar vor Beginn der Beobachtungen. Die von der Magnetisierung herrührenden Nachwirkungen überwiegen in den ersten zwei Tagen in leicht wahrnehmbarer Weise. In dieser Zeit müssen aber die Nachwirkungen bei langgestreckten Magneten größer sein als bei kurzen, weil ja bei gleichem Felde die Magnetisierungsintensität vom Dimensionsverhältnisse abhängt.

Um also den durch die Magnetisierung bewirkten molecularen Vorgängen nachzuforschen, wird es sich empfehlen, Stahlstäbe, deren Härtungsdatum schon sehr weit zurückliegt, im homogenen Felde, und zwar nur einmal in einem bestimmten Sinne zu magnetisieren, das Feld langsam auf Null sinken zu lassen und sodann das Moment des Stabes, insbesondere in den ersten 2 bis 4 Tagen durch häufige Beobachtungen zu controlieren.

Für die weiteren Beobachtungen vom Juli 1898 bis October 1899 wurde von jeder Gruppe ein Magnet von je einer Marke ausgeschieden, so dass schließlich noch 20 Magnete übrig blieben. Es sei noch bemerkt, dass die Magnete nur zur Beobachtung des Momentes auf ein Magnetometerstativ gelegt wurden, sonst aber während der ganzen Zeit in einem Kasten in der Ost—West-Richtung ruhig lagerten.

Die Momente wurden gemessen am 13. Juli, 11., respective 15. October, 25. December 1898, ferner 15., respective 16. März, 29., respective 31. Juli und 25., respective 26. October 1899.

Aus den Beobachtungen berechnen sich für die zwischen den Messungen liegenden Zeitintervalle folgende, in den Tabellen II und III[1] enthaltenen, mittleren procentischen Abnahmen pro Tag und Magnet.

[1] Diese Tabellen sind aus den Tabellen VII und VIII der vorhergehenden Abhandlung abgeleitet worden, und zwar unter Berücksichtigung der allmählichen Änderung der elektromotorischen Kraft des Clark-Elementes *R*.



Tabelle II.

Zeitintervall	Procentabnahme pro Tag und Magnet	
	I	III
13./VII. bis 11./X. 1898	0·0060	0·0124
11./X. bis 25./XII 1898.......	0·0024	0·0054
25./XII. bis 15. III. 1899......	0·0008	0·0042
15. III. bis 29./VII. 1899......	0·0036	0·0078
29./VII. bis 25./X. 1899	0·0030	0·0042

Tabelle III.

Zeitintervall	Procentabnahme pro Tag und Magnet	
	II	IV
13./VII. bis 15./X. 1898	0·0062	0·0130
15./X. bis 25./XII. 1898	0·0029	0·0069
25./XII. bis 16./III. 1899	0·0019	0·0060
16./III. bis 31./VII 1899	0·0049	0·0084
31./VII bis 26./X. 1899.......	0·0033	0·0080

Es dürfte unmöglich sein, den Verlauf dieser Beobachtungsdaten durch eine einfache Formel darzustellen, obwohl man dies erwarten sollte, da ja in dieser Zeit die von der Magnetisierung herrührenden Nachwirkungen höchst wahrscheinlich schon ganz verschwunden sind und daher nur mehr jene vom Härten stammende Ursache den Verlauf der Abnahme bestimmen sollte. Man sieht aber, dass hier noch ein von der Jahreszeit abhängiger Factor maßgebend ist, denn es ergibt sich im allgemeinen für die Wintermonate eine viel kleinere Abnahme als für die Sommermonate.

Im allgemeinen ist aber während dieser Beobachtungsperiode ein Sinken der Abnahme zu constatieren, wie dies aus

den Bestimmungen in der gleichen Jahreszeit (Juli bis October 1898 und 1899) hervorgeht.

Am wenigsten nahmen die Magnete im Zeitintervalle December bis März ab, und zwar ist dabei das Minimum beim größeren Dimensionsverhältnisse viel schärfer ausgeprägt als beim kleineren.[1]

Es ist interessant, die hier gemachten Beobachtungen mit solchen Lamonts zu vergleichen, die er über den in verschiedenen Monaten des Jahres auftretenden Kraftverlust mehrerer Magnete gemacht hat. Die angewendeten Magnete hatten jedoch schon vor dem Gebrauche einen Theil ihrer Kraft durch wiederholtes Eintauchen in kaltes und warmes Wasser verloren. Es ergaben sich für diese bei den täglichen Intensitätsbeobachtungen gebrauchten Magnete folgende Verluste, ausgedrückt in Theilen des ganzen Momentes:

	1848	1849
Jänner	0·0000	0·0000
Februar	0·0003	0·0001
März	0·0003	0·0002
April	0·0008	0·0005
Mai	0·0014	0·0007
Juni	0·0022	0·0011
Juli	0·0028	0·0016
August	0·0032	0·0022
September	0·0028	0·0022
October	0·0017	0·0013
November	0·0009	0·0007
December	0·0005	0·0001

Meine Beobachtungen stimmen mit den Lamont'schen qualitativ ziemlich überein, doch sind die Minima nicht so

[1] Es muss erwähnt werden, dass die Märzbeobachtungen auffallend hohe Werte für die Momente ergaben. Ich habe schon in der vorhergehenden Abhandlung darauf hingewiesen, dass sie aus irgend einer Ursache etwa 0·15 bis 0·2% zu hoch ausgefallen sein dürften. Berücksichtigt man das, dann gleichen sich die Abnahmen für die Intervalle December bis März und März bis Juli aus; es ergibt sich jedoch noch immer, insbesondere mit Rücksicht auf die Tendenz des Sinkens der Abnahme, dass die Kraftverluste im Winter kleiner sind als im Sommer.



scharf ausgeprägt. Es sind dabei nur folgende zwei Punkte zu beachten. Bei meinen Beobachtungen fällt der Zeitpunkt des Härtens der Stäbe in den Monat April, liegt also den ersten Zeitintervallen der Beobachtungsperiode viel näher als den letzten, während bei Lamonts Magneten dieser Zeitpunkt wahrscheinlich schon an und für sich, jedenfalls aber infolge des wiederholten Eintauchens in kaltes und warmes Wasser von dem Datum der Messungen viel weiter abstehend erscheint.

Lamont machte seine Untersuchungen in einem ungeheizten Zimmer. Nach einer brieflichen Mittheilung Prof. Edelmanns, der in den Jahren 1866 bis 1868 zu den Schülern Lamonts gehörte, hatte dieses Zimmer drei Fenster gegen Süden und wurde nie geheizt. Die Temperaturen waren daher im Winter jedenfalls sehr niedrig, doch wahrscheinlich wegen der Lage nach Süden ziemlich inconstant.

Lamont schließt aus seinen Beobachtungen, dass ein Magnet, der in einem Observatorium oder ungeheizten Zimmer sich befindet, im Sommer viel, im Winter wenig oder gar nichts verliert.

Die vorliegenden Messungen wurden in einem geheizten Zimmer gemacht. Die Temperaturhöhe dürfte im Winter im Mittel etwas niedriger gewesen sein als im Sommer. Die Temperaturschwankungen sind im Winter und Sommer nicht viel verschieden.

Die Temperaturverhältnisse liegen in unserem Falle ganz anders wie bei Lamont, und doch ist auch hier ein Einfluss der Jahreszeit zu constatieren.

Ob diese Erscheinung auch in unserem Falle auf die etwas niedrigere Wintertemperatur oder aber auf eine andere, im Winter weniger als im Sommer ausgeprägte Ursache zurückzuführen ist, darüber können erst weitere Beobachtungen einen Aufschluss bringen.

…ressibilitätsgesetz der Flüssigkeiten

von

Prof. Dr. **O. Tumlirz** in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. März 1900.)

Ich habe gefunden, dass die Compressionserscheinungen der Flüssigkeiten sich durch ein sehr einfaches Gesetz darstellen lassen, und will zunächst zeigen, wie ich dazu gekommen bin. Die van der Waals'sche Gleichung lautet:

$$\left(p+\frac{C}{v^2}\right)(v-a) = RT. \qquad 1)$$

Hierin bedeuten a, C, R Constante, p den Druck, v das specifische Volumen und T die absolute Temperatur. Hat ein Dampf eine sehr große Verdünnung, so können wir von dem Gliede $\frac{C}{v^2}$ ganz absehen und die Gleichung 1) durch die Gleichung

$$p(v-a) = RT \qquad 2)$$

ersetzen. Ein Dampf, der diese Zustandsgleichung befolgt, hat die Eigenschaft, dass bei einer umkehrbaren isothermischen Ausdehnung die von außen zugeführte Wärme ebenso groß ist als die nach außen abgegebene Arbeit und dass umgekehrt bei einer umkehrbaren isothermischen Zusammendrückung die nach außen abgegebene Wärme ebenso groß ist als die von außen zugeführte Arbeit. Diese Eigenschaft sagt aber aus, dass es in einem solchen Dampfe keine innere Arbeit, also auch keine inneren Kräfte gibt und dass mithin ein solcher Dampf ein vollkommenes Gas ist.

Aus der Gleichung 2) folgt

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{RT}{p^2} = -\frac{(v-a)^2}{RT}$$

und

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{(v-a)^2}{RTv}. \qquad 3)$$

In dem Maße, als die Verdünnung des Gases zunimmt, tritt die Größe a gegen das specifische Volumen v immer mehr zurück, so dass die Gleichung 2) sich mit zunehmender Verdünnung dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze

$$pv = RT \qquad 4)$$

nähert. Ist v das in Cubikmeter gemessene Volumen von 1 *kg* der betreffenden Substanz und drücken wir p in Kilogramm pro Quadratmeter aus, so gilt für die Constante R des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes die Beziehung

$$R = \frac{845 \cdot 224}{m},$$

wo m das Moleculargewicht bedeutet. Setzen wir diesen Wert von R in die Gleichung 3) ein, so erhalten wir

$$-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \frac{m}{845 \cdot 224} \, \frac{(v-a)^2}{Tv}. \qquad 5)$$

Wird jetzt der Druck p in Atmosphären ausgedrückt, dann haben wir die rechte Seite der Gleichung 5) mit der Zahl 10333 zu multiplicieren und erhalten

$$-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 12 \cdot 225 \, m \frac{(v-a)^2}{Tv}. \qquad \text{I.}$$

Außer dieser Beziehung wollen wir noch eine zweite ableiten. Wird das vollkommene Gas, für welches die Gleichung 2) die Zustandsgleichung ist, bei constanter Temperatur comprimiert und hat es am Anfang das specifische Volumen v_1 bei einem Drucke p_1 und am Ende das specifische Volumen v_n bei dem Drucke p_n, so folgt aus der Gleichung 2)

$$\frac{1}{v_n - a} - \frac{1}{v_1 - a} = \frac{p_n - p_1}{RT}$$

oder

$$v_1 - v_n = \frac{(p_n - p_1)(v_1 - a)}{RT}(v_n - a).$$

Führen wir wieder wie früher das Moleculargewicht m ein und drücken wir den Druck in Atmosphären aus, so wird

$$v_1 - v_n = 12 \cdot 225\, m \frac{(p_n - p_1)(v_1 - a)}{T}(v_n - a). \qquad \text{II.}$$

Um daraus v_n zu berechnen, setzt man

$$12 \cdot 225\, m \frac{(p_n - p_1)(v_1 - a)}{T} = A_n$$

und erhält

$$v_n = \frac{v_1 + aA_n}{1 + A_n}. \qquad \text{II}a$$

Als ich nun untersuchte, ob die Formeln I und II große Abweichungen ergeben, wenn man die für tropfbare Flüssigkeiten geltenden Werte einsetzt, da sah ich zu meiner nicht geringen Überraschung, dass die Formeln I und II bei passender Wahl der Constanten a die Compressionsverhältnisse der tropfbaren Flüssigkeiten vollständig wiedergeben.

In den folgenden Tabellen bedeutet β den Compressibilitätscoefficienten; er ist bei der experimentellen Bestimmung nach der Form

$$\beta = \frac{v_1 - v_2}{v_1(p_2 - p_1)}$$

gebildet, wobei die Druckgrenzen p_1 und p_2 in Atmosphären ausgedrückt sind. Die Formel I gibt den »berechneten« Compressibilitätscoefficienten. Bei dieser Rechnung wird für m das Moleculargewicht, für T die absolute Temperatur und für v das in Cubikmeter ausgedrückte Volumen, welches 1 kg der Substanz bei der herrschenden Temperatur und bei dem Anfangs-

drucke einnimmt, eingesetzt. Nach der Formel II sind die Compressionen berechnet, welche Amagat bei Wasser und Äther bis zu 3000 Atmosphären und Barus bei Äthylalkohol bis zu 400 Atmosphären ausführten.

Aus der Formel II geht auch die Bedeutung der Constanten a hervor. Je größer p_n ist, desto kleiner ist v_n; wächst p_n ins Unendliche, dann nähert sich v_n dem Grenzwerte a. Es ist also a das in Cubikmeter ausgedrückte Volumen, welches 1 kg der Flüssigkeit unter unendlich großem Drucke einnimmt.

Wasser.

$m = 18, \quad a = 0\cdot00075295.$

Die erste Columne der folgenden Tabelle enthält die Celsiustemperatur t, die zweite das specifische Volumen v, die dritte die Compressibilitätscoefficienten, welche Grassi mit den Regnault'schen Apparaten bestimmte, und die vierte die nach der Formel I berechneten Compressibilitätscoefficienten.

t	v	$\beta \times 10^6$ beob.	$\beta \times 10^6$ ber.
0·0	0·00100013	50·3	49·5
1·5	0·00100005	51·5	49·2
4·8	0·00100000	49·9	48·6
10·1	0·00100028	48·0	47·8
13·4	0·00100064	47·7	47·4
18·0	0·00100137	46·2	46·9
25·0	0·00100293	45·6	46·3
34·5	0·00100580	45·3	45·7
43·0	0·00100890	44·2	45·5
53·0	0·00101344	44·1	45·4
60·0	0·00101697		45·5
70·0	0·00102260		45 9
80·0	0·00102890		46·4
90·0	0·00103574		47·1
100·0	0·00104315		47·9

Die von Grassi gefundenen Werte reichen nur bis 53·0°. Sie zeigen zwischen 0° und 4° ein Maximum, was aber von

keinem anderen Beobachter bestätigt wurde. Nach der Formel nehmen die Compressionscoefficienten ebenso wie nach den Versuchen von Grassi bis 53° stetig ab, haben aber dann zwischen 53° und 60° ein Minimum, worauf sie wieder zunehmen. Dieses Ergebnis stimmt mit den Beobachtungen von Pagliani und Vicentini überein, welche ein Minimum bei 62° fanden.

Die folgende Tabelle betrifft die Versuche von Amagat.[1] Diese Versuche waren sämmtlich bei derselben Temperatur, und zwar bei 17·6° C. angestellt. Die erste Columne enthält die Druckgrenzen, die zweite die aus den Volumsveränderungen abgeleiteten Compressionscoefficienten. Da die Volumsveränderungen nicht direct angegeben sind, so habe ich sie aus den angegebenen Compressionscoefficienten wieder abgeleitet und die bei den oberen Druckgrenzen beobachteten Volumina in der dritten Columne unter »*v* beob.« zusammengestellt. Indem ich dann die Formeln II und II*a* anwendete, erhielt ich durch Rechnung für dieselben oberen Druckgrenzen die in der vierten Columne unter »*v* ber.« angegebenen Werte.

$$t = 17·6 \text{ C.}, \quad v_1 = 0·001001301.$$

Druckgrenzen in Atmosphären	$\beta \times 10^6$	v beob.	v ber.
1 bis 262	42·9	0·00099009	0·00098962
262 » 805	37·9	0·00096971	0 00096850
805 » 1334	33·2	0·00095268	0·00095130
1334 » 1784	30·2	0·00093973	0·00093866
1784 » 2202	27·6	0·00092889	0·00092832
2202 » 2590	25·7	0·00091963	0·00091970
2590 » 2981	23·8	0·00091107	0·00091178

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung von Rechnung und Beobachtung eine vollständige. Unsere Formeln I und II geben somit die Compressionsverhältnisse beim Wasser in jeder Beziehung gut wieder.

[1] Compt. rend., 103, p. 429—432 (1886).

Schwefelkohlenstoff.

$m = 76,\quad a = 0\cdot00064052.$

t	v	$\beta\times10^6$ beob.	$\beta\times10^6$ ber.	Beobachter
0	0·00077388	78·0	78·1	Colladon u. Sturm
3·3	0·00077680	80·4	80·3	Röntgen
15·6	0·00078795	87·2	88·7	Amagat
18·05	0·00079022	89·5	90·4	Röntgen
100	0·00088748	174	171	Amagat

Auch hier ist die Übereinstimmung von Rechnung und Beobachtung sehr gut.

Quecksilber.

$m = 200,\quad a = 0\cdot000067976.$

t	v	$\beta\times10^6$ beob.	$\beta\times10^6$ ber.	Beobachter
0°	0·000073553	3·737	3·787	G. de Metz
19·38	0·000073812	3·908	3·859	»

Äthylalkohol.

Die ausgedehntesten Versuche über die Compressibilität des Äthylalkohols rühren von C. Barus her.[1] Barus bestimmte die Länge des Alkoholfadens bei den Temperaturen 28°, 65°, 100°, 185°, 310° und bei dem Drucke von 150, 200, 300 und 400 Atmosphären. Nach Mendelejeff ist das specifische Volumen bei 28° und bei dem Drucke einer Atmosphäre gleich 0·0012778. Kennt man das specifische Volumen bei 28° C. und bei dem Drucke von 150 Atmosphären, so kann man daraus mittels der Barus'schen Tabelle die specifischen Volumina für alle die früher angegebenen Temperaturen und Drucke ableiten.

Um mit diesen Versuchsergebnissen unsere Formeln zu prüfen, haben wir $a = 0\cdot0010060$ gesetzt. Dadurch wird zufolge der Formel II das specifische Volumen für 28° C. und den Druck

---

[1] Sill. Journ. (3), 39, S. 478 bis 511; 1890. — Wied. Beibl., 14, S. 1189 bis 1191.

von 150 Atmosphären gleich 0·0012587. Es folgt dann aus den Versuchen von Barus, dass das specifische Volumen bei dem Drucke von 150 Atmosphären und bei den Temperaturen 65°, 100°, 185°, 310° die folgenden Werte hat:

$t =$	28°	65°	100°	185°	310°
$v =$	0·0012587,	0·0013028,	0·0013682,	0·0015470,	0·0028825.

Ferner hat Barus die Volumsveränderungen bestimmt, welche sich bei den angeführten Temperaturen durch eine Drucksteigerung auf 200, 300 und 400 Atmosphären ergeben, und sind dementsprechend in der folgenden Tabelle unter »*v* beob.« die betreffenden Volumina eingetragen. Anderseits habe ich an der Hand der Formel II die denselben Drucksteigerungen entsprechenden Volumveränderungen berechnet und die so erhaltenen Volumina in der folgenden Tabelle unter »*v* ber.« eingetragen.

t	Druck in Atmosph.	*v* beob.	*v* ber.
28°	150	0·0012587	0·0012587
	200	0·0012533	0·0012529
	300	0·0012427	0·0012421
	400	0·0012333	0·0012321
65°	150	0·0013028	0·0013028
	200	0·0012956	0·0012957
	300	0·0012814	0·0012824
	400	0·0012701	0·0012702
100°	150	0·0013682	0·0013682
	200	0·0013567	0·0013586
	300	0·0013386	0·0013408
	400	0·0013229	0·0013248
185°	150	0·0015470	0·0015470
	200	0·0015223	0·0015296
	300	0·0014834	0·0014981
	400	0·0014523	0·0014701

t	Druck in Atmosph.	v beob.	v ber.
310°	150	0·0028825	0·0028825
	200	0·0022743	0·0027270
	300	0·0019169	0·0024825
	400	0·0017755	0·0022987

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung bis 100° eine sehr befriedigende ist. Bei 185° sind die Abweichungen schon bedeutend, und bei 310° ist unser Gesetz nicht mehr giltig. Freilich liegt die Temperatur von 310° schon bedeutend über der kritischen Temperatur (243·6°) des Äthylalkohols.

Methylalkohol.

$m = 32,\quad a = 0\cdot0009532.$

t	v	$\beta\times10^6$ beob.	$\beta\times10^6$ ber.	Beobachter
2·75	0·0012602	107·5	105·9	Röntgen
14·7	0·0012776	104	111·8	Amagat
18·10	0·0012827	119·9	113·5	Röntgen
100	0·0014364	221	170·1	Amagat

Amylalkohol.

$m = 88,\quad a = 0\cdot0010519.$

t	v	$\beta\times10^6$ beob.	$\beta\times10^6$ ber.	Beobachter
3·65	0·0012093	83·5	79·7	Röntgen
13·8	0·0012204	88·2	87·3	Amagat
17·75	0·0012247	90·5	90·2	Röntgen
99·0	0·0013221	154	159·7	Amagat

Propylalkohol.

$m = 60,\quad a = 0\cdot0010197.$

t	v	$\beta\times10^6$ beob.	$\beta\times10^6$ ber.	Beobachter
5·60	0·00122425	89·5	89·97	Röntgen
17·70	0·00123727	97·0	96·53	»

Äthyläther.

$m = 74.$

Die ausgedehntesten Versuche über die Compressibilität des Äthyläthers rühren von G. P. Grimaldi her.[1] Grimaldi bestimmte die Volumina, welche der Äthyläther bei den Drucken von 1 *m*, 9 *m*, 17 *m*, 25 *m* Quecksilberhöhe und bei den Temperaturen 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 Grad Celsius einnimmt und leitete daraus die Compressibilitätscoefficienten ab. In der folgenden Tabelle beziehen sich die Compressibilitätscoefficienten β auf eine Drucksteigerung um eine Atmosphäre und einen Anfangsdruck von 9 *m* Quecksilberhöhe. Auch die Werte v gehören zu diesem Anfangsdrucke.

Was die Constante a anbelangt, so ergibt sich dafür aus den Grimaldi'schen Versuchen kein ganz constanter Wert, sondern es ergeben sich hiefür Werte, welche mit der Temperatur etwas abnehmen. Ich habe mich daher in der folgenden Tabelle auf die Anführung der Werte von a beschränkt.

t	v	$\beta \times 10^6$ beob.	a
0	0·0013565	157	0·0011025
10	0·0013774	176	0·0011015
20	0·0013987	196	0·0011003
30	0·0014213	217	0·0010993
40	0·0014447	240	0·0010979
50	0·0014706	271	0·0010933
60	0·0014986	309	0·0010851
70	0·0015286	351	0·0010770
80	0·0015605	393	0·0010708
90	0·0015947	436	0·0010658
100	0·0016312	480	0·0010622

Amagat hat[2] den Äthyläther bei 17·4° C. sehr hohen Drucken ausgesetzt. Ich habe diese Versuche in derselben

[1] Atti dell'Acad. Gioenia di Sc. Naturali di Catania (3), 18, p. 1 bis 89; 1885. — Wied. Beibl., 10, S. 473 bis 476.

[2] Compt. rend., 103, p. 429 bis 432 (1886).

Weise wie die Amagat'schen Versuche mit Wasser an der Hand der Formel II der Rechnung unterzogen und zu diesem Behufe aus der vorhergehenden Tabelle den Wert $a = 0 \cdot 0011006$ entnommen. Die erste Spalte der folgenden Tabelle enthält die von Amagat angewendeten Druckgrenzen, die zweite die von ihm gegebenen Compressibilitätscoefficienten, die dritte die daraus abgeleiteten specifischen Volumina bei den oberen Druckgrenzen und die vierte die für dieselben Drucke aus der Formel II berechneten specifischen Volumina.

Druckgrenzen in Atmosph.	$\beta \times 10^6$ beob.	v beob.	v ber.
1 bis 154	156	0·0013620	0·0013591
154 » 487	107	0·0013135	0·0013045
487 » 870	83	0·0012717	0·0012647
870 » 1243	63	0·0012418	0·0012384
1243 » 1623	51	0·0012177	0·0012192
1623 » 2002	45	0·0011969	0·0012046

Die Übereinstimmung zwischen den Versuchswerten und den Rechnungswerten ist eine sehr befriedigende.

Benzol.

$m = 78, \quad a = 0 \cdot 0009577.$

t	v	$\beta \times 10^6$ beob.	$\beta \times 10^6$ ber.	Beobachter
5·95	0·0011201	83·0	80·5	Röntgen
15·4	0·0011328	87·1	89·5	Pagliano u. Palazzo
16·0	0·0011336	90·0	90·1	Amagat
17·9	0·0011362	91·7	91·9	Röntgen
99·3	0·0012648	187	191	Amagat

Bei vielen anderen Flüssigkeiten zeigen die Compressibilitätscoefficienten, welche verschiedene Beobachter erhalten haben, so bedeutende Abweichungen voneinander, dass ich es unterlassen habe, die Formeln I und II an diesen Flüssigkeiten zu prüfen.

Zum Schlusse möchte ich noch eine Folgerung ziehen, welche in moleculartheoretischer Hinsicht von Interesse sein dürfte. Wir betrachten zwei verschiedene Dämpfe bei einer Temperatur, welche unter ihren kritischen Temperaturen liegt, und in sehr verdünntem Zustande. Haben beide das gleiche Volumen, die gleiche Spannung und die gleiche Temperatur, so haben sie nach Avogadros Hypothese die gleiche Anzahl Molecüle. Sind M_1 und M_2 die beiden Dampfmengen und m_1 und m_2 ihre Moleculargewichte, so können wir

$$M_1 = km_1 \quad \text{und} \quad M_2 = km_2$$

setzen, wo k einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Denken wir uns nun den Zustand der beiden Dämpfe isothermisch geändert, indem wir beide Dämpfe immer mehr und mehr comprimieren, hierauf verflüssigen und schließlich den Druck zu einem unendlich großen Werte ansteigen lassen, so erhalten wir zwei Volumina V_1 und V_2, für welche die Beziehungen

$$V_1 = M_1 a_1 = km_1 a_1, \quad V_2 = M_2 a_2 = km_2 a_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}$$

bestehen. Hierin sind a_1 und a_2 die Werte der in den Formeln I und II auftretenden Constanten a für die beiden Flüssigkeiten. Da nun die beiden Flüssigkeiten dieselbe Anzahl Molecüle enthalten, so müssen die Molecularvolumina der beiden Flüssigkeiten sich wie $m_1 a_1 : m_2 a_2$ und die Durchmesser der Molecüle wie $\sqrt[3]{m_1 a_1} : \sqrt[3]{m_2 a_2}$ verhalten. In der folgenden Tabelle enthält die zweite Columne die Werte für die Constante a, die dritte die Moleculargewichte, die vierte die Producte ma und die fünfte die Werte $181 \sqrt[3]{ma}$. Die Molecularvolumina der angeführten Flüssigkeiten verhalten sich wie die Zahlen der vierten Columne und die Durchmesser der Molecüle wie die Zahlen der fünften Columne.

	a	m	ma	$181\sqrt[3]{ma}$
Wasser	0·00075295	18	0·013553	43·2
Quecksilber	0·000067976	200	0·013595	43·2
Schwefelkohlenstoff	0·00064052	76	0·048680	66·1
Äthylalkohol	0·0010060	46	0·04628	65·0
Methylalkohol	0·0009532	32	0·03050	56·6
Amylalkohol	0·0010519	88	0·09257	81·9
Propylalkohol	0·0010197	60	0·06118	71·3
Äthyläther	0·0011025	74	0·08159	78·5
Benzol	0·0009577	78	0·07470	76·2

Daraus kann man ersehen, dass die Compressibilität der Flüssigkeiten von großer Wichtigkeit für die Untersuchung der Natur der Flüssigkeiten ist.

Über die Discriminante einer in der Theorie der doppelt-periodischen Functionen auftretenden Transformationsgleichung

von

Otto Biermann in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1900.)

In dem folgenden werden die Lösungen der zu einem ungeraden Transformationsgrade ohne quadratische Theiler zugehörigen Gleichung für das Verhältnis des transformierten Integralmoduls und Multiplicators entwickelt, und hierauf wird die Discriminante dieser Gleichung gebildet, wobei ich mich an die die Discriminanten von Modulargleichungen betreffenden Darstellungen von Königsberger in seinen Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen halte. Eine Untersuchung der Discriminante selbst nehme ich hier noch nicht vor, doch scheint es mir zur Untersuchung der Discriminante der Multiplicatorgleichungen am geeignetsten, die Eigenschaften der Discriminante der hier in Rede stehenden Transformationsgleichung im Vereine mit denen der Discriminante der Modulargleichungen zu verwenden. Zur Einleitung in die Behandlung des genannten Problems sei es zunächst gestattet, einige bekannte Dinge voran zu stellen.

Sind τ und v der Modul und das Argument gegebener Thetafunctionen, ferner a_0, b_0, a_1, b_1 vier ganze Zahlen, und sollen die Thetafunctionen mit dem Modul und dem Argumente:

$$\tau' = \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}, \quad v' = (a_0 + a_1\tau')v = \frac{nv}{b_1 - a_1\tau}$$

durch die ursprünglichen Thetafunctionen ausgedrückt werden. wo die vier Transformationszahlen a_0, a_1, b_0, b_1 mit dem positiven Transformationsgrade n durch die Gleichung

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = n$$

zusammenhängen, so nennt man zwei Transformationen n^{ten} Grades äquivalent, wenn die eine durch eine Transformation ersten Grades aus der anderen hervorgeht; fasst man diejenigen Systeme von Transformationszahlen, welche aus einem ersten durch Anwendung aller Transformationen ersten Grades entstehen, in eine Classe zusammen, so gibt es dann, wenn

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

ist,

$$\nu = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \ldots$$

nicht äquivalente, d. h. nicht ineinander überführbare Classen für die Transformationen n^{ten} Grades. Wird die frühere Transformation durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

symbolisiert, so ist der Repräsentant der einzelnen Classe durch

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ \xi & t_1 \end{vmatrix}$$

angezeigt, wo t einen positiven Theiler von n, $t_1 = \frac{n}{t}$, ξ eine ganze Zahl aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots (t_1 - 1)$ bedeutet.

Sucht man aber bloß diejenigen Repräsentanten der letzten Form, in welchen t, t_1, ξ keinen gemeinsamen Theiler haben — und man darf sich bei Behandlung der ungeradzahligen Transformationen auf Transformationszahlen beschränken, welche keinen gemeinsamen Theiler haben —, so ist die Anzahl solcher durch

$$\nu = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots (a+1)(b+1) \ldots$$

gegeben.

Ist n eine ungerade Zahl, so kann man als Repräsentanten der Classen von Transformationszahlen die folgenden hinstellen:

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi' & t_1 \end{vmatrix},$$

wo t ein positiver Theiler von n, $t_1 = \frac{n}{t}$ ist und ξ' die Werte

$$0, 1, \ldots (t_1-1)$$

oder

$$0, -1, \ldots -(t_1-1)$$

besitzt.

Die Transformation der ϑ_1-Function ist bei einem ungeraden Transformationsgrade n durch folgende Formel beschrieben:

$$e^{i\pi(a_0+a_1\tau')a_1v^2}\vartheta_1(v', \tau') = C\vartheta_1(v, \tau)\times$$
$$\times\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\vartheta_1^2(v, \tau)\,\vartheta_\alpha^2\left(\frac{\mu m\varepsilon}{n}, \tau\right) - \vartheta_\alpha^2(v, \tau)\,\vartheta_1^2\left(\frac{\mu m\varepsilon}{n}, \tau\right)\right),$$

wo C eine Constante ist, α einen der Indices 0, 2, 3 bedeutet, m eine zu n relativ prime Zahl ist, welche bei ungeradem n später gleich zwei gesetzt werden wird, und in

$$\varepsilon = (pt_1 - q\,16\xi) + (qt)\tau$$

die Zahlen p, q, je nachdem n keinen quadratischen Theiler hat oder solche besitzt, ganze Zahlen solcher Art sind, dass

$$qt \text{ und } (pt_1 - q\,16\xi)$$

relativ prim sind oder aber ganze Zahlen solcher Art bezeichnen, dass q und t_1, ebenso wie t und $(pt_1 - q\,16\xi)$ relativ prim sind. Es ergeben sich in bekannter Weise die Darstellungen von $\vartheta_\alpha(v', \tau')$.

Die Quadratwurzel aus dem aus einem Integralmodul c transformierten Integralmodul k wird dann:

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(o, \tau')}{\vartheta_3(o, \tau')} = \frac{\vartheta_2(o, \tau)}{\vartheta_3(o, \tau)}\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\vartheta_2^2\left(\frac{\mu m\varepsilon}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\mu m\varepsilon}{n}\right)} = (\sqrt{c})^n\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} snc^2\left(\frac{\mu m\omega\varepsilon}{2n}\right),$$

wenn noch

$$\omega = 4K = 2\pi\vartheta_0^2(o, \tau)$$

die eine der Elementarperioden von $sn(u, c)$ und hier

$$u = \pi\vartheta_3^2(o, \tau)v$$

ist. Setzt man

$$\sqrt[4]{c} = \varphi(\tau) = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}} \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{1+q^{2\mu}}{1+q^{2\mu-1}},$$

wobei

$$q = e^{\pi i \tau}, \quad q^{\frac{1}{8}} = e^{\frac{\pi i \tau}{8}}$$

ist, und nennt den $\tau' = \dfrac{t\tau - 16\xi}{t_1}$ entsprechenden Wert der vierten Wurzel aus dem transformierten Integralmodul k v, so ist:

$$v = (\sqrt[4]{c})^n \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} snc^2\left(\frac{\mu\omega\varepsilon}{n}\right) = \left(\frac{2}{t}\right)\varphi\left(\frac{t\tau - 16\xi}{t_1}\right),$$

wo $\left(\frac{2}{t}\right)$ das Zeichen für $(-1)^{\frac{t^2-1}{8}}$ ist.

Die Gleichungen, deren Lösungen die vierten Wurzeln der zu den Repräsentanten der ν nicht äquivalenten Classen gehörigen Integralmoduln sind, d. h. die Modulargleichungen vom Grade ν haben Coefficienten, welche ganz rationale Functionen von $u = \varphi(\tau) = \sqrt[4]{c}$ sind.

Mit Hilfe der Entwickelungen der Wurzeln dieser Gleichungen um die Stellen $u = 0$ und $u = 1$ leitet man in bekannter Weise die Discriminante der Modulargleichung ab, und zwar ist, wenn

$$\begin{vmatrix} t & o \\ 16\xi & t_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s & o \\ 16x & s_1 \end{vmatrix}$$

die Repräsentanten der allgemeinen Lösungen v_t, v_s sind:

$$D = \Pi(v_t - v_s)^2 = u^N(u^8-1)^{N'}(a_0 + a_1u^8 + \ldots + a_\nu u^{8\nu}),$$

wobei in

$$N = 2\Delta(n) + S - S',$$
$$N' = 2\Delta'(n) + S - S',$$
$$4\nu = S^2 - S - N - 4N',$$

je nachdem n keinen quadratischen Theiler besitzt oder solche hat,

$$\Delta(n) = \Sigma(st_1) \quad \text{oder} \quad \Delta(n) = \Sigma\left(st_1 \Pi\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\Pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right)$$

ist und die Summation sich auf alle Repräsentanten bezieht, für welche $t > s$ oder $st_1 < n$ ist, ferner unter α die verschiedenen s und s_1 gemeinsamen Factoren, unter a die verschiedenen t und t_1 gemeinsamen Theiler verstanden sind;

$$\Delta'(n) = \Sigma(st_1) \quad \text{oder} \quad \Delta'(n) = \Sigma\left(st_1 \Pi\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\Pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right)$$

ist, aber die Summation sich jetzt nur auf die den Bedingungen

$$st_1 < n, \quad \left(\frac{2}{s_1}\right) = \left(\frac{2}{t_1}\right)$$

unterworfenen Repräsentanten bezieht; endlich

$$S = \Sigma t t_1 \quad \text{oder} \quad S = \Sigma t t_1 \Pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$S' = \Sigma t \quad \text{oder} \quad S' = \Sigma t \Pi\left(1 - \frac{1}{a}\right) \text{ ist.}$$ [1]

Für die u Werte, welche D zu Null machen, werden mindestens zwei der Lösungen der Modulargleichung einander gleich; und es ist klar, dass im Falle, als der ungerade Transformationsgrad n quadratische Theiler enthält, die Modulargleichung gleiche Wurzeln hat, denn diese ist ja für zusammengesetzte Transformationszahlen als Eliminationsresultat zu

[1] Die auf den Fall eines Transformationsgrades n ohne quadratische Theiler bezüglichen Angaben findet man bei Königsberger (Bd. II, S. 154). Die allgemeinen Formeln entspringen wohl meiner Erwägung, doch finden sie sich auch in Henry J. S. Smith collected Math. Papers (v. II, p. 252).



erklären, z. B. im Falle $n = p.q$ als Eliminationsresultat aus einer Modulargleichung

$$w^{p+1} + C_1 w^p + \ldots + C_{p+1} = 0;$$

wo die C rationale Functionen von u sind und aus einer Modulargleichung:

$$v^{q+1} + C'_1 v^q + \ldots + C'_{q+1} = 0,$$

wo die C' rationale Functionen von w sind, und w jede Lösung der ersten Gleichung sein kann. Demnach ist offenbar, dass nach Wegschaffen der den quadratischen Theilern von n zukommenden gleichen Wurzeln eine Modulargleichung hervorgeht, welche dem von den quadratischen Theilern befreiten Transformationsgrade zukommt. Geht man auf diese Gleichung ein und sucht deren gleiche Wurzeln, welche Aufgabe Krause[1] vollständig gelöst hat, so hat man auch die der ursprünglichen Modulargleichung eigenen, vielfachen Lösungen gefunden.

Ebenso wie in dem Falle der Modulargleichungen braucht man sich auch bei anderen Transformationsgleichungen nur mit solchen zu beschäftigen, welche zu einem ungeraden Transformationsgrade ohne quadratische Theiler gehören.

Der einer Transformation ungeraden Grades ohne quadratische Theiler zukommende Multiplicator ist:

$$a = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} snc^2 \frac{2\mu\eta}{n}}{\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} sn^2 \frac{2\mu\eta}{n}},$$

wobei $\eta = \frac{\omega}{2}\varepsilon$ ist. Setzt man

$$M = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} a,$$

dann hat die zwischen M und dem Modul c bestehende Gleichung, deren Lösungen die zu den ν Repräsentanten der nicht

[1] Siehe Math. Ann., Bd. 8 und 9.

quivalenten Classen gehörigen M Werthe sind, die Eigenchaft: Bei Vertauschung von c^2 mit $\frac{1}{c^2}$ und M mit $\frac{Mc}{k}$ unerändert zu bleiben.

Setzt man noch $\frac{1}{M} = x$, so ist im Falle $n \equiv 1 \pmod 4$ die Multiplicatorgleichung nach Joubert von der Form:

$$f(x) + c^2 c'^2 x F(c^2 c'^2, x) = 0,$$

wo f und F ganze Functionen sind.

Verändert man hier c in $\frac{1}{c}$ und gleichzeitig x in $\frac{x}{c}$, so entsteht die Gleichung:

$$f\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{c^2-1}{c^4} \cdot \frac{x}{c} F\left(\frac{c^2-1}{c^4}, \frac{x}{c}\right) = 0,$$

deren Wurzeln die verschiedenen Werte von $\frac{k}{M}$ sind.

Im Falle $n \equiv 3 \pmod 4$ lautet die Gleichung mit den Wurzeln $\frac{k}{M}$ folgendermaßen:

$$f\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\left(f\left(\frac{x}{c}\right) - f\left(\frac{-x}{c}\right)\right) + \frac{c^2-1}{c^4} \frac{x^2}{c^2} F\left(\frac{c^2-1}{c^4}, \frac{x^2}{c^2}\right) +$$
$$+ \frac{(c^2-1)(2-c^2)}{c^6} \frac{x}{c} F_1\left(\frac{c^2-1}{c^4}, \frac{x^2}{c^2}\right) = 0,$$

wo wieder f, F, F_1 ganze Functionen der in ihnen enthaltenen Größen sind.

Der reciproke Wert des Multiplicators lässt sich in folgender Weise schreiben:

$$\frac{1}{M} = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} t \frac{\vartheta_3^2\left(o, \frac{t\tau - 16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2(o, \tau)}.$$

und demnach der Wert von $\frac{k}{M}$:

$$\frac{k}{M} = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} t \frac{\vartheta_2^2\left(o, \frac{t\tau - 16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2(o, \tau)};$$

und diesen Ausdruck wollen wir in der Umgebung von $c = 0$ und $c = 1$ entwickeln. Es ist

$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \ldots),$$

also

$$\vartheta_2^2 = 4q^{\frac{1}{2}}(1 + 2q^2 + q^4 + 2q^6 + 2q^8 + 4q^{12} + \ldots),$$

ferner

$$\frac{1}{\vartheta_3^2} = 1 - 4q + 12q^2 - 32q^3 + 76q^4 - 168q^5 + \ldots,$$

und demnach endlich

$$c = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} = 4q^{\frac{1}{2}}(1 - 4q + 14q^2 - 40q^3 + 101q^4 - \ldots) =$$
$$= 4e^{\frac{\pi i \tau}{2}}(1 - 4e^{\pi i \tau} + 14e^{2\pi i \tau} - \ldots).$$

Aus dem Umkehrungsprincipe der Reihen folgt:

$$e^{\frac{\pi i \tau}{2}} = \frac{c}{4} + a_1 c^3 + a_2 c^5 + a_3 c^7 + \ldots = \frac{c}{4}(1 + b_1 c^2 + b_2 c^4 + \ldots).$$

Wendet man diese Entwickelung in dem Ausdrucke an für

$$\frac{\vartheta_2^2\left(o, \frac{t\tau - 16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2(o,\tau)} =$$
$$= 4e^{\pi i \tau \frac{t}{2t_1}} e^{\frac{-8\pi i \xi}{t_1}} \left\{1 + 2e^{2\pi i \tau \frac{t}{t_1}} e^{\frac{-32\pi i \xi}{t_1}} + e^{4\pi i \tau \frac{t}{t_1}} e^{\frac{-64\pi i \xi}{t_1}} + \right.$$
$$\left. + \ldots\right\}\left\{1 - 4e^{\pi i \tau} + 12e^{2\pi i \tau} - \ldots\right\} =$$
$$= 4e^{\pi i \tau \frac{t}{2t_1}} e^{\frac{-8\pi i \xi}{t_1}} \left(1 + 2e^{2\pi i \tau \frac{t}{t_1}} e^{\frac{-32\pi i \xi}{t_1}} + \ldots\right) -$$
$$- 16e^{\pi i \tau \frac{2t_1 + t}{2t_1}} e^{\frac{-8\pi i \xi}{t_1}} \left(1 + 2e^{2\pi i \frac{t}{t_1}} e^{\frac{-32\pi i \xi}{t_1}} + \ldots\right) + \ldots,$$

so folgt:

$$\frac{\vartheta_2^2\left(o, \frac{t\tau - 16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2(o,\tau)} = e^{\frac{-8\pi i \xi}{t_1}} \left\{4^{\frac{t_1 - t}{t_1}} c^{\frac{t}{t_1}} (1 + d_1 c^2 + d_2 c^4 + \ldots) - \right.$$
$$\left. - 4^{\frac{2t_1 - t}{t_1}} c^{\frac{t + 2t_1}{t_1}} (1 + e_1 c^2 + e_2 c^4 + \ldots) + \ldots\right\} \times$$

$$\times \left\{1+2e^{\frac{-32\pi i\xi}{t_1}}\left(\frac{c}{4}\right)^{\frac{4t}{t_1}}(1+d'_1c^2+d'_2c^4+\ldots)+\right.$$

$$\left.+e^{\frac{-64\pi i\xi}{t_1}}\left(\frac{c}{4}\right)^{\frac{8t}{t_1}}(1+e'_1c^2+e'_2c^4+\ldots)+\ldots\right\}$$

und schließlich:

$$\frac{k}{M}=(-1)^{\frac{t_1-1}{2}}t.4^{\frac{t_1-t}{t_1}}e^{\frac{-8\pi i\xi}{t_1}}c^{\frac{t}{t_1}}\left\{1+\sum_{\alpha,\beta,\gamma}r_{\alpha\beta\gamma}c^{\frac{\alpha t+\beta t_1}{t_1}}e^{\frac{-8\gamma\pi i\xi}{t_1}}\right\},$$

wo α, β, γ ganze Zahlen bedeuten.

Um die Lösungen unserer Gleichungen mit den Wurzeln $\frac{k}{M}$ um den Punkt $c=1$ zu entwickeln, machen wir von dem Satze Gebrauch, dass sie bei Vertauschung von

$$c_1=\frac{\vartheta_0^2(o,\tau)}{\vartheta_3^2(o,\tau)}\quad\text{mit}\quad c=\frac{\vartheta_2^2(o,\tau)}{\vartheta_3^2(o,\tau)}$$

und

$$k_1=\frac{\vartheta_0^2\left(o,\frac{s\tau-16x}{s_1}\right)}{\vartheta_3^2\left(o,\frac{s\tau-16x}{s_1}\right)}\quad\text{mit}\quad k=\frac{\vartheta_2^2\left(o,\frac{t\tau-16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2\left(o,\frac{t\tau-16\xi}{t_1}\right)},$$

wobei die Zahlen s, s_1, x mit den Zahlen t, t_1, x in folgender Weise zusammenhängen:

$$\alpha s=16\xi,\quad \beta s=t_1,\quad 16x\alpha+s_1\gamma=-t,$$
$$16x\beta+s_1\delta=0,\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

in eine Gleichung übergeht, welche $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{k_1}{M}$ zu Wurzeln hat. Es ergibt sich dann nämlich mit Rücksicht auf die frühere Entwickelung, wenn beide Seiten gleichzeitig quadriert werden:

$$\frac{1}{M^2}(k^2-1)=\frac{s^2\vartheta_3^4\left(o,\frac{s\tau-16x}{s_1}\right)}{\vartheta_3^4(o,\tau)}\left(\frac{\vartheta_2^4\left(o,\frac{s\tau-16x}{s_1}\right)}{\vartheta_3^4\left(o,\frac{s\tau-16x}{s_1}\right)}-1\right)=$$

$$=t^2 4^{\frac{2(t_1-t)}{t_1}}e^{\frac{-16\pi i\xi}{t_1}}(c^2-1)^{\frac{t}{t_1}}\left\{1-\sum_{\alpha,\beta,\gamma}r_{\alpha\beta\gamma}(c^2-1)^{\frac{\alpha t+\beta t_1}{t_1}}e^{\frac{-8\gamma\pi i\xi}{t_2}}\right\}^2$$

oder

$$\frac{s^2 \vartheta_2^4\left(o, \frac{s\tau - 16x}{s_1}\right)}{\vartheta_3^4(o,\tau)} = s^2 \frac{\vartheta_3^4\left(o, \frac{s\tau - 16x}{s_1}\right)}{\vartheta_3^4(o,\tau)} +$$

$$+ t^2 4^{2 \cdot \frac{t_1 - t}{t_1}} e^{\frac{-16\pi i \xi}{t_1}} (c^2-1)^{\frac{t}{t_1}} \left\{1 - \Sigma r_{\alpha\beta\gamma} (c^2-1)^{\frac{\alpha t + \beta t_1}{t_1}} e^{\frac{-8\pi i \xi}{t_1}}\right\}^2,$$

und hier bleibt, um die zweite Wurzel ziehen zu können, nur zu untersuchen übrig, welchen Wert

$$k \quad \text{und} \quad \frac{s\, \vartheta_3^2\left(o, \frac{s\tau - 16x}{s_1}\right)}{\vartheta_3^2(o,\tau)}$$

für $c = 1$ annehmen.

Es ist nun aber

$$k = c^n \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} snc^4 \frac{\mu\eta}{n}$$

also bekanntermaßen

$$(k)_{c=1} = (c^n)_{c=1} = 1.$$

Um den Wert von

$$t \cdot \frac{\vartheta_3^2\left(o, \frac{t\tau - 16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2(o,\tau)}$$

für $c = 1$ zu finden, betrachte man erst den zu dem Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} 1 & o \\ o & n \end{vmatrix}$$

gehörigen Wert von $\frac{1}{M}$, in dessen Ausdruck $\eta = \frac{\omega}{2}$, $\tau = \omega'$ gesetzt werden kann, so dass folgt:

$$\frac{1}{M} = \frac{\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} sn^2 \frac{2\mu\omega'}{n}}{\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} snc^2 \frac{2\mu\omega'}{n}}.$$

Weil aber:

$$\lim_{c=1} snc^2 \frac{2\mu\omega'}{n} = 1$$

und

$$\lim_{c=1} sn \frac{2\mu\omega'}{n} = \lim_{c_1=0} i \operatorname{tn}\left(\frac{2\mu\omega'}{n}, c_1\right) = \underset{\omega=\infty,\ \omega'=i\pi}{i} \operatorname{tg}\left(\frac{2\mu\omega'}{in}\right),$$

endlich

$$\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}^2\left(\frac{2\mu\pi}{n}\right) = n$$

ist, so ergibt sich als Wert für die zu dem bezeichneten Repräsentanten gehörige Größe $\frac{1}{M}$ für $c=1$:

$$\left(\frac{1}{M}\right)_{c=1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n.$$

Gehen wir zu den dem allgemeinen Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} t & o \\ 16\xi & t_1 \end{vmatrix}$$

entsprechenden Wert von $\frac{1}{M}$, so ist zu unterscheiden, ob t_1 und 16ξ relativ prim sind oder einen größten gemeinsamen Theiler δ haben.

Im ersten Falle wird aus

$$\eta = \frac{\omega}{2}(qt\tau + pt_1 - q16\xi),$$

wo die zwei Zahlen p und q derart zu bestimmen sind, dass $pt_1 - q16\xi = 1$ wird,

$$\eta = \frac{\omega}{2} + qt\omega'$$

und man findet

$$\lim_{c=1} \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} snc^2 \frac{2\mu\eta}{n} = 1.$$

Ferner gilt

$$\lim_{c=1} sn\frac{2\mu\eta}{n} = i\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\mu\omega}{n}+\frac{2\mu q t\omega'}{n}}{i}\right) =$$

$$= \left(\frac{1-e^{-\frac{\mu\omega}{n}-\frac{2\mu q t\omega'}{n}}}{1+e^{-\frac{\mu\omega}{n}-\frac{2\mu q t\omega'}{n}}}\right)_{\omega=\infty,\ \omega'=\pi i} = 1,$$

also endlich

$$\left(\frac{1}{M}\right)_{c=1} = 1.$$

Betrachten wir den zweiten Fall, setzen also

$$t_1 \equiv 0 \quad \text{und} \quad 16\xi \equiv 0 \pmod{\delta},$$

so folgt bei obiger Schlussweise

$$\left(\frac{1}{M}\right) = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\delta.$$

Da aber

$$\frac{1}{M} = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} \frac{\vartheta_3^2\left(o, \frac{t\tau-16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2(o,\tau)}$$

ist, so ergibt sich

$$\left(\frac{t\vartheta_3^2\left(o, \frac{t\tau-16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2(o,\tau)}\right)_{c=1} = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}+\frac{\delta-1}{2}}\delta,$$

und darnach

$$\left(s\frac{\vartheta_3^2\left(o, \frac{s\tau-16x}{s_1}\right)}{\vartheta_3^2(o,\tau)}\right)_{c=1} = (-1)^{\frac{s_1-1}{2}+\frac{d-1}{2}}d,$$

wenn d den größten gemeinsamen Theiler von s_1 und $16x$ bezeichnet, so dass wir nun die Entwickelung erhalten:

$$\frac{k}{M} = \left\{\left((-1)^{\frac{d-1}{2}}d\right)^2 + 4^{\frac{2(t_1-t)}{t_1}} e^{\frac{-16\pi i\xi}{t_1}} t^2 (c^2-1)^{\frac{t}{t_1}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(1-\Sigma r_{\alpha\beta\gamma}(c^2-1)^{\frac{\alpha t+\beta t_1}{t_1}} e^{\frac{-8\gamma\pi i\xi}{t_1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Beachten wir schließlich, dass der größte gemeinsame Theiler von s_1 und $16x$ gleich t ist, so wird die zu dem Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} s & o \\ 16x & s_1 \end{vmatrix}$$

gehörige Lösung $\frac{k}{M}$ unserer Gleichung in der Form erscheinen:

$$\frac{k}{M} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \left\{ 1 - \frac{e^{\frac{-16\pi i\xi}{t_1}}}{2^{\frac{4(t-t_1)}{t_1}}} (c^2-1)^{\frac{t}{t_1}} \cdot \left(1 - \Sigma r_{\alpha\beta\gamma}(c^2-1)^{\frac{\alpha t+\beta t_1}{t_1}} e^{\frac{-8\gamma\pi i\xi}{t_1}}\right)^2 + \ldots \right\}.$$

Mit Hilfe dieser Entwickelungen sind wir imstande, die Discriminante der einem ungeraden Transformationsgrade ohne quadratischen Theiler entsprechenden Gleichung für die verschiedenen Werte $\frac{k}{M}$ aufzustellen.

Die zweien Repräsentanten

$$\begin{vmatrix} t & o \\ 16\xi & t_1 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} u & o \\ 16x & u_1 \end{vmatrix}$$

zugehörigen Lösungen haben um $c = 0$ die Entwickelungen:

$$\frac{k_t}{M_t} = Ac^{\frac{t}{t_1}} + \ldots, \quad \frac{k_u}{M_{u_1}} = Bc^{\frac{u}{u_1}} + \ldots,$$

und wenn in diesen Entwickelungen $t > u$, also auch $t_1 < u_1$ ist, wird

$$\frac{k_t}{M_t} - \frac{k_u}{M_u} = -Bc^{\frac{u}{u_1}} + \text{steigenden } c \text{ Potenzen.}$$

Weil jedem Werte ξ u_1 Werte des x entsprechen, werden sich in

$$\sqrt{D} = \Pi\left(\frac{k_t}{M_t} - \frac{k_u}{M_u}\right)$$

$t_1 u_1$ Factoren vorfinden, in welchen $t > u$ oder $u t_1 < n$ ist, und in der Discriminante D wird die Potenz

$$c^{\Sigma u t_1} = c^{\Delta(n)}$$

heraustreten.

Ist aber $t = u$, so wird

$$\frac{k_t}{M_t} - \frac{k_u}{M_u} = -Bc^{\frac{t}{t_1}} + \text{steigenden } c \text{ Potenzen},$$

und, weil es t_1 solcher Repräsentanten gibt, so kommen $\frac{t_1(t_1-1)}{1.2}$ solcher Factoren vor, und mit Rücksicht auf alle Repräsentanten tritt in der Discriminante D die Potenz

$$c^{\Sigma \frac{t t_1}{2} - \Sigma \frac{t}{2}} = c^{\frac{1}{2} n S(n) - \frac{1}{2} S'(n)}$$

heraus, wo wir die Summe und die Anzahl der Theiler von n gleich mit $S'(n)$ und $S(n)$ bezeichnet haben.

Ein Factor (c^2-1) wird nur heraustreten, wenn $t = u$ ist, weil nur dann in der Entwickelung von $\frac{k_t}{M_t} - \frac{k_u}{M_u}$ das von (c^2-1) freie Glied herausfällt.

Darum ist die Potenz

$$(c^2-1)^{n S(n) - S'(n)}$$

abzuheben, und der Ausdruck für die Discriminante der mit c^ν multiplicierten Transformationsgleichung, deren Lösungen die verschiedenen Werte von $\frac{k}{M}$ sind, wird auf die Form

$$D = c^{n S(n) - S'(n) + 2\Delta(n)} (c^2-1)^{n S(n) - S'(n)} \varphi(c^2)$$

zu bringen sein, wo $\varphi(c^2)$ eine rationale Function von c^2 bezeichnet.

Diese Discriminante kann nun nach dem Vorgange von Hermite und Krause untersucht werden. Die Gleichung

$D = 0$ gehört dann zu den auflösbaren, in dem Sinne wie die durch das Nullsetzen der Discriminante von Modulargleichungen gesetzte Gleichung auflösbar ist.

Die Vereinigung von Gleichungen der beiden genannten Arten führt auch zur Erkenntnis, unter welchen Umständen zwei Multiplicatoren der für M geltenden Multiplicatorgleichung einander gleich sind. Ich hoffe, bald auf diese Aufgaben eingehen zu können.

XVIII. SITZUNG VOM 12. JULI 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 109, Abth. II. a., Heft I bis III (Jänner bis März 1900).

Das w. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

I. »Über die *p*-Toluylpicolinsäure und ihre Oxydationsproducte«, von Hugo Ludwig Fulda.

II. »Über einige Derivate der Chinolinsäure und Cinchomeronsäure«, von Dr. Alfred Kirpal.

Das c. M. Herr Hofrath A. Bauer übersendet eine im Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit: »Zur Kenntnis der Überwallungsharze« (VII. Abhandlung), von Max Bamberger und Emil Vischner.

Herr Dr. Adolf Jolles in Wien übersendet eine vorläufige Mittheilung unter dem Titel: »Über die Oxydation von Eiweißkörpern zu Harnstoff«.

Herr k. u. k. Regimentsarzt Dr. Karl Biehl legt eine im physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Abhandlung vor, betitelt: »Über die intracranielle Durchtrennung des Nervus vestibuli und deren Folgen«.

Das w. M. Herr Hofrath F. Steindachner erstattet im Auftrage Ihrer königlichen Hoheit Frau Prinzessin Therese von Bayern einen vorläufigen Bericht über einige von Ihrer königlichen Hoheit während einer Reise nach Südamerika 1898 gesammelte neue Fischarten.

Herr Hofrath Fr. Steindachner überreicht ferner eine Mittheilung von Herrn Rudolf Sturany, betitelt: »Diagnosen neuer Gastropoden aus dem Rothen Meere«, als Vorläufer einer Bearbeitung der gesammten, von S. M. Schiff »Pola« gefundenen Gastropoden. (Fortsetzung.)

Herr Dr. Franz Schaffer überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Geologische Studien im südöstlichen Kleinasien«.

Das w. M. Herr Prof. Fr. Exner legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Eduard Haschek vor: »Druck und Temperatur im elektrischen Funken«.

Derselbe legt ferner eine Arbeit des Herrn Dr. Egon R. v. Schweidler vor: »Über das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgange eines elektrischen Stromes«.

Das w. M. Herr Prof. Friedr. Brauer legt eine Arbeit über die von Prof. O. Simony auf den Canaren gesammelten Neuropteren im Sinne Linnées vor.

Herr Dr. Leopold Freund überreicht eine Arbeit aus dem pathologisch-anatomischen Universitäts-Institute und dem Institute für Radiographie und Radiotherapie in Wien, betitelt: »Die physiologischen Wirkungen stiller, negativer Polentladungen hochgespannter Inductionsströme und anderer unsichtbarer Strahlungen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Grizai W. S., Curs der Arithmetik mit Beispielen und Lösungen. (Russisch.) Kiew, 1896. 8°.

Druck und Temperatur im elektrischen Funken

von

Dr. Eduard Haschek.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1900.)

Wenn wir die einzelnen Fälle der elektrischen Entladungen betrachten, können wir zwei große Gruppen unterscheiden. Mit Hilfe des Spectroskops erkennen wir nämlich, dass in dem einen Falle in der Entladungsbahn nur oder fast nur das Gas leuchtet, das die Elektroden umgibt, während im anderen Falle das Spectrum des Gases fast ganz zurücktritt und nur Elektrodenmaterial sich in der Funkenbahn befindet. Wenn auch diese Scheidung eine rein äußerliche ist und wir im speciellen Falle vielleicht zweifeln können, ob wir ein Phänomen der ersten oder zweiten Art vor uns haben, so gibt uns doch diese Eintheilung einen Fingerzeig, auf welchem Wege sich eine Vorstellung von der Mechanik der Entladung finden lässt. Es ist selbstverständlich, dass wir kein vollständig genaues Bild der Erscheinung bekommen werden. Wir müssen uns vielmehr, wie so oft in der Physik, einen möglichst einfachen Fall construieren, um daran die Erscheinung zu studieren.

Der Versuch, der uns Einblick in die Mechanik der Entladung gestattet, rührt von Schuster[1] her. Schuster hat auf einem rasch bewegten Film das Spectrum des elektrischen

---

[1] Schuster, Nature, Bd. LVII (1897); Bd. LIX (1899).

Funkens photographiert und gefunden, dass die Spectrallinien gegen die Richtung des Spectrums, also die Normale zum Spalt, geneigt sind. Diese Neigung ist in den verschiedenen Entfernungen von der Mitte verschieden und rührt davon her, dass die leuchtenden Theilchen zuerst nahe an den Elektroden auftreten und dann erst successive weiter gegen die Mitte der Entladungsbahn gelangen. Ein ganz ähnliches Bild geben auch die bekannten Aufnahmen von Feddersen. Wir sehen auch hier, dass das Leuchten früher in der Nähe der Elektroden auftritt, als in der Mitte der Funkenbahn. Die einfachste Erklärung, die wir uns für diese Erscheinung geben können, ist, dass die Theilchen, welche als Lichterreger fungieren, mit gewissen Geschwindigkeiten von den Elektroden abfliegen. Schuster hat auf seinen Aufnahmen diese Geschwindigkeiten für Zink bestimmt. Sie betragen in einer Entfernung von 1 *mm* von den Elektroden $2000 \frac{m}{\text{sec}}$, in 4 *mm* Abstand nur $400 \frac{m}{\text{sec}}$. Es erfahren also die Theilchen während der Bewegung eine starke Verzögerung. Die Folge davon ist eine Annäherung der Theilchen aneinander, ein Wachsen der Dichte und des Druckes. Der Verlust an kinetischer Energie, der ja nach dem Obigen ein sehr beträchtlicher ist, wird nun auf Erhöhung der Temperatur verwendet. Das Leuchten hat offenbar mit der Temperatur nichts wesentliches zu thun. Wir könnten ja sonst nicht schon an den Elektroden ein Leuchten bemerken, sondern erst in einiger Entfernung. Auch müsste der Funke irgendwo zwischen den Elektroden am hellsten sein und gegen dieselben hin an Leuchtkraft abnehmen. Alles dies widerspricht aber der Erfahrung.

Die Grundanschauung, von der wir ausgehen, ist also kurz folgende: Von der Elektrode fliegen Theilchen, Gas oder Elektrodenmaterial, mit gewissen Geschwindigkeiten ab. Am Wege erfahren sie eine Verzögerung, aufeinander folgende Theilchen rücken also, je weiter von der Elektrode, umso näher zusammen. Daraus folgt zunächst eine Steigerung des Druckes. Der Verlust an kinetischer Energie setzt sich in Wärme um, die hohe Temperatur des Funkens ist also eine secundäre Erscheinung.

Damit ist uns in groben Umrissen der Vorgang in der Bahn der Entladung gegeben. Wir haben jetzt die Verhältnisse an den Elektroden zu studieren. Es ist klar, dass ein gewisser Arbeitsaufwand dazu gehört, ein Theilchen von der Elektrode abzureißen. Dieser Arbeitsaufwand ist jedenfalls für Theilchen des Elektrodenmaterials größer, als für Theilchen des adhärierenden Gases. Es sind ja im ersten Falle die Attractionskräfte, die das Theilchen an der Elektrode fixieren, weit größere als im zweiten. Wir werden also zunächst nur Gastheilchen in die Bahn der Entladung bekommen, bei Aufwand eines größeren Arbeitsquantums aber Elektrodentheilchen. Die abgerissenen Theilchen besorgen den Elektricitätstransport. Der Ausgleich der Ladungen wird auf zweierlei Art erfolgen. Ein gewisser Bruchtheil der Partikel wird schon in der Entladungsbahn zusammenstoßen und die Ladung abgeben, ein anderer aber wird bis zur Gegenelektrode kommen. Dabei wird natürlich die ganze kinetische Energie vernichtet und die ganze erzeugte Wärme zur Erhöhung der Temperatur der Elektrode verwendet.

Wir haben bisher stillschweigend immer zwei einander gegenüberstehende Elektroden angenommen. Es ändert sich qualitativ offenbar nichts, wenn wir bloß eine annehmen. Es werden sich an den Stellen größter elektrischer Dichte Theilchen ablösen, die anfangs in geschlossenem Schwarm abfliegen, später aber in die Umgebung diffundieren und ihre Ladung theils an Molecüle des umgebenden Gases, theils an die benachbarten Körper, Wände etc. abgeben.

Wir wollen uns nun der Berechnung der einzelnen Größen zuwenden. Zu diesem Behufe müssen wir uns einen Idealfall construieren. Wir denken uns eine vollkommen ebene Fläche mit constanter Oberflächendichte geladen und nehmen an, dass alle Theile vollkommen gleich beschaffen sind. Um ein Theilchen von der Oberfläche dauernd zu entfernen, brauche man eine gewisse Arbeit, die wir C nennen. Die aufgewendete elektrische Energie messen wir in mechanischem Maße. Wir betrachten einen bestimmten Theil der Oberfläche, etwa die Einheit, so entfällt auf diese in der Zeiteinheit an Aufwand elektrischer Energie der Betrag $\mathfrak{E}$. Die Zahl der abgelösten

Theilchen sei pro Flächeneinheit und Zeiteinheit N, also NC die nöthige Arbeitsmenge. Da alle Theilchen gleichberechtigt sind, werden alle oder keines abgerissen. Ist $\mathfrak{E} - NC < 0$, so tritt letzteres ein, ist dagegen $\mathfrak{E} - NC > 0$, so werden die Theilchen abfliegen, und ihre lebendige Kraft wird gleich der verfügbaren Energie, also $\mathfrak{E} - NC = N\frac{m}{2} u_0^2$. Stellen wir uns die Theilchen als Kugeln vom Radius ρ vor, so transportiert eines die Elektricitätsmenge $V\rho$, wenn V das Potential der Elektrode bedeutet. Während der Zeit dt wird der Betrag dE transportiert. Nennen wir das Potential der Gegenelektrode V', so ist

$$dE = Ndt.\rho.(V - V') = Ndt.\rho.\varphi, \quad N = \frac{dE}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi\rho}.$$

Setzen wir diesen Wert für N ein und berücksichtigen, dass

$$\mathfrak{E} = k\frac{dE}{dt} \cdot (V - V') = k\frac{dE}{dt} \cdot \varphi,$$

so ist

$$k\frac{dE}{dt} \cdot \varphi - \frac{dE}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi\rho} \cdot C = \frac{dE}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi\rho} \cdot \frac{m}{2} u_0^2$$

oder

$$\frac{2k\rho}{m}\varphi^2 - \frac{2C}{m} = u_0^2.$$

Für ein bestimmtes Material ist $\frac{2k\rho}{m} = K_1$ und $\frac{2C}{m} = K_2$ constant, also

$$u_0^2 = K_1\varphi^2 - K_2.$$

Für die Gegenelektrode gilt dieselbe Betrachtung. Die Geschwindigkeit kann nur dann einen anderen Wert annehmen, wenn die Massen der abgerissenen Theilchen an beiden Elektroden verschieden sind. Im Verlaufe der weiteren Bewegung erfahren nun die Theilchen einen Widerstand. Über die Größe desselben ist uns nichts bekannt. Jedenfalls wird er aber umso größer sein, je rascher sich die Theilchen bewegen. Da sich nun von der Elektrode eine Wolke erhebt, die dieselbe Ober-

fläche hat, wie die Elektrode selbst, so können wir annehmen, dass ein ähnliches Gesetz gelten wird, wie für die Bewegung von Körpern in Luft, etwa von Projectilen. Wegen der hohen Geschwindigkeit nehmen wir als Widerstand $R = -Au^2$ an, worin A eine Constante bedeutet. Da alle Theilchen zusammen diesen Widerstand erfahren, können wir auch für ein einzelnes eine gleiche Annahme machen und als Bewegungsgleichung schreiben

$$m\frac{du}{dt} = -Au^2.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} = \frac{A}{m}t$$

oder

$$u = \frac{1}{\frac{A}{m}t + \frac{1}{u_0}}.$$

Denken wir uns, analog wie früher, die Verbindungslinie der Elektroden als x-Axe, so können wir $u = \frac{dx}{dt}$ setzen und haben als Gleichung für den Ort, an dem sich zu einer bestimmten Zeit das Theilchen befindet,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{A}{m}t + \frac{1}{u_0}}$$

oder

$$x = \frac{m}{A}\log\left(\frac{A}{m}t + \frac{1}{u_0}\right) - x_0.$$

Den Coordinatenursprung verlegen wir in den Anfangspunkt der Bewegung, also an die Elektrode. Es ist also

$$x_0 = \frac{m}{A}\log\frac{1}{u_0}$$

und

$$x = \frac{m}{A} \log \frac{\frac{A}{m} t + \frac{1}{u_0}}{\frac{1}{u_0}}.$$

Das können wir auch in der Form schreiben

$$x = \frac{m}{A} \log \left(\frac{u_0}{u}\right).$$

Nun können wir daran gehen, den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten der Theilchen und Druck und Temperatur in der Funkenbahn zu suchen. Würden sich die Theilchen mit der Geschwindigkeit u_0 ungestört bewegen können, so würden die vordersten nach der Zeit τ den Weg $u_0 \tau$ zurücklegen; es wären also alle Theilchen, die von einer Fläche q abflogen, in einem Cylinder vom Volumen $q . u_0 \tau$ eingeschlossen, der darin herrschende Druck p_0 wäre offenbar gleich dem Außendruck. Infolge der Verzögerung haben aber die Theilchen einen kleineren Weg x zurückgelegt, sind also alle im Cylinder mit dem Volumen $q . x$ unter dem Drucke p zusammengedrängt. Dieser Druck p ist offenbar abhängig von x. Wir bekommen einen Mittelwert $\bar{p}$, wenn wir für einen Moment $x = \bar{u} . \tau$ setzen, also allen Theilchen gleiche Geschwindigkeiten $\bar{u}$ zuschreiben. Um $\bar{u}$ zu berechnen, gehen wir so vor: Es ist

$$x = \frac{m}{A} \log \left(\frac{u_0}{u}\right); \quad \tau = \frac{u_0 - u}{u_0 u} \cdot \frac{m}{A},$$

woraus für $\bar{u}$ der Wert folgt

$$\bar{u} = \frac{u_0 u}{u_0 - u} \cdot \log \left(\frac{u_0}{u}\right).$$

Wegen der äußerst kurzen Dauer des Funkens haben wir einen adiabatischen Process vor uns. Es gelten also die bekannten Formeln

$$\frac{\bar{p}}{p_0} = \left(\frac{v_0}{\bar{v}}\right)^{\varkappa}; \quad \frac{\bar{T}}{T_0} = \left(\frac{v_0}{\bar{v}}\right)^{\varkappa - 1},$$

worin $\bar{p}$, $\bar{T}$ Druck- und Temperaturmittel für die verzögerten Theilchen, p_0, T_0 aber für die unverzögerten bedeuten. $\varkappa$ ist das Verhältnis der specifischen Wärmen. Diese Ausdrücke gelten offenbar nur bis zu dem Momente, in dem die beiden von den Elektroden abfliegenden Complexe von Theilchen aneinander prallen. Wir bekommen, wenn wir für v_0 und $\bar{v}$ die entsprechenden Ausdrücke einsetzen, auf diese Weise eine Reihe von Zahlen, die uns die Temperaturmittel in den einzelnen Momenten darstellen. Wir können aber auch die maximalen herrschenden Temperaturen angeben. Nach der Definition ist ja $\bar{T}$ nichts anderes als

$$\bar{T} = \frac{\int_0^x T dx}{\int_0^x dx},$$

wenn wir mit T die thatsächliche Temperatur bezeichnen und x die jeweils betrachtete Entfernung der Theilchen von der Elektrode ist. Nennen wir sie für einen Moment a, so ist die an der Stelle a thatsächlich vorhandene Temperatur

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \bar{T})_{x=a}.$$

Es ist nun nach dem Früheren

$$v_0 = q u_0 \tau; \quad \bar{v} = q \bar{u} \tau,$$

also

$$\bar{T} = T_0 \left(\frac{u_0}{\bar{u}}\right)^{\varkappa - 1}.$$

Setzen wir für $\bar{u}$ den Wert ein, so haben wir

$$\bar{T} = T_0 \left(\frac{e^{\frac{A}{m}x} - 1}{\frac{A}{m}x}\right)^{\varkappa - 1},$$

und mit Hilfe einiger einfacher Transformationen nach obiger Formel

$$T_a = \bar{T}\left\{1 + (\varkappa - 1)\left[\left(\frac{u_0}{u_0 - u} \log \frac{u_0}{u}\right) - 1\right]\right\}.$$

Diese Formel gibt uns, wenn wir für a verschiedene Werte einsetzen, die Temperatur der jeweilig vordersten Theilchen bis zum Momente des Zusammenstoßes. In diesem Augenblicke hat jedes der eben aneinander prallenden Theilchen die Energiemenge $\frac{m}{2}(u_0^2 - u^2)$ verloren und die Temperatur T_a erlangt. Es ist also $\mathfrak{A} n \frac{m}{2}(u_0^2 - u^2) = \gamma n . m (T_a - T_0)$. Beim Zusammenprall wird die gesammte noch vorhandene Energie in Wärme verwandelt, und es ist analog

$$\mathfrak{A} n \frac{m}{2} u^2 = \gamma n m (T_{\max} - T_a),$$

wenn wir mit $T_{\max}$ die maximale erreichbare Temperatur bezeichnen. Angenommen ist, was wohl annähernd gilt, dass γ innerhalb der in Frage kommenden Temperaturgrenzen nicht so variiert, dass sein Mittelwert zwischen T_a und T_0, respective $T_{\max}$ und T_a sehr verschieden ausfällt. Gilt diese Annahme, so ist

$$T_{\max} - T_a : T_a - T_0 = u^2 : u_0^2 - u^2$$

oder

$$T_{\max} = (T_a - T_0)\frac{u^2}{u_0^2 - u^2} + T_a .$$

Eine ganz analoge Rechnung lässt sich auch für den Druck anstellen. Es ist ohneweiters ersichtlich, dass wir einfach überall in den Formeln p_0 für T_0 und $\varkappa$ für $\varkappa - 1$ zu setzen haben. Dann haben wir in analoger Bezeichnung wie für die Temperatur

$$p_a = \bar{p}\left\{1 + \varkappa\left[\left(\frac{u_0}{u_0 - u}\log\frac{u_0}{u}\right) - 1\right]\right\}.$$

Beim Zusammenprallen der Theilchen erhöht sich der Druck einfach infolge der Temperaturerhöhung im Verhältnisse

$$p_{\max} : p_a = [1 + \alpha(T_{\max} - T_a)] : 1,$$

so dass

$$p_{\max} = p_a\left[1 + \alpha(T_a - T_0)\frac{u^2}{u_0^2 - u^2}\right]$$

uns den maximalen im Funken erreichten Druck darstellt.

Wir wollen nun daran gehen, unsere Ergebnisse auf die Versuche von Schuster[1] anzuwenden. Schuster maß für Funken zwischen Zinkpolen in 1 *mm* von den Elektroden die Geschwindigkeit der Theilchen zu $2000 \frac{m}{sec}$, in 4 *mm* Entfernung zu $400 \frac{m}{sec}$. Als Elektricitätsquelle dienten fünf große Leydenerflaschen, die mit einer Vossmaschine geladen wurden. Aus den Angaben berechnet sich die Anfangsgeschwindigkeit von $3420 \frac{m}{sec}$. Schuster scheint bei seinen Versuchen eine Funkenstrecke von 8 *mm* Länge verwendet zu haben, wir haben also in die einschlägigen Formeln $u_0 = 3420 \frac{m}{sec}$, $u = 400 \frac{m}{sec}$ zu setzen. Um Druck und Temperatur zu berechnen, müssen wir noch eine Annahme bezüglich des $\varkappa$ machen. Besteht der Dampf, was für Zink, mit dem Schuster arbeitete, ja wahrscheinlich ist, aus einzelnen Atomen, so ist $\varkappa = 1\cdot67$ zu setzen; wäre aber der Dampf nicht vollständig dissociiert, so können wir $\varkappa = 1\cdot41$ annehmen. Wir bekommen in diesen beiden Fällen folgende Tabelle:

	T_a	T_{max}	p_a	p_{max}
$\varkappa = 1\cdot67$	1311°	1325°	27·6	28·7
$\varkappa = 1\cdot41$	751°	758°	17·5	18·0

Die Temperaturen sind nach der absoluten Scala, die Drucke in Atmosphären gegeben.

Vergleicht man diese Angaben für den Druck mit den directen Beobachtungen von E. Haschek und H. Mache,[2] die 44 Atmosphären ergaben, so muss die Übereinstimmung als eine gute bezeichnet werden. Es sind ja die Versuchsbedingungen wesentlich andere gewesen als bei Schuster. In den citierten Versuchen diente als Stromquelle ein Hochspannungstransformator, der mit 8·2 Ampère primär gespeist wurde. Im

---

[1] Schuster, Nature (1897).

[2] E. Haschek und H. Mache, diese Sitzungsber., Bd. 107, Abth. II. a (1898).

secundären Kreise war eine Capacität von 750 *m* eingeschaltet. Eine Variation des Druckes im Funken um 16 Atmosphären bei variierenden Versuchsbedingungen ist aber nichts überraschendes, wenn man bedenkt, dass für Messing unter den obigen Versuchsbedingungen ein Druck von 64 Atmosphären gemessen wurde gegen 11·3 Atmosphären mit dem Rhumkorff-schen Inductorium.

Wir können nach unserer Formel die Temperaturvertheilung im elektrischen Funken berechnen, wenn wir für u die entsprechenden Werte einsetzen. Da die Anfangsgeschwindigkeit u_0 nur vom Material und der Potentialdifferenz, nicht aber von der Funkenlänge abhängt, können wir auch die maximalen Temperaturen für verschiedene Funkenstrecken berechnen. Wir haben dies unter der Annahme $\varkappa = 1 \cdot 67$ durchgeführt und folgende Zahlen erhalten:

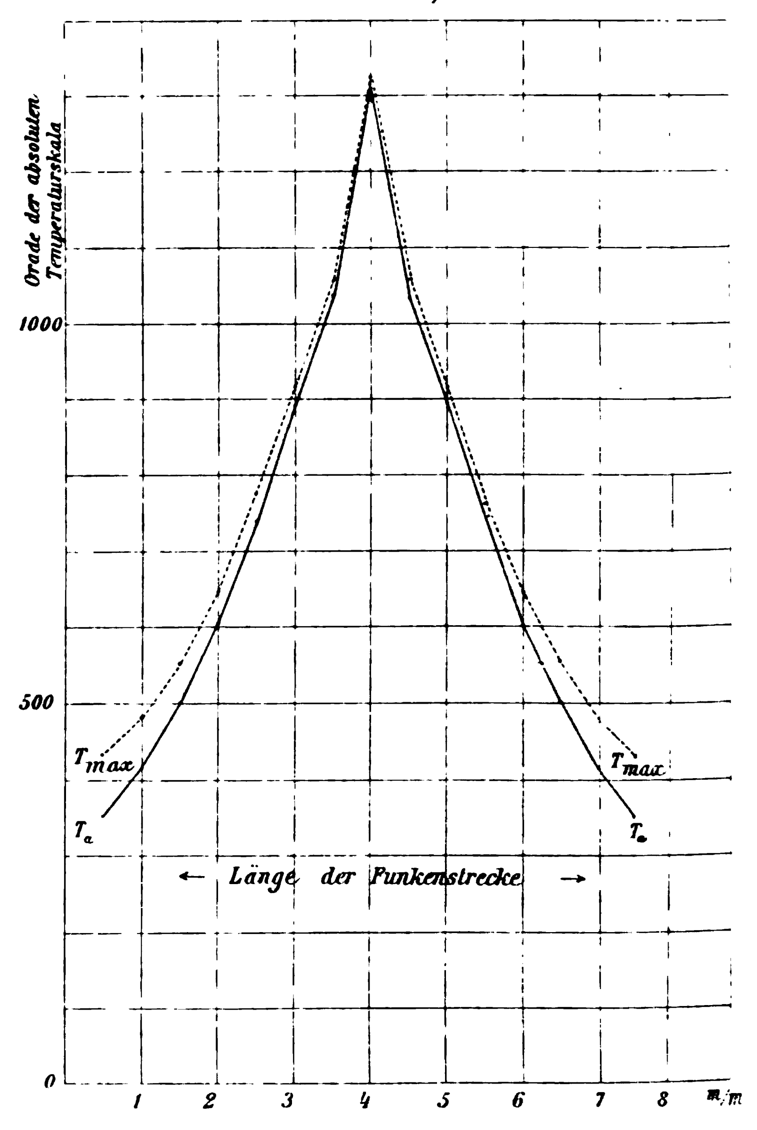
Abstand von der Elektrode, *mm*	0·5	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0	3·5	4·0
T_a	354	418	502	606	743	894	1039	1311
T_{max}	437	485	555	649	775	919	1057	1325

Um den Verlauf der Temperatur noch genauer zu illustrieren, wollen wir die gegebenen Werte in Form einer Curve zusammenstellen. Die Druckvertheilung wird durch eine ganz analoge Curve dargestellt, da ja die Formel für p_a sich nur im Factor $\varkappa$ für $\varkappa - 1$ von der für T_a unterscheidet.

In einer neueren Arbeit machen Schuster und Hemsalech[1] noch Mittheilung von weiteren Versuchen. Aus den Zahlenangaben für die beiden Zinkelektroden in einem Versuche können wir wieder, wie oben, die Temperatur berechnen. Die verwendete Funkenstrecke betrug 1 *cm*, die Geschwindigkeiten der Theilchen wurden in 0·98 *mm* von der Elektrode zu $631 \frac{m}{sec}$, in 2·24 *mm* zu $300 \frac{m}{sec}$, respective für die andere Elektrode in 0·77 *mm* zu $472 \frac{m}{sec}$, in 2·13 *mm* zu $241 \frac{m}{sec}$ gemessen. Daraus berechnen sich beziehungsweise die Werte

[1] A. Schuster und G. Hemsalech, Phil. Trans., 193 A (1900).

für u_0 zu $1230 \cdot 3 \frac{m}{sec}$ und $743 \cdot 2 \frac{m}{sec}$ und für die Geschwindigkeiten in 5 *mm* von der Elektrode, also der Mitte der Funken-



bahn zu $43 \cdot 2 \frac{m}{sec}$ und $62 \cdot 8 \frac{m}{sec}$. Aus diesen Angaben lässt sich natürlich, ebenso wie früher, der Verlauf von Druck und

Temperatur im Funken berechnen. Wir haben die Rechnung unter der Annahme $\varkappa = 1 \cdot 67$ für T_a in 5 *mm* von der Elektrode durchgeführt und finden in den beiden oben angeführten Fällen $T_a = 3136$, respective 1989 Grade der absoluten Temperaturscala. Dass diese Werte ziemlich stark voneinander und dem früheren abweichen, ist bei der großen Unsicherheit der Geschwindigkeitsmessungen nicht verwunderlich.

Schließlich wollen wir noch einen Umstand erwähnen. Die Temperatur des Funkens ist nach der Formel in hohem Grade von der Temperatur der Elektrode abhängig, da ja T_0 die Anfangstemperatur der abgehenden Theilchen bedeutet, solange sie mit der Elektrode in Verbindung stehen. Steigt diese, so nimmt auch die Funkentemperatur zu, also bei einer Erhitzung der Elektroden auf Rothglut auf das drei- bis vierfache. Außerdem ist noch zu bedenken, dass die Geschwindigkeit der Theilchen selbst in hohem Maße von der Beschaffenheit der Elektroden abhängt und wächst, wenn die Kraft, welche die Theilchen zurückzuhalten sucht, abnimmt. Dies ist aber der Fall, wenn wir die Elektroden erwärmen. Es steigt die Funkentemperatur also noch rascher als die Elektrodentemperatur.

Ein ganz analoges Verhalten zeigt auch der Druck, falls die zwischen zwei Funken liegende Zeit zu kurz ist, als dass sich der Druck auf den normalen Atmosphärendruck ausgleichen könnte, wie dies wahrscheinlich bei Versuchen mit dem Transformator und Wechselstrom oder auch bei einem Inductorium mit Wehnelt-Unterbrecher eintritt.

Eine neue Beobachtungsmethode für Luftwirbelringe

von

Prof. Dr. **Paul Czermak** in Innsbruck.

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1900.)

Da durch die neuen Wetterschießapparate das Interesse für Luftwirbelringe wieder lebendig geworden ist, indem beim Schießen mit Böllern durch lange Trichter besonders intensive Wirbelringe erzeugt werden, so dürfte eine Beobachtungsmethode, welche auch einige quantitative Messungen zulässt, auf ein gewisses Interesse rechnen können.

Die von der Firma Karl Greinitz in Graz construierten Apparate wurden durch den Procuristen des Gewerkes, Herrn G. Suschnig, in der umsichtigsten Weise bezüglich ihrer Dimensionen erprobt und liefern Böller von 30 *cm* Höhe, mit 4 *m* langen Trichtern, deren Öffnungswinkel ungefähr 12° beträgt, bei einer Ladung von 200 *g* Pulver Wirbelringe von ganz bedeutender Intensität. Der Durchmesser des Ringes dürfte 1 *m* haben, und bewegt sich derselbe innerhalb der ersten 100 *m* mit einer Geschwindigkeit von 50 bis 70 *m*/sec. Dabei tritt eine ungemein rasche Rotation auf, und schlierenartige, regelmäßige Abtheilungen im Ringe deuten auf stehende Schwingungen in der Peripherie hin, welche auch die Ursache des hohen pfeifenden Tones sein dürften, der den Ring auf seinem Wege begleitet. Da diese Ringe aber gegen gleichmäßige Luftströmungen, die in verschiedenen Höhen Geschwindigkeitsunterschiede[1] besitzen, sehr empfindlich sind, so lassen sich

[1] Prof. Dr. G. Jäger erkannte in der constanten Ablenkung der Ringe nach aufwärts bei Gegenwind und in der Ablenkung in den Boden bei Rücken-

im Freien kaum genauere Messungen an denselben vornehmen.

Um über die Veränderung der Ringdurchmesser und die Geschwindigkeit der Translationsbewegung der Ringe einige Beobachtungen machen zu können, wandte ich im Laboratorium im verkleinerten Maßstabe folgende Vorrichtung an. Die

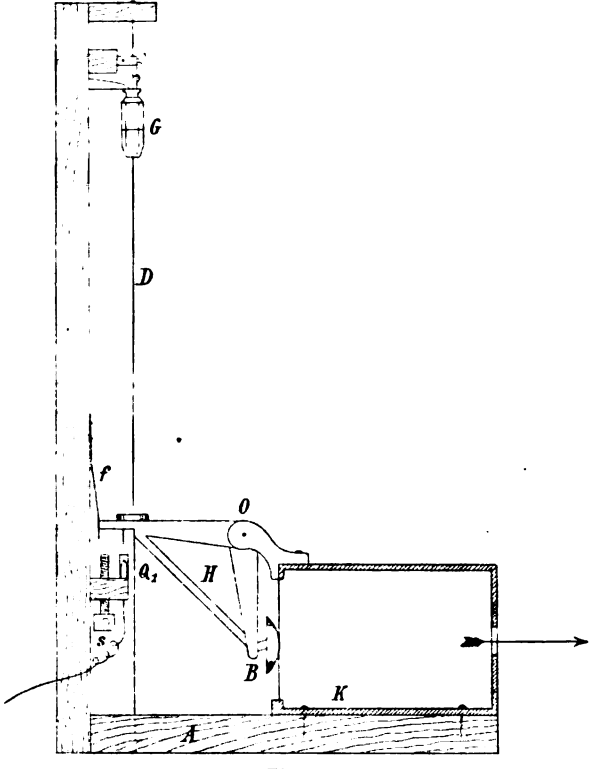


Fig. 1.

Wirbel durch Pulverexplosionen zu erzeugen, ist zu ungleichartig. Ich griff daher zu der bekannten Erzeugungsweise mit dem Tait'schen Rauchkasten, nur ertheilte ich der elastischen Hinterwand die Stöße in einer leicht messbaren und gleichartig wiederholbaren Weise. Der Tait'sche Kasten K (Fig. 1) war auf ein Brett A geschraubt und mit einer elastischen Wand

wind sofort die Analogie mit der von ihm studierten Beeinflussung der Schallstrahlen durch solche Luftströmungen.

aus doppeltem schwarzen Gummistoff versehen. Ein Kniehebel *H*, welcher in *O* drehbar und auf dem Deckel des Kastens befestigt war, lehnte sich mit dem Ballen *B* gegen die Wand. Das andere Hebelende war durchbohrt und ließ einen stark gespannten Draht *D* durch. Längs desselben fiel ein 300 *g* schweres Gewicht *G* aus bestimmter Höhe (im Maximum 70 *cm*) herab. Dadurch wurde der Wand ein genau regulierbarer Schlag ertheilt und flog aus der Mündung jedesmal in ganz gleichartiger Weise der Wirbelring heraus.[1]

Das vom Gewichte getroffene, mit einem Kautschukstücke gefütterte Hebelende war durch einen Anschlag *s* in seiner Tiefstellung begrenzt und wurde hier auch durch eine Sperrfeder *f* vom Zurückschnellen abgehalten.

Um die Form der Wirbel auch ohne Färbung durch Rauch sichtbar zu machen, schoss ich dieselben gegen eine mit Lycopodium eingestaubte schwarze Tafel.[2] Diese Methode wandte ich schon im verflossenen Winter anlässlich eines Vortrages über das Wetterschießen im hiesigen naturwissenschaftlichen Vereine an, da bei derselben die mechanische Wirkung der Wirbel sehr deutlich zu Tage tritt. Beim Schießen aus einem kleinen Böllermodell (Verkleinerung 1:10 der natürlichen Größe) war der Wirbel auch unsichtbar und mit keinem Mittel zu färben. Auf der Lycopodiumtafel drückte sich aber der Ring deutlich ab.

Auf Fig. 2 ist ein Tableau von solchen Wirbelabdrücken wiedergegeben, in welchem die drei Horizontalreihen aus 1, 2 und 3 *m* Entfernung und in jeder Reihe die Ringe mit $^3/_3$, $^2/_3$ und $^1/_3$ der ganzen Fallhöhe des Schlaggewichtes erzeugt wurden. Auf der Tafel drückt sich natürlich nicht ein reiner Ring ab, sondern die ganze wirbelnde Luftmasse (der Wirbelkörper nach Riecke) bläst das Lycopodium auseinander, trotz-

[1] Bei einer Fortsetzung dieser Versuche, welche ich für das nächste Semester vor habe, wird der Kasten durch einen Cylinder mit leicht verschiebbarem Stempel ersetzt werden, wodurch die bewegte Luftmasse und Strömungsgeschwindigkeit in der Mündung leicht zu berücksichtigen ist.

[2] Ich hatte ein großes Reißbrett 150 × 100 *cm* mit Zeichenpapier bespannt und mit schwarzer Wasserfarbe (Lampenruß, Beinschwarz) ganz gleichmäßig gestrichen. Die Tafel darf dann nicht mehr berührt werden, da beim Einstauben jeder Fingerabdruck oder Wischstreifen sichtbar wird.

dem bleibt die Mitte wegen der senkrechten und schwächeren Strömung ziemlich bestäubt, und die streifige Strahlenfigur zeigt eben die radiale Richtung der Wirbelrotation von innen nach außen an. Bei Schüssen aus größerer Entfernung ist dann auch eine deutliche (1 *cm* breite) Kreislinie (z. B. bei $^3/_3\,h$, $^2/_3\,h$ in 2 und 3 *m* Entfernung, Fig. 2) sichtbar, welche dem Durchmesser des eigentlichen Ringes entspricht.[1]

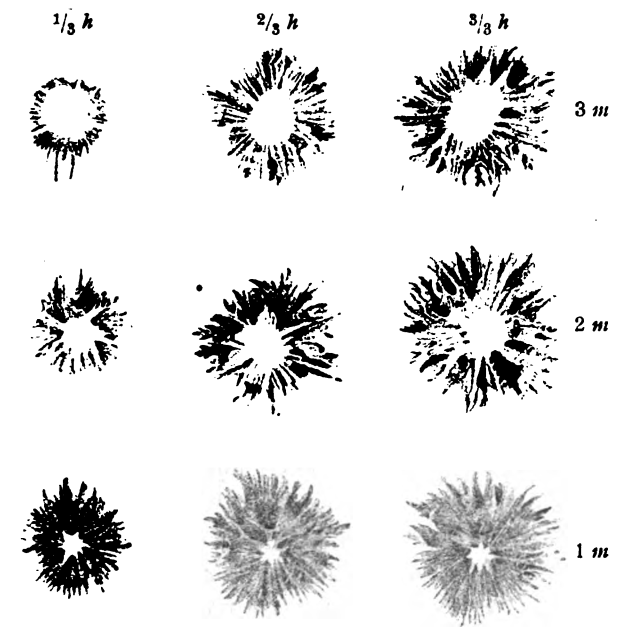


Fig. 2.

Diese Ringdurchmesser kann man auch ausmessen, und gehören zu obigem Bilde folgende Werte:

Fallhöhe			Entfernung
$^3/_3\,h$	$^2/_3\,h$	$^1/_3\,h$	
15·5 *cm*	14·0 *cm*	12·0 *cm*	1 *m*
18·0	15·0	13·5	2
18·5	16·0	12·5	3

[1] Diese Details sind in der Reproduction ganz verloren gegangen, und sehen dadurch die Abdrücke viel unregelmäßiger aus.

Dabei ist aber wohl zu berücksichtigen, dass sich der Ring beim Auftreffen auf die Tafel wesentlich vergrößert. Man kann dies sehr gut sehen, wenn man einen Rauchring gegen eine Glastafel schießt. Im Augenblicke des Auftreffens fährt der Ring um gut ein Drittel seines Durchmessers auseinander, und mit der Hemmung seiner Translationsbewegung rotiert er umso rascher in seiner Wirbelbewegung. Durch diese letztere Rotation drückt er dann die feine Kreislinie ab. Je weiter aber die Tafel steht oder je schwächer der Schlag ertheilt wird, umso leichter wird der Wirbel abgelenkt. Man sieht, dass der letzte Schuss ($^1/_3$ *h*, 3 *m*) schon wesentlich vom Centrum abweicht. (Es wurde natürlich immer die Tafel in Höhe und Breite nach einem Maßstabe verschoben.)

Aus diesem Bilde würde sich eine Zunahme der Ringdurchmesser mit wachsender Stärke des Schlages und wachsender Entfernung der Tafel ergeben. Durch die Vergrößerung der Ringdurchmesser beim Auftreffen ist aber die Erscheinung nicht rein, und benützte ich daher noch eine andere Vorrichtung, welche von diesem Fehler frei ist.

Ich bespannte einen Rahmen mit parallelen schwarzen Zwirnfäden in 3 *mm* Abstand und bestäubte dieselben mit Lycopodium. Durch so ein Gitter fliegt der Wirbel ungehindert durch, und kann man so den wirklichen Durchmesser des Ringes abmessen. Der Abdruck ist natürlich nicht so kräftig wie auf der Tafel, aber bei günstiger Beleuchtung und dunklem Hintergrunde ganz deutlich zu sehen. Eigentlich fliegt der Wirbelkörper hindurch, doch ist die Strömung der mitbewegten Luft viel schwächer als die eigentliche Wirbelringrotation, so dass die Contouren des letzteren recht scharf sind. Auf dem Bilde Fig. 3 sind vier Schüsse abgedruckt, welche alle mit der größten Fallhöhe $^3/_3$ *h* abgegeben sind. Der Rahmen befand sich aber in 1, 2, 3 und respective 4 *m* Entfernung. Hier sieht man deutlich die Ringform, nur ist bei den näheren Schüssen auch die Mitte

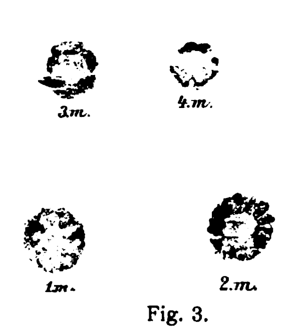


Fig. 3.

stärker ausgeblasen. Die Ringdurchmesser sind aber fast constant.

Dass die Wirbel durch das Gitter nicht zerstört werden, kann man an mit Rauch gefärbten Ringen sehen, und dann fieng ich dieselben auch auf einer hinter dem Gitter aufgestellten Lycopodiumtafel wieder auf. Ich fand so, dass sich im Gitterabstande von 1 *m* die Ringe

	Fallhöhe		
	$^3/_3\,h$	$^2/_3\,h$	$^1/_3\,h$
von	9·1	9·9	7·3 *cm*
auf	14·8	14·2	9·9 *cm*

beim Auftreffen auf den 0·5 *m* hinter dem Gitter aufgestellten Schirm vergrößerten. Dies ergibt 1·62, 1·44, 1·36 als Verhältnis der Vergrößerung; dasselbe wächst aber mit der erhöhten lebendigen Kraft des Wirbels.

Ich maß nun in vier Entfernungen bei sechs verschiedenen Fallhöhen wiederholt solche Ringdurchmesser auf dem Gitter, und sind die daraus abgeleiteten Mittelwerte in folgendem Schema zusammengestellt.

Fallhöhe						Entfernung
1 h	$^3/_4\,h$	$^2/_3\,h$	$^1/_2\,h$	$^1/_3\,h$	$^1/_4\,h$	
9·4 *cm*	9·3 *cm*	9·8 *cm*	9·3 *cm*	7·5 *cm*	7·4 *cm*	1 *m*
10·1	10·7	10·3	10·3	9·2	7·2	2
10·5	9·7	9·9	9·9	9·0	—	3
11·3	10·9	10·3	10·3	8·7	—	4

Diese Zahlen zeigen, dass die Durchmesser mit zunehmender Entfernung wohl etwas zunehmen, aber nur verhältnismäßig wenig, sicherer drückt sich eine Zunahme mit wachsender Stärke des Schlages aus.

Ob die angedeuteten Abnahmen für gewisse Entfernungen wirklichen Fluctuationen der Ringe entsprechen, könnten nur Mittelwerte aus einer viel größeren Reihe von Messungen entscheiden. Elliptische Schwingungen des Ringes sind mit dem Gitter, bei ovaler Mündung im Kasten, sehr leicht nachweisbar, und werde ich auch noch die Schwingungsdauer dieser Oscillationen durch Ermittelung der Entfernung für die senkrechte Ellipsenlage und der dazu gehörigen Flugzeit ermitteln.

Vorläufig maß ich zuerst mit einem Chronographen[1] die Zeiten, welche die Ringe brauchten, um gewisse Wegstrecken

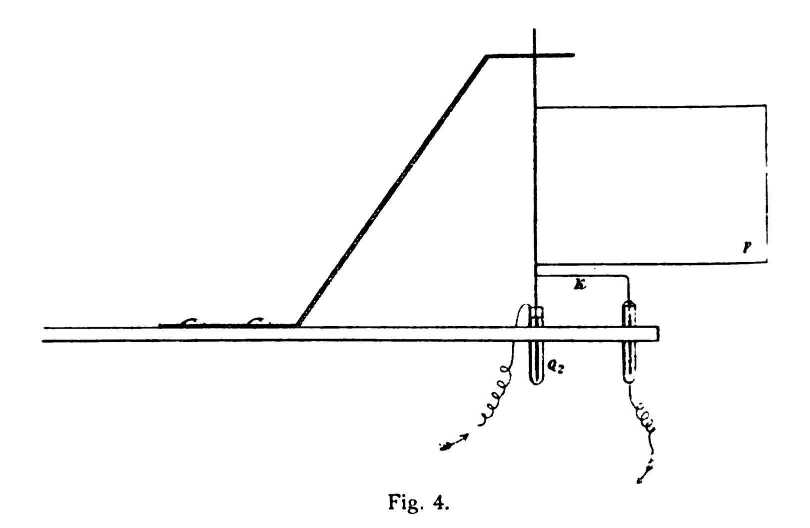


Fig. 4.

zurückzulegen. Zu dem Ende war an dem Hebelende, welches beim Schlage herabgedrückt wurde, ein Contact angebracht, der durch zwei Quecksilbernäpfe Q_1 (Fig. 1) einen Strom schloss. Der herausgeschossene Wirbel öffnete dann den Strom wieder durch eine sehr leicht bewegliche Windfahne. Diese wurde in verschiedenen Entfernungen auf der Flugbahn des Ringes aufgestellt.

Die Windfahne Fig. 4 bestand aus einem Papierfähnchen *F*, das an eine dünne Stricknadel als Achse geklebt war und sich

[1] Für die gütige Überlassung dieses Instrumentes drücke ich Herrn Hofrath Prof. Dr. v. Vintschgau hier meinen besten Dank aus.

in einem unten zugeschmolzenen, mit Quecksilber gefüllten Glasröhrchen Q_2 drehte. Oben war es durch ein Blech als zweites Lager gehalten und konnte durch passendes Neigen der Axe wie ein Horizontalpendel in eine bestimmte Ruhelage eingestellt werden. In dieser Stellung lehnte es sich ganz schwach mit einem dünnen Kupferdrahte K gegen eine Quecksilberkuppe, die aus einem zweiten zugeschmolzenen Glasröhrchen herausragte. Dieser Contact war so empfindlich, dass er durch einen leichten Luftzug geöffnet werden konnte. Die Leitung zu dem Registrierhebel des Chronographen gieng nun über den Contact Q_1 beim Hebel des Schießapparates und dann über den Contact Q_2 der Windfahne.

Das Fallgewicht war an einem feinen Eisendraht in der gewünschten Fallhöhe aufgehängt, und wurde derselbe, nachdem der Chronograph in Gang gesetzt war und die berußte Trommel eine constante Geschwindigkeit erlangt hatte, beim Einrücken des Schreibehebels abgebrannt. Dann schlug das Gewicht auf den Hebel, schloss dadurch den ersten Contact, die Registrierfeder wurde angezogen und der Wirbel flog gleichzeitig aus der Mündung. Passierte der Wirbel die Fahne, so öffnete sich der zweite Contact und die Registrierfeder senkte sich. Gleichzeitig schrieb die Zinke einer Stimmgabel von 50 Schwingungen in der Secunde ihre Sinuscurve unter die Registrierlinie, und so konnten, da die Zehntel einer Welle sicher zu messen waren, die Zeiten auf $^1/_{500}$ Secunde genau bestimmt werden.

Es zeigte sich nun, dass bei kleinen Entfernungen und starken Schlägen die Zeiten sehr gut untereinander stimmten, bei größeren Entfernungen aber und bei langsamer Bewegung der Ringe traten immer stärkere Störungen auf. Es rührte dies von Luftströmungen in dem sehr ungleich temperierten Locale her, und werde ich auch mit dem verbesserten Apparate diese Messungen wiederholen. Die vorliegenden Werte sollen daher mehr als orientierende Versuche gelten und zeigen, dass sich genauere Bestimmungen lohnen.

Die erhaltenen Zeiten, in Stimmgabelschwingungen gemessen, waren:

Bei $^1/_3$ der ganzen Fallhöhe.

In der Entfernung von		
1 *m*	1·5 *m*	2 *m*
8·8	16·7	28·7
8·9	17·6	26·2
9·6	17·9	25·5
9·3	17·2	26·4
10·2	17·6	Fehlschuss
9·1	18·0	Fehlschuss
Mittel...9·32	17·5	26·70

Bei $^2/_3$ der ganzen Fallhöhe.

In der Entfernung von			
1 *m*	1·5 *m*	2 *m*	2·5 *m*
6·3	14·8	18·0	28·9
6·3	11·5	22·3	35·0
6·2	14·7	21·6	30·0
6·1	13·0	18·1	32·0
6·3	11·8	18·8	33·3
6·6	13·0	17·7	29·7
6·2	14·6	Fehlschuss	Fehlschuss
6·1	Fehlschuss	»	»
Mittel.....6·26	13·34	19·4	31·48

Bei $^3/_3$ der Fallhöhe.

In der Entfernung von				
1 *m*	1·5 *m*	2 *m*	2·5 *m*	3 *m*
5·0	10·7	14·8	20·8	28·7
5·4	8·8	16·6	22·3	26·6
5·1	8·9	16·2	20·5	28·3
4·9	10·8	17·6	27·4	29·1
5·0	10·4	14·3	23·8	26·6
4·5	9·5	16·0	Fehlschuss	Fehlschuss
4·5	9·4	13·8	»	»
5·0	Fehlschuss	Fehlschuss	»	»
Mittel . . . 4·93	9·79	15·61	22·96	27·86

Die Mittelwerte, in Secunden umgerechnet, sind daher:

Fallhöhe	Entfernung				
	1 *m*	1·5 *m*	2 *m*	2·5 *m*	3 *m*
$^1/_3$	0·186	0·350	0·534	—	—
$^2/_3$	0·125	0·267	0·388	0·630	—
$^3/_3$	0·099	0·196	0·312	0·459	0·557

Diese Zeiten sind in folgendem Netze aufgetragen und sieht man hier das rasche Anwachsen derselben mit der zunehmenden Entfernung. Die Enden der Wege, wo die Ringe zum Stillstande kommen, konnten aber nicht mehr gut verfolgt werden, da schon hier bei den größeren Entfernungen die Fehlschüsse sich rasch mehrten und die Störungen immer größer wurden. Ich trachtete daher, durch Färbung mit Rauch wenigstens ungefähr diese Stellen zu bestimmen und fand so für

die drei Fallhöhen . . . $^1/_3$ $^2/_3$ $^3/_3$
die Strecken . . . . 4·6 6·3 7·9 *m*.

Bildet man die Verhältnisse der einzelnen Zeiten $t_k : t_i$, die zur selben Entfernung gehören und die Verhältnisse der Entfernungen $s_i : s_k$ des Stillstandes, sowie die Quadratwurzeln

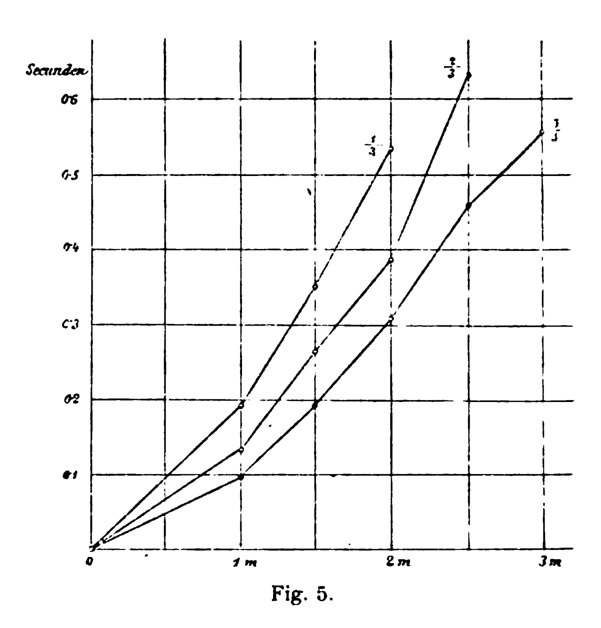


Fig. 5.

$\sqrt{h_i} : \sqrt{h_k}$ aus den drei Fallhöhen, die kleinste als Einheit angenommen, so erhält man:

In der Entfernung von				Endstrecken	Fallhöhen
1 *m*	1·5 *m*	2 *m*	2·5 *m*		
$t_1 : t_3 = 1 \cdot 89$	1·79	1·71	—	$s_3 : s_1 = 1 \cdot 71$	$\sqrt{h_3 : h_1} = \sqrt{3} = 1 \cdot 73$
$t_1 : t_2 = 1 \cdot 49$	1·36	1·38	1·37	$s_2 : s_1 = 1 \cdot 38$	$\sqrt{h_2 : h_1} = \sqrt{2} = 1 \cdot 41$
$t_2 : t_3 = 1 \cdot 27$	1·34	1·24	—	$s_3 : s_2 = 1 \cdot 25$	$\sqrt{h_3 : h_2} = \sqrt{3/2} = 1 \cdot 23$

Es tritt hier hervor, dass die Verhältnisse alle der Quadratwurzel aus den Fallhöhen sehr nahe kommen; die Quadrate der Verhältnisse waren demnach den aufgewandten lebendigen Kräften (bei Explosionsschüssen der Pulverladung) proportional. Die verschiedenen Abweichungen würden sich gewiss bei der

eingangs erwähnten Verbesserung, wo man insbesonders die Anfangsgeschwindigkeiten und die Masse der Wirbel besser kennt, rechnerisch verfolgen lassen.

Die Bewegung des Wirbels muss ja sowohl nach den Gesetzen des mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandes, als auch nach den Beziehungen für das Rollen einer Kugel mit gegebener Translations- und Rotationsgeschwindigkeit (Nachlaufer auf dem Billard) sehr nahe übereinstimmen. Eine Anwendung dieser Formeln scheiterte aber an der zu geringen Zahl der gemessenen Wegpunkte und der zu großen Unsicherheit bei den größeren Entfernungen. Trotzdem deuten einige Knickungen in den Curven des Netzes auf diese Art der Bewegung hin.

Mit dem kleinen Böllermodel 1:10 maß ich auch einige Flugseiten, und zwar jene, welche zum Durchlaufen der ersten 10 *m* nöthig waren. Ich erhielt so die Werte:

0·196, 0·300, 0·236, 0·210, im Mittel 0·236 Secunden. Mittlere Geschwindigkeit 42·3 *m*/sec.

Dürfte man für einen schätzungsweisen Vergleich annehmen, dass die lebendigen Kräfte dieses geschossenen Ringes und des aus dem Tait'schen Kasten mit größter Fallhöhe geschlagenen, wesentlich durch das Product der Ringmassen in das Quadrat der Translationsgeschwindigkeit gegeben seien und der auf die Rotationsbewegung entfallende Antheil in beiden Fällen denselben procentischen Betrag hat, so würde hier das Verhältnis der lebendigen Kräfte ungefähr 1:10 betragen. Dabei sind die Dimensionen der Ringe folgendermaßen angenommen: die Durchmesser zu 18 und 10 *cm* und die Radien der Ringwulste zu 1·5 und 0·8 *cm*. Verhalten sich dann die Strecken, welche die Ringe erreichen, wirklich wie die Quadratwurzeln aus den lebendigen Kräften, so könnte der aus dem Model geschossene Ring $25 \cdot 2\, m = 8\sqrt{10}$ erreichen, da der Rauchring bis gegen 8 *m* weit flog. Da das Model ferners eine genau ähnliche Verkleinerung des Originaltypus ist, so wird die Ringbildung und der Verlauf der Bewegung auch mit den Originalwirbeln sehr ähnlich sein. Die großen Ringe haben gegen 1 *m* Durchmesser und gewiss 10 *cm* Wulstradius. Inner-

halb der ersten 100 *m* bewegen sie sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von 60 *m*/sec. Darnach stünden die lebendigen Kräfte von Model und Original im Verhältnisse von 1 : 493, was wieder bei Annahme der Giltigkeit der Beziehungen über die erreichbaren Endstrecken einen Wert von $25 \cdot 2 \sqrt{493} = 560 m$ ergeben würde. Bei einer Ballonfahrt wurden in letzterer Zeit Verticalschüsse von Wetterschießböllern beobachtet und wurde als obere Grenze, welche die Wirbel erreichten, 500 *m* angegeben. Dies würde mit der vorliegenden Schätzung ziemlich übereinstimmen.

Eine Studie über den Wehnelt'schen Unterbrecher

von

Dr. **Anton Lampa.**

Aus dem physikalischen Cabinet der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1900.)

1. Die erste Ansicht, welche sich die Herren Wehnelt und Spieß über die Wirkungsweise des elektrolytischen Unterbrechers gebildet haben, bestand in der Annahme, dass es sich hiebei um wechselstromartige Vorgänge handle, welche durch die Selbstinduction des Stromkreises und die Polarisationscapacität in der Unterbrechungszelle bestimmt seien. Wehnelt selbst hat an dieser Ansicht nicht festgehalten und eine Darstellung von der Wirkungsweise der elektrolytischen Unterbrechung gegeben,[1] mit welcher diejenige in wesentlicher Übereinstimmung steht, die Herr Simon zur Grundlage von mathematischen Betrachtungen gemacht hat.[2] Die Simon'sche Formel hat Herr Ruhmer einer experimentellen Prüfung unterworfen.[3] Es ergab sich eine genügende Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Trotz dieser Übereinstimmung scheint mir die Theorie Simons den Vorgang in der Unterbrechungszelle nicht genügend aufzuklären. Abgesehen von den Einwendungen, welche Herr Corbino gegen die Simon'sche Theorie erhebt,[4] erscheint mir ein Punkt noch weiterer Aufklärung bedürftig.

---

[1] Wiedemann, Ann., 68, S. 233 (1899).

[2] Ebenda, S. 273.

[3] Physikalische Zeitschrift, I, S. 166 und 211.

[4] Wiedemann, Beiblätter, 24, S. 283 (1900.)

Ich meine die merkwürdige Thatsache, dass der Unterbrecher so bedeutend schlechter wirkt, wenn man die kleine (active) Elektrode zur negativen macht; Simon betrachtet dies als eine secundäre Wirkung der Occlusion des Wasserstoffes. Ohne leugnen zu wollen, dass an einer Platinelektrode eine solche auftreten und den Vorgang beeinflussen kann, möchte ich doch zögern, in ihr den einzig bestimmenden Umstand zu sehen. Ich gebe weiter unten einige hiehergehörige Beobachtungen an.

Die erste oben angeführte Anschauung von Wehnelt und Spieß legt die Frage nach dem Charakter des an der activen Elektrode auftretenden Funkens nahe. Ich habe versucht, derselben durch Anwendung des Coherers beizukommen und theile im folgenden die Resultate meiner Beobachtungen mit.

Sämmtliche Beobachtungen führen zu dem Resultate, dass die Einwirkung auf den Coherer bei dauerndem Gang des Unterbrechers stark ist, wenn die active Elektrode negativ, sehr klein, wenn sie positiv ist. Zum Betriebe des Unterbrechers wurde der Strom der Lichtleitung (110 Volt) mit Vorschaltung eines Widerstandes von 5 Ohm benützt. Der Unterbrecher hatte im Princip die gewöhnliche Construction mit regulierbarer Länge der activen Elektrode. Dieselbe bestand aus einem Platindraht von 1·5 *mm* Durchmesser und konnte bis zu einer Länge von 13·2 *mm* aus der isolierenden Hülle herausgeschoben werden. Die Beobachtungen wurden bei verschiedenen Längen der activen Elektrode angestellt; die Ziffern 0 bis 8 bedeuten der Reihe nach Längen der activen Elektrode von 13·2, 12·3, 9·7, 7·9, 6·2, 4·4, 2·6, 0·9, 0·1 *mm*. Die zweite Elektrode bestand aus einer Bleiplatte, als Elektrolyt diente verdünnte Schwefelsäure.

2. Zunächst wurde in den Stromkreis des Unterbrechers ein Inductorium ohne Condensator geschaltet. Dasselbe gab mit dem Wehnelt'schen Unterbrecher bei passender Länge der activen Elektrode zwischen Spitze und Platte einen Lichtbogen von 12 *cm* maximaler Länge. Bei den Beobachtungen war der secundäre Kreis desselben offen. Die Entfernung des Wehnelt-schen Unterbrechers vom Coherer betrug 10 *cm*, diejenige des Inductoriums circa 3 *m*. Während bei dauerndem Gange der Coherer ganz unbeeinflusst blieb, wenn die active Elektrode

positiv war, erfolgten starke Ausschläge des Galvanometers wenn die active Elektrode negativ war, wie aus den folgenden Zahlen ersichtlich ist.

Länge der activen Elektrode		Ausschlag des Galvanometers
0	....	13 Scalentheile
1	....	17
2	....	18
3	....	18·2
4	....	18·8
5	....	18·3
6	....	17·5
7	....	15·3
8	....	13

Zu bemerken ist, dass zeitweilig stärkere Ausschläge bei positiver activer Elektrode zu constatieren waren, im Momente, wo der Strom vollständig geöffnet wurde. Schloss man bei positiver activer Elektrode den Strom nur für einen Augenblick, so erhielt man ebenfalls stärkere Ausschläge, die im allgemeinen immer geringer waren als bei negativer activer Elektrode, jedoch für verschiedene Länge der Elektrode gleichen Gang mit den oben angeführten Werten zeigten. Die Beeinflussung des Coherers ist im Falle der Positivität der activen Elektrode an die Öffnung des Stromes gebunden und, soweit ich sehen konnte, abhängig davon, dass sie auf eine bestimmte Phase des Ganges des Unterbrechers fällt. Näheres konnte ich experimentell nicht constatieren.

Mit Rücksicht auf die Rolle, welche Simon dem occludierten Wasserstoffe bei Platinelektroden zuschreibt, richtete ich mir eine Anzahl (nicht regulierbarer) activer Elektroden aus anderen Metallen. Als zweite Elektrode diente hiebei wieder eine Bleiplatte, als Elektrolyt verdünnte Schwefelsäure. Ich gebe in der folgenden Tabelle die erhaltenen Zahlen. Zu denselben wäre zu bemerken, dass 1. die wirksamen Elektrodenoberflächen nicht gleich groß waren und 2. die angeführten Zahlen durch einen einmaligen Versuch gewonnen sind, weil ich die Elektroden nicht abnützen wollte. Die Pt-Elektrode

dieser Versuchsreihe ist nicht identisch mit jener der oben angeführten. Die Zahlen der Positivität der activen Elektrode wurden bei möglichst kurz dauerndem Stromschlusse erhalten.

	Ausschlag des Galvanometers, wenn die active Elektrode	
	positiv	negativ
Pt	6	20
Cu	2	16
Ir	6	26
Fe	2	20
Ag	5	18
Pd	5	18
Au	1	12
Al	5	19

Wie man aus diesen Zahlen ersieht, ist der Unterschied zwischen Positivität und Negativität der activen Elektrode unabhängig von der Natur des Metalles, aus welchem die active Elektrode besteht. Bemerkenswert ist das Verhalten des Goldes, welches durch besonders kleine Zahlen ausgezeichnet ist. Dem Verhalten gegen den Coherer entspricht ein analoges Verhalten, betreffend die inductive Wirkung auf den secundären Kreis, wie ich mich durch den Versuch überzeugt habe. Auch bei den Metallen, wo eine Occlusion des Wasserstoffes nicht anzunehmen ist, ist die Wirkung gering, wenn die active Elektrode negativ ist.

Die Strahlung, welche den Coherer beeinflusst, geht vom ganzen Leiterkreis aus. Stellt man den Inductionsapparat vor den Coherer, den Unterbrecher in große Entfernung, so erhält man ganz gleiche Resultate. Ich habe ferner einen Unterbrecher construiert, welcher aus zwei durch einen Heber miteinander verbundenen Gefäßen bestand, und je eines derselben durch eine metallische Hülle gegen den Coherer abgeblendet, das andere vor den Coherer gestellt. Wieder stimmten die erhaltenen Zahlen mit den früheren Beobachtungen überein.

Aus den angeführten Beobachtungen ergibt sich die Thatsache, dass starke Wirksamkeit des Unterbrechers mit geringer Strahlung, geringe Wirksamkeit mit starker Strahlung verbunden ist. Dies lässt sich durch gleichzeitige Beobachtung der Strahlung und der inductiven Wirkung gut feststellen. Um hiebei jedoch ähnliche Verhältnisse wie bei den früheren Beobachtungen zu haben, vermied ich es bei diesen Beobachtungen, den Secundärkreis durch eine Funkenstrecke zu schließen, wodurch die Selbstinduction des Primärkreises geändert worden wäre, und benützte eine Anordnung, welche einer inzwischen von Borgmann und Petrowski[1] beschriebenen ähnlich ist. Eine in das Feld des Ruhmkorff parallel zur Mittellinie desselben gestellte Geißler'sche Röhre leuchtet auch bei offenem Secundärkreise. Je nach der Stärke der inductiven Wirkung des Primärstromes verschiebt sich die Grenze, innerhalb welcher die Röhre noch anspricht; dieselbe ist bedeutend weiter vom Inductionsapparat entfernt, wenn die active Elektrode positiv ist.

3. Bei jeder Unterbrechung des Primärstromes entstehen in der Secundärspule Oscillationen, welche auf die Primärspule zurückwirken. Um die Oscillationen, welche diesem Umstande ihre Entstehung verdanken, auszuschalten, machte ich eine Reihe von Beobachtungen mit einer einzigen Spule (Eisenkern mit drei Windungslagen). Die Resultate waren im ganzen Großen die gleichen: bei regelmäßigem Gange des Unterbrechers starke Einwirkung auf den Coherer, wenn die active Elektrode negativ, kaum nennenswerte, wenn sie positiv war. Im letzteren Falle trat infolge der kleineren Selbstinduction öfter Stromumschlag ein; gelegentlich eines solchen wurde zeitweilig eine starke Beeinflussung des Coherers beobachtet. Besondere Zahlen anzuführen ist überflüssig, da die Erscheinungen im wesentlichen die gleichen waren wie die bei Einschaltung des Inductionsapparates auftretenden.

Ich habe schließlich auch die Spule weggelassen und den Stromkreis des Unterbrechers (unter Vorschaltung von 5 Ohm des Kurbelrheostaten wie oben) direct geschlossen. Auch in

---

[1] Wiedemann, Beiblätter, 24, S. 306 (1900).

diesem Falle sprach der Unterbrecher noch an, wenn auch die Neigung zu Stromumschlag größer wurde. Offenbar ist also die Selbstinduction der Stromzuleitung ausreichend, um den Unterbrecher in Gang zu erhalten. Auch in diesem Falle ergaben die Beobachtungen den charakteristischen Unterschied zwischen Positivität und Negativität der activen Elektrode; das Maximum der Einwirkung war allerdings geringer; dasselbe betrug bei Inductorium und Inductionsspule circa 19, bei directem Schlusse circa 13 Theilstriche.[1]

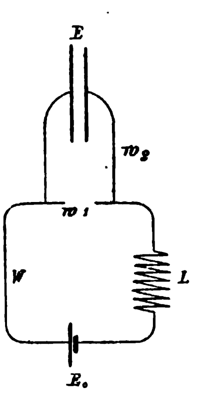
4. Mit Rücksicht auf die erhaltenen Resultate war es für mich von Interesse, die Beeinflussung des Coherers bei gewöhnlicher Unterbrechung des Stromkreises zu untersuchen. Ich ersetzte zunächst den Wehnelt-Unterbrecher durch einen Hg-Unterbrecher. Die Wirkung auf den Coherer war gering, gleichgiltig, ob man das Hg mit H_2O oder Alkohol bedeckte oder unbedeckt ließ. Ebenso war es gegenstandslos, ob der Strom den Unterbrecher von der Platinspitze zum Hg oder umgekehrt durchfloss. (Säuerte man hingegen das das Hg bedeckende Wasser an, so erhielt man wieder starke Einwirkung, wenn der Platinstift negativ, schwache, wenn er positiv war. Der Hg-Unterbrecher functioniert dann eben als elektrolytischer Unterbrecher.) Hie und da erhielt man wohl stärkere Ausschläge, ähnlich wie solche auch beim Wehnelt-Unterbrecher bei positiver activer Elektrode zeitweilig auftreten.

Bedient man sich endlich zur Öffnung des Stromkreises einzig und allein eines Stromschlüssels, so erhält man das gleiche Resultat wie beim Hg-Unterbrecher. Im allgemeinen ist die Einwirkung auf den Coherer gleich Null, hie und da erhält man einen stärkeren Ausschlag.

5. Zur Interpretation der angeführten Thatsachen ist es nothwendig, den Vorgang der Unterbrechung etwas näher ins Auge zu fassen, und zwar gerade jenen Theil des Unterbrechungsvorganges, welcher nach Bildung der die Unterbrechung bewirkenden Gashülle abläuft. Wir betrachten zu

[1] Der Coherer wurde vor jeder Bestrahlung auf den gleichen Anfangswiderstand von beiläufig 20.000 Ohm zurückgeklopft. Ausschläge von 5, 13, 20 Scalentheilen entsprechen einer Herabsetzung des Widerstandes auf beiläufig 7000, 3000, 500 Ohm.

diesem Zwecke einen Stromkreis, welcher aus einer Stromquelle, einer Selbstinduction und einem Condensator in der durch die nebenstehende Figur dargestellten Anordnung besteht. Die Zuleitungsdrähte zum Condensator sind zu beiden Seiten der Öffnungsstelle angeschlossen. Der Widerstand dieser Zuleitungsdrähte sei w_2. Die Öffnungsstelle sei zunächst geschlossen, im Stromkreise fließe ein constanter Strom $J_0 = \frac{E_0}{W}$, worin E_0 die elektromotorische Kraft der Stromquelle, W den Widerstand des Kreises bedeutet. Die Potentialdifferenz des Condensators ist also zunächst $= 0$. Ist der Widerstand der Zuleitungsdrähte w_2 klein — was wir voraussetzen wollen —, so ist die Potentialdifferenz der Elektroden an der Öffnungsstelle annähernd dieselbe wie diejenige des Condensators. Beim Öffnen des Stromkreises beginnt nun die Ladung des Condensators, deren Verlauf in der bekannten Weise verfolgt werden kann. Bezeichnet man die Capacität des Condensators mit C, die Potentialdifferenz desselben zur Zeit t mit E — dieselbe wirkt der elektromotorischen Kraft E_0 entgegen —, ferner die Selbstinduction mit L, den Strom zur Zeit t mit J, so erhält man,[1] da für $t = 0$, $E = 0$ und $J = J_0 = \frac{E_0}{W}$:



$$E = \frac{E_0}{CW\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

und

$$J = \frac{E_0}{W\beta} e^{-\alpha t}[-\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t],$$

worin

$$\alpha = \frac{W}{2L} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{W^2}{4L^2}}.$$

[1] Vergl. K. R. Johnson, Drude, Annalen der Physik, 2, S. 179 (1900). Die Arbeit Johnsons ist erschienen, nachdem ich die im Texte dargelegten Anschauungen bereits gewonnen hatte. Ich freue mich der Übereinstimmung in der Auffassung des Öffnungsfunkens.

Hiebei ist vorausgesetzt, dass $\frac{1}{CL} > \frac{W^2}{4L^2}$.

Die Potentialdifferenz des Condensators — somit auch diejenige der Elektroden der Unterbrechungsstelle — ändert sich somit nach den Gesetzen einer gedämpften Schwingung. Ihr absolutes Maximum erreicht sie zwischen $\beta t = 0$ und $\beta t = \pi$. Ist dieses Maximum kleiner als die Potentialdifferenz, welche nöthig ist, um die Öffnungsstelle mittels eines Funkens zu durchbrechen, so kommt es überhaupt nicht zur Bildung eines Öffnungsfunkens. Es kann jedoch auch die Höhe des Funkenpotentials niedriger sein, in welchem Falle der Öffnungsfunken entsteht. Bis zur Erreichung dieses Potentials verläuft dann der Strom J nach der oben angegebenen Formel; von diesem Momente an ist jedoch der Stromverlauf durch complicierte Gesetze bestimmt, welche ich einer besonderen Darstellung vorbehalte. Man übersieht jedoch auch ohne näheres Eingehen, dass nun verschiedene Fälle möglich sind. Ist der Widerstand der Funkenstrecke w_1 klein, so ergießt sich der Ladungsstrom zum größten Theile in die Funkenstrecke; das Potential des Condensators wird nur wenig über den kritischen Wert des Entladungspotentials ansteigen, dann wieder sinken bis zum kritischen Werte, in welchem Augenblicke der Funken aufhört. Von da ab geht die Ladung, respective Entladung des Condensators oscillatorisch vor sich. Ist jedoch der Widerstand der Funkenstrecke groß, so verbraucht sie sehr wenig Strom, und der Effect des Funkens ist nun der, dass das erste Maximum der Potentialdifferenz des Condensators nur wenig herabgedrückt wird. Es kann nun sogar der Fall eintreten, dass auch das zweite Maximum der Potentialdifferenz des Condensators das Funkenpotential übersteigt; dann entsteht auch bei der zweiten Halbschwingung ein Funken. Es können schließlich auch noch bei der dritten, vierten etc. Halbschwingung Öffnungsfunken entstehen: Wir haben dann eine Reihe von Öffnungsfunken, in welchen jedoch die Stromrichtung alterniert. Wir werden in diesem Falle eine kräftige elektromagnetische Strahlung erhalten.

7. Die vorstehenden Erörterungen gelten nun auch für den Wehnelt Unterbrecher. Selbst wenn wir an die Elektroden des

Unterbrechers keine Capacität anschalten, hat ja der Stromkreis selbst eine gewisse Capacität, welche wir im Momente der Unterbrechung nach dem Vorgange von Helmholtz an die beiden Enden der Öffnungsstelle (active Elektrode und Elektrolyt) verlegen können. Diese Capacität ist sehr klein, sichert also die Erfüllung der Bedingung $\frac{1}{CL} > \frac{W^2}{4L^2}$. Ebenso wird die Potentialdifferenz dieser Capacität im Momente der Öffnung annähernd gleich Null sein. Genau ist dies nicht der Fall, was jedoch für den weiteren Vorgang gleichgiltig ist; es wird hiedurch nur eine geringfügige Complication der Formeln herbeigeführt. Die an der activen Elektrode auftretende Lichthülle beweist, dass die Potentialdifferenz der Elektroden an der Öffnungsstelle höhere Beträge erreicht, als zur Bildung des Funkens nöthig sind; sie ist ja durch den Funken veranlasst. Mit Rücksicht auf meine Beobachtungen dürfen wir auf Grund der oben skizzierten theoretischen Überlegungen der Ansicht Ausdruck geben, dass der Widerstand im Öffnungsfunken gering ist, wenn die active Elektrode positiv, dass er groß ist, wenn die active Elektrode negativ ist. Im letzteren Falle entsteht dann starke elektromagnetische Strahlung, während im ersteren eine solche nicht auftritt. Für diese Anschauung sprechen weitere Thatsachen, auf welche ich noch kurz eingehen möchte. Ist der Widerstand der Funkenstrecke groß, so wird in derselben eine relativ größere Wärmeentwickelung auftreten, als wenn ihr Widerstand klein ist. Dass dies in unserem Falle thatsächlich zutrifft, können wir aus dem Umstande schließen, dass die active Elektrode in viel stärkerem Maße angegriffen wird, wenn sie negativ ist. Für die Anschauung, dass in diesem Falle der Funken oscillatorisch ist, spricht ferner die spectroskopische Betrachtung des Funkens. Das Spectrum zeigt sowohl die Linien des Wasserstoffes, als auch die des Platins, während es bei positiver activer Elektrode nur die Wasserstofflinien zeigt. Untersucht man den Funken mittels eines schnell rotierenden Spiegels — ich verwendete einen solchen Edelmann'scher Construction mit Antrieb durch Kohlensäure —, so erscheint das Funkenbild kurz bei positiver activer Elektrode, dagegen lang ausgezogen bei negativer activer Elek-

trode; der Funken liefert in letzterem Falle ein silberglänzendes Lichtband, in welchem Discontinuitäten bemerklich sind. Auffallend wird das verschiedene Verhalten, wenn man an die beiden Klemmen des Unterbrechers eine größere Capacität anschaltet. Ich nahm eine Capacität von 2·5 Mikrofarad. War nun die active Elektrode positiv, so änderte der Funken sein Aussehen nicht. War sie negativ, so war schon bei directem Ansehen eine auffallende Veränderung wahrnehmbar. Es hat dann den Anschein, als ob die Lichthüllen bei negativer und positiver activer Elektrode (ohne Capacität) sich superponieren würden. Im rotierenden Spiegel sieht man dann das silberglänzende Lichtband von röthlichen Lichtballen durchsetzt, die in regelmäßigen Zwischenräumen aufeinanderfolgen.

Auch ältere Erfahrungen, welche bei der Hervorrufung Hertz'scher Oscillationen gemacht wurden, dürfen als Stütze für meine Anschauung herangezogen werden. Damit der Funken wirksam sei, müssen die Kugeln des Erregers blank erhalten werden. Der active Funken ist silberglänzend, der nichtactive mehr röthlich, analog den beiden Arten der Funken im Wehnelt-Unterbrecher. Ähnlich erhielt ich einst bei Anwendung des Hg-Unterbrechers unmittelbar nach Füllung mit reinem Hg starke Beeinflussung, während jedoch bei Wiederholung des Versuches eine solche nicht mehr auftrat, da das Hg durch den ersten Versuch verunreinigt war. Auch das zeitweilige Auftreten von stärkeren Ausschlägen bei activer positiver Elektrode findet in meiner Anschauung seine Erklärung. Der Vorgang wird durch zwei Öffnungsstellen recht compliciert, doch wird im allgemeinen ein zeitliches Zusammenfallen wie eine Summation der Widerstände der Öffnungsstellen wirken.

Was den Widerstand der Öffnungsstelle selbst betrifft, so setzt sich derselbe aus zwei Theilen zusammen, einem, welcher von der Leitfähigkeit des Elektrolytes (oder Gases) abhängt und einem zweiten, welchem verschiedene Namen: »Widerstand der Grenzfläche«, »elektromotorische Gegenkraft« beigelegt werden. Wenn wir daher von großem Widerstande bei activer negativer Elektrode, kleinem bei activer positiver Elektrode sprachen, so wäre noch zu bemerken, dass der von der Leitfähigkeit des Gases herrührende Theil zwar von der Größe

und der Zusammensetzung der Gashülle in den beiden Fällen abhängen, der Hauptantheil an der Verschiedenheit aber in dem Widerstande der Grenzfläche zu suchen sein wird. Und dies stimmt wieder gut mit dem bekannten Experimente überein, welches gewöhnlich zur Illustration der Ungleichheit der beiden Elektricitäten angestellt wird: die positive Elektricität strömt viel leichter aus einer Spitze gegen eine Platte, als die negative. Dieser Versuch bietet eine vollkommene Analogie.

Die geringe Wirkung des Unterbrechers, wenn die active Elektrode negativ ist, erscheint durch die angeführten Beobachtungen auch verständlicher. Ist die active Elektrode positiv, so erfolgt der Abfall der durch die Selbstinduction im primären Kreise entstandenen Spannung in sehr kurzer Zeit, während er sich bei negativer activer Elektrode auf eine längere Zeit erstreckt, wobei er noch in Oscillationen vor sich geht, denen die Secundärspule nur im Falle der Resonanz folgen würde (was im allgemeinen überdies gar nicht erwünscht wäre, da hiedurch ein ständiger Polwechsel bedingt wäre). Außerdem geht hiebei ein Theil der Energie durch Strahlung verloren.

Um endlich noch auf die eingangs erwähnte ursprüngliche Ansicht der Herren Wehnelt und Spieß zurückzukommen, so haben meine Beobachtungen gezeigt, dass im Stromkreise des Unterbrechers bei negativer activer Elektrode wohl Oscillationen auftreten, jedoch, wie aus der Discussion hervorgeht, viel kleinere Schwingungsdauern haben, als die von einer Unterbrechung zur anderen verfließende Zeit. Für die Einleitung der Unterbrechung ist, wie Herr Wehnelt selbst ausgeführt hat, die an der activen Elektrode auftretende Gashülle Ursache. Für den weiteren Verlauf des Vorganges sind außer der elektromotorischen Kraft, dem Widerstande und der Selbstinduction des Stromkreises die Verhältnisse an der activen Elektrode maßgebend. Eine eingehendere Erkenntnis des der Unterbrechung folgenden Vorganges wird aus der Untersuchung dieser Verhältnisse, respective aus der Physik der Gasentladungen zu gewinnen sein.

Vorläufige Mittheilung über die photographische Aufnahme der elektrischen Entladung auf rotierenden Films

von

Karl Przibram.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1900.)

Nach einer Beobachtung Beccarias[1] gibt das negative Lichtbüschel in freier Luft einen höheren Ton als das positive. Da nun die Tonhöhe des Büschels, namentlich wenn es sich um die Vergleichung verschiedener Gase handelt, schwer zu ermitteln ist, schien es wünschenswert, ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Intermittenzen des Büschels anzuwenden. Als solches diente bei den vorliegenden Versuchen eine stroboskopisch-photographische Methode. Da das Licht des Büschels sehr schwach ist, so dürfte die Anwendung eines rotierenden Spiegels (wie bei der Analyse der oscillatorischen Entladung durch Feddersen) oder die Projection des Bildes auf eine bewegte photographische Platte[2] hier nicht zum Ziele führen. Es wurden deshalb die Elektroden direct auf einen rotierenden photographischen Film aufgesetzt. Aus dem Film (Schleussner'sche Negativfolie) wurde eine Kreisscheibe (Fig. 1, *S*) ausgeschnitten und diese auf die Axe eines Rotationsapparates aufgeschraubt. Im Abstande von 4·5, respective 9 *cm* von der Axe und parallel zu derselben wurden zwei Elektroden *E* (Kupferdraht von circa 1 *mm* Durchmesser) dem Film bis zur Berührung genähert. Als Elektricitätsquelle diente eine kleine

---

[1] Siehe Wiedemann, Elektricität, S. 616, §. 806.

[2] Über die Entstehung des elektrischen Funkens. B. Walter, Wied. Ann., Bd. 66 (98), S. 636.

Influenzmaschine mit Zwischenschaltung je einer kleinen Leydenerflasche von 4 *cm* Durchmesser und 8 *cm* Beleghöhe. Die Geschwindigkeit der Films wurde dadurch bestimmt, dass der Strahl einer Bogenlampe durch einen Schlitz, der von einer Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl geschlossen und geöffnet wurde, auf ihn fiel. Die so erhaltenen Bilder (Fig. 2) zeigen nun Folgendes:

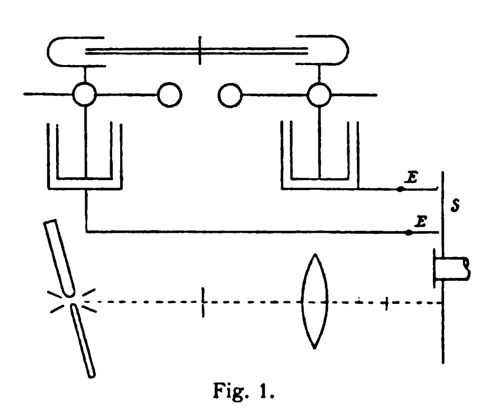
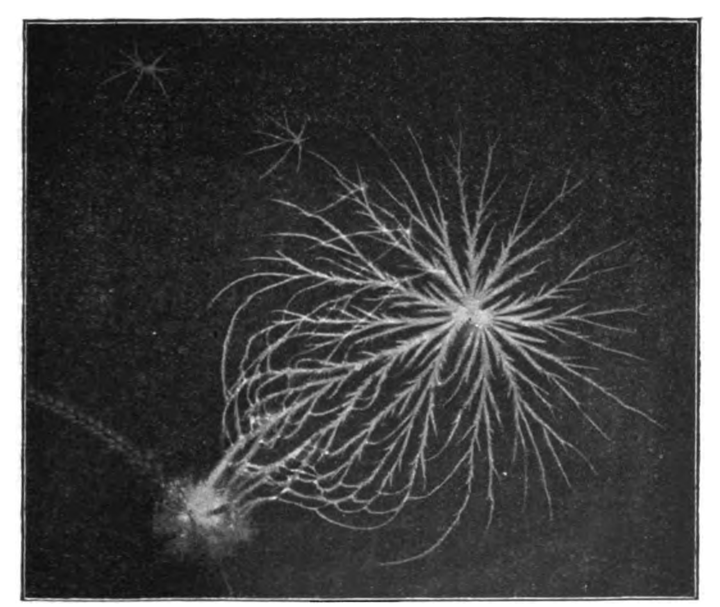


Fig. 1.

Auf die Hauptentladung folgt eine Reihe weit schwächerer Büschel. Die Häufigkeit dieser Büschel ist an der Kathode in der That größer als an der Anode. Ferner erstreckt sich der gesammte Entladungsvorgang an der Kathode über einen viel


Fig. 2.

größeren Zeitraum. Da die richtige Einstellung der beiden Elektroden Schwierigkeiten machte, wurden die späteren Aufnahmen mit nur einer Elektrode gemacht, während der andere Pol isoliert wurde. Es ergab sich im Mittel:

	Abstand zweier Entladungen		Gesammtdauer	
	+	—	+	—
	Secunden			
Luft	$6 \cdot 8.10^{-4}$	$1 \cdot 1.10^{-4}$	33.10^{-4}	42.10^{-4}
CO_2	$3 \cdot 9$ »	$1 \cdot 3$ »	15 »	60 »

Für die Versuche in CO_2 wurde die rotierende Scheibe mit einem möglichst dichten Holzbehälter umgeben und CO_2 eingeleitet. Nach Wiedemann (loc. cit.) lässt sich aus der größeren Häufigkeit der negativen Entladungen auf ein niedrigeres negatives Entladungspotential schließen. Diese Annahme würde auch die Thatsache erklären, dass die Entladung an der Kathode noch erfolgt, wenn sie an der Anode bereits aufgehört hat. Für CO_2 würde dann aus dem Verhältnisse der Gesammtdauer der beiden Büschel ein verhältnismäßig noch geringeres negatives Entladungspotential[1] folgen. Dem widerspricht scheinbar der Umstand, dass die positiven Einzelentladungen in CO_2 rascher aufeinander folgen als in Luft. Doch ist hier zu berücksichtigen, dass die folgenden Büschel in CO_2 sehr schwach sind, also offenbar nur geringe Elektricitätsmengen führen, wodurch während jeder Entladung das Potential der Elektrode nur wenig sinkt.

Schließlich sei es mir hier gestattet, Herrn Prof. Pfaundler für die freundliche Unterstützung meiner Arbeit meinen wärmsten Dank auszusprechen.

[1] Vergl. H. Sieveking, Wied. Ann., IV. Folge, Bd. 1 (1900), S. 299 und Przibram, Diese Sitzungsberichte, Bd. CVIII, Abth. II a., October 1899.

Messungen der täglichen Temperaturschwankungen in verschiedenen Tiefen des Wolfgangsees

von

Dr. **Felix M. Exner.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1900.)

Die vorliegenden Messungen der täglichen Periode der Seetemperatur, welche im Sommer 1899 am Nordende des Wolfgangsees in Salzburg ausgeführt wurden, dienten zunächst hauptsächlich einer Erprobung der Messungsmethode und können wegen der geringen Zahl der Beobachtungen nur als Vorversuche angesehen werden.

Die früheren Arbeiten über den vorliegenden Gegenstand beschränken sich hauptsächlich auf eine Abhandlung von E. Richter, »Seestudien«,[1] in welcher die Temperaturverhältnisse unserer Alpenseen eine eingehende Behandlung erfahren; doch enthält sie, sowie eine ältere Arbeit von Forel,[2] wesentlich Beobachtungen über den jährlichen Wärme-Ausgleich. Einige Beobachtungsreihen, die mit trägen Thermometern bis zu 4 *m* Tiefe angestellt wurden, geben auch die tägliche Periode an und zeigen ähnliche Temperaturvertheilungen, wie die hier beschriebenen; so gibt E. Richter für die Oberflächentemperatur des Millstättersees im Laufe von 24 Stunden folgende Reihe an:

[1] Geographische Abhandlungen, Bd. VI, Heft 2, Wien (1897).
[2] Léman, Bd. II, S. 289.

25./VII. ...	4h a.	7h 45m a.	11h 15m a.	4h p.	6h 30m p.	8h 15m p.	7h a. (26./VII.)
Cels.-Grade	22·9	22·2	24·2	28·2	27·4	25·8	23·1

Von demselben wurden während 24 Stunden auch Beobachtungen mit einstündigem Termin in den Tiefen von 0, 1, 2, 3, 4 *m* unter der Oberfläche ausgeführt, die eine der nachfolgenden ganz ähnliche Curvenschar ergeben. Beobachtungen von Th. Homén,[1] die die täglichen Temperaturschwankungen im festen Boden zum Gegenstande hatten, bilden zu den vorliegenden ein Analogon.

Die Messungen wurden an einer vom Ufer 15 *m* entfernten Stelle des Sees, wo dieser die Tiefe von 9 *m* hatte, ausgeführt. Zur Temperaturmessung wurden Bolometer aus dünnem Platindraht mit circa 125 Ohm Widerstand, welche durch Constantanleitungsdrähte mit einer Wheatstone'schen Brücke, die sich im Beobachtungsraume befand, verbunden waren, verwendet. Dieselben mussten gegen das umgebende Wasser durch Kautschukband und Schläuche gänzlich isoliert werden, weil sonst ein Polarisationsstrom durch das Wasser gieng, der die Messung unmöglich machte. Der Temperaturcoefficient des Platindrahtes betrug 0·002. Indem die Brücke durch Anschaltung von constanten Widerständen an beiden Seiten auf 34 *m* verlängert wurde, konnte mit einem d'Arsonval'schen Galvanometer die Temperatur auf 0·03° C. genau bestimmt werden.

Es wurden fünf Bolometer untereinander angebracht, und zwar in folgenden Abständen von der Oberfläche:

Nr. 1 .... 24 *cm*,
Nr. 2 .... 87 »
Nr. 3 ....149 »
Nr. 4 ....274 »
Nr. 5 ....524 »

Zweckmäßig angestellte Versuche ergaben, dass der Einwurf, das undurchsichtige Bolometer könnte durch directe Sonnenbestrahlung auf eine höhere Temperatur als das umgebende Wasser gebracht werden, ebenso wie der, die wärmeren

[1] »Der tägliche Wärme-Umsatz im Boden und die Wärmestrahlung zwischen Himmel und Erde«. Helsingfors (1897).

durch die Luft führenden Zuleitungsgrähte könnten das Bolometer durch Wärmeleitung beeinflussen, nicht gerechtfertigt waren.

Gleichzeitig mit den Bolometermessungen, die alle drei Stunden stattfanden, wurde mittels eines August'schen Psychrometers die Feuchtigkeit der Luft, sowie ihre Temperatur im Schatten bestimmt. Einige Versuche zeigten, dass die Luftfeuchtigkeit über dem See auch in einer Entfernung von 1 *km* vom Ufer der am Lande gemessenen gleich war, und zwar auch bei ablandigem Winde. Somit konnten die Psychrometerbeobachtungen am Lande ausgeführt werden.

Um eine Vorstellung von der Menge des verdunstenden Seewassers zu bekommen, wurde vom Ufer aus ein Blechcylinder von 20 *cm* Durchmesser und 25 *cm* Höhe, der oben einen breiten Rand gegen die Wellen trug, bis zu zwei Drittel seiner Höhe ins Wasser gesenkt und mit einem Volumen Wasser gefüllt, dessen Abnahme die Verdunstung bestimmte.

Diese Messungen, sowie Messungen der eingestrahlten Sonnenenergie mit einem Pouillet'schen Pyrheliometer wurden nicht regelmäßig, sondern nur zeitweilig angestellt.

Messungen der Wassertemperaturen.

Die nachfolgenden Tabellen enthalten die Temperaturen der Bolometer Nr. 1 bis Nr. 5 und der Luft, sowie die relative Luftfeuchtigkeit und das Wetter. Leider konnte nur die Angabe des obersten Bolometers mit einem Thermometer auf seinen absoluten Wert geprüft werden, und dem ist es zuzuschreiben, dass die absoluten Werte von Nr. 3 und Nr. 4 zu hoch sind, während die Schwankungen dadurch nicht beeinflusst wurden. In den Temperaturcurven sind daher nur die letzteren angegeben.

Datum 1899	Tageszeit	Temperaturen in Celsiusgraden						Relative Feuchtigkeit der Luft	Wetter
		Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Luft		
29./VIII.	12h	19·17	18·38	20·18	19·21	18·06	19·3	81	Trübe.
29./VIII.	3 p.	19·61	19·38	21·22	19·36	17·76	21·0	65	Trübe, zeitweise Sonne.
29./VIII.	6 p.	19·50	19·16	21·22	19·79	18·79	18·4	76	Seit circa 4h p. Sonne.
29./VIII.	9 p.	18·89	18·82	20·74	19·44	18·59	14·3	89	Klar.
29. VIII.	12 p.	18·93	18·57	20·62	19·26	17·89	12·5	89	Klar.
30./VIII.	6 a.	18·85	18·49	20·55	19·36	18·54	14·3	89	Klar.
30./VIII.	9 a.	19·31	19·11	20·95	19·44	18·52	16·3	79	Klar, seit circa 8h a. Sonne.
30./VIII.	12	20·85	20·18	21·08	19·50	18·51	21·5	65	Sonne, einzelne Cumuli.
30./VIII.	3 p.	21·20	20·04	20·95	19·52	18·22	24·5	46	Sonne, einzelne Cumuli.
30./VIII.	6 p.	19·97	19·02	20·99	19·54	18·38	20·0	70	Sonne, einzelne Cumuli.
30./VIII.	9 p.	19·12	18·82	20·70	19·38	18·34	16·2	89	Einzelne Wolken.
30./VIII.	12 p.	18·89	18·63	20·70	19·28	18·34	15·1	89	Bewölkt.
31./VIII.	3 a.	19·08	18·79	20·83	19·38	18·30	15·5	92	Bewölkt, später Regen.
31./VIII.	7 a.	18·71	18·45	20·55	19·70	18·54	16·1	89	Bewölkt, starker Wind und Wellen.
31./VIII.	9 a.	18·75	18·51	20·57	19·38	18·59	17·0	85	Bewölkt, starker Wind, Wellen.
31./VIII.	12	19·49	19·08	21·04	19·79	18·94	19·4	75	Bewölkt, leichter Regen.

31./VIII.	3 p.	19·65	19·02	20·91	19·50	18·79	17·2	75	Bewölkt, zeitweise Regen.
31./VIII.	6 p.	19·52	19·06	21·08	19·62	18·74	16·7	85	Bewölkt, zeitweise Regen.
31./VIII.	9 p.	18·89	18·51	20·57	19·70	18·59	15·0	89	Klar, Wind, Wellen.
31./VIII.	12 p.	18·63	18·39	20·48	19·18	18·46	14·0	89	Klar, Wind, Wellen.
1./IX.	3 a.	18·54	18·31	20·44	19·18	18·38	13·4	89	Nebel, Wind, Wellen.
1./IX.	6 a.	18·63	18·27	20·39	19·10	18·30	12·8	89	Klar, einzelne Wolken, etwas Nebel.
1./IX.	9 a.	18·71	18·43	20·41	19·14	18·34	16·2	79	Zur Hälfte bewölkt.
1./IX.	12	19·36	18·90	20·74	19·70	18·51	21·5	57	Bewölkt, zeitweise Sonne.
1./IX.	3 p.	19·49	18·71	20·61	19·18	18·54	18·0	74	Trübe.
1./IX.	6 p.	19·04	18·61	20·68	19·26	18·59	18·3	69	Klar, einzelne Wolken.
2./IX.	10 a.	19·61	18·71	20·53	19·10	18·14	19·5	65	Ganz klar.
2./IX.	12	20·95	19·18	20·66	19·22	18·18	20·8	63	Ganz klar.
2./IX.	3 p.	19·61	18·57	20·48	19·06	18·06	25·3	47	Ganz klar, starker Wind.
2./IX.	6 p.	18·92	18·41	20·39	19·10	18·14	19·6	76	Bis 5h p Sonne, dann bewölkt.
2./IX.	9 p.	18·31	17·87	19·25	18·78	17·22	15·2	93	Gewitter, starker Regen bis 8h p., dann theilweise klar.
2./IX.	12 p.	18·37	17·83	18·63	18·17	17·30	15·0	94	Trübe, zeitweise Regen.
3./IX.	9 a.	18·31	17·87	18·96	18·61	17·54	16·3	91	Regen.
3./IX.	12	18·27	18·03	19·82	18·72	17·98	14·0	88	Regen.
3./IX.	3 p.	18·47	18·01	20·04	18·78	18·18	15·1	88	Trübe, zeitweise Regen, Wind.
3./IX.	6 p.	18·47	18·01	20·04	18·78	17·98	15·0	92	Trübe, zeitweise Sonne.
3./IX.	9 p.	18·31	17·93	19·89	18·61	17·74	13·5	95	Trübe.

Datum 1899	Tages-zeit	Temperaturan in Celsiusgraden						Relative Feuchtigkeit der Luft	Wetter
		Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Luft		
3./IX.	12h p.	17·99	17·54	19·60	18·29	17·42	13·3	93	Klar, später Nebel.
4./IX.	6 a.	17·99	17·60	19·51	18·29	17·56	12·3	96	Dichter Nebel.
4./IX.	9 a.	18·23	17·87	19·74	18·47	17·90	14·0	90	Nebel, von 10h Sonne.
4./IX.	12	19·40	18·82	20·27	18·86	17·90	17·2	80	Klar, Sonne.
4./IX.	3 p.	19·97	18·86	20·45	18·98	18·10	22·5	58	Klar, Sonne, Wind.
4./IX.	6 p.	18·38	18·38	20·27	18·86	17·98	17·3	80	Klar, schwacher Wind.
4./IX.	9 p.	18·18	17·87	19·93	18·65	17·78	13·8	91	Klar.
4./IX.	12 p.	18·92	18·55	20·71	18·96	17·88	14·2	91	Klar, schwacher Wind, etwas Wellen.
5./IX.	3 a.	18·63	18·43	20·36	19·06	17·94	12·0	94	Klar, schwacher Wind, etwas Wellen.
5./IX.	6 a.	18·41	17·97	19·97	18·73	18·06	10·9	96	Klar.
5./IX.	9 a.	18·47	18·11	19·89	18·61	17·98	15·5	76	Klar, Sonne.
5./IX.	12	20·44	19·14	20·59	19·18	18·14	21·5	57	Klar, Sonne.
5./IX.	3 p.	19·77	18·71	20·57	19·06	18·04	26·5	52	Klar, Sonne.
5./IX.	6 p.	19·16	18·67	20·48	19·06	18·18	21·0	73	Klar, Sonne.
5./IX.	9 p.	18·75	18·47	20·48	18·91	18·06	16·5	88	Klar.
5./IX.	12 p.	19·36	19·02	20·85	19·42	18·02	14·6	94	Klar.

6./IX.	6 a.	18·84	18·63	20·57	19·12	18·22	13·5	96	Klar.
6./IX.	9 a.	18·84	18·49	20·44	19·26	18·32	17·1	87	Gewitter, Regen, von 10h theilweise klar, Sonne.
6./IX.	12	19·65	19·30	20·88	19·50	18·42	20·7	82	Bewölkt; von 1h an klar, Sonne.
6./IX.	3 p.	21·55	19·38	21·08	19·64	18·34	24·8	60	Klar, Sonne, Wind.
6./IX.	6 p.	19·45	19·02	20·99	19·50	18·32	20·3	94	Klar, Sonne.
6./IX.	9 p.	19·20	18·67	20·74	19·54	18·50	19·7	76	Trüb, von 10h an klar.
6./IX.	12 p.	19·20	18·82	20·95	19·62	18·38	15·4	90	Klar.
7./IX.	3 a.	19·28	19·06	21·12	19·70	18·26	13·8	95	Klar.
7./IX.	6 a.	19·04	18·82	20·74	19·34	17·86	13·4	95	Klar, von 7 bis 1/2 9h a. Gewitterregen.
7./IX.	9 a.	19·00	18·86	20·70	19·42	18·86	17·1	89	Klar, Sonne, starker Wind, hohe Wellen.
7./IX.	12	19·85	19·46	21·12	19·66	18·94	21·6	71	Klar, Sonne.
7./IX.	3 p.	21·64	20·37	21·89	20·58	19·30	25·6	62	Klar, Sonne.
7./IX.	6 p.	20·38	19·90	21·59	20·10	19·22	20·7	86	Klar, Sonne, einzelne Wolkenstreifen.
7./IX.	9 p.	19·54	19·22	21·10	19·74	19·02	17·5	90	Klar.
7./IX.	12 p.	19·52	19·24	21·29	20·02	19·10	15·8	95	Dunstig.
8./IX.	3 a.	19·61	19·52	22·23	20·22	19·06	15·4	96	Halb bewölkt.
8./IX.	6 a.	19·73	19·46	22·14	20·10	18·96	14·5	96	Klar.
8./IX.	9 a.	19·81	19·62	21·42	19·66	18·84	20·0	76	Bewölkt.
8./IX.	12	19·16	19·24	20·99	19·66	18·62	20·4	66	Bewölkt.
8./IX.	3 p.	19·36	18·75	20·99	19·66	16·86	19·0	70	Bewölkt, zeitweise feiner Regen.
8./IX.	6 p.	19·32	18·75	21·03	19·74	18·06	18·7	80	Seit circa 4h p. theilweise Sonne, schwacher Wind.

Datum 1899	Tages-zeit	Temperaturen in Celsiusgraden						Relative Feuchtigkeit der Luft	Wetter
		Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Luft		
8./IX.	9h p.	19·08	18·73	20·78	19·50	17·70	14·7	92	Theilweise bewölkt.
9./IX.	9h30 a.	18·63	18·21	20·25	19·10	18·46	15·0	97	Die ganze Nacht starker Regen, der noch andauert.
9./IX.	12h	18·71	18·43	20·35	19·10	18·46	17·4	84	Bis circa 11h Regen, seither trübe.
9./IX.	3 p.	18·93	18·31	20 48	19·18	17·78	16·2	87	Regen.
9./IX.	6 p.	18·71	18·47	20·41	19·10	18·18	16·0	89	Trübe, zeitweise Sonne.
9./IX.	9 p.	18·54	18·19	20·27	18·94	18·06	14·7	90	Trübe, zeitweise Regen.
10./IX.	12	17·82	17·60	19·12	18·17	16·98	11·2	93	Seit dem Morgen starker Regen.
11./IX.	9h30 a.	16·15	15·81	18·95	16·69	18·46	6·7	84	Fortwährend starker Regen, auf den Bergen Schnee.
11./IX.	8h p.	16·03	15·61	- -	16·51	16·62	8·5	85	Regen dauert fort.
12./IX.	10 a.	10·95	10·77	—	—	9·82	7·5	96	Starker Regen und Nordwind.
12./IX.	12	9·24	8·63	6·91	9·12	9·10	9·0	88	Wie oben; folgt Überschwemmung bis 19. September, wodurch die Messvorrichtung unbrauchbar wurde.
20./IX.	9 a.	13·63	13·39	12·72	13·64	14·22	12·6	84	Klar, Sonne.
20./IX.	12	14·89	14·00	13·04	13·84	13·98	18·5	59	Zur Hälfte Sonne.
20./IX.	3 p.	14·30	13·90	13·24	14·04	14·18	20·0	60	Klar, Sonne.
20./IX.	6 p.	13·96	13·43	12·92	13·72	13·98	15·5	80	Seit 5h leichte Trübung.
20./IX.	9 p.	13·27	13·00	12·55	13·48	13·90	12·4	80	Regen bis Mitternacht.

21./IX.	9 a.	12·49	12·28	11·94	12·80	13·18	10·3	80	Trübe, Wind, Wellen.
21./IX.	12	12·78	12·71	12·18	13·48	13·50	12·1	88	Trübe, Wind flaut ab.
21./IX.	3 p.	13·02	12·83	12·43	13·60	13·62	12·6	71	Bis 2^h Sonne, seither trübe.
21./IX.	6 p.	12·90	12·83	12·39	13·64	12·94	10·0	80	Seit circa 5^h zur Hälfte Sonne.
21./IX.	9 p.	12·57	12·24	11·74	13·04	12·98	7·7	93	Klar, einzelne Wolken.
21./IX.	12 p.	12·49	12·44	11·98	13·20	13·46	7·1	94	Klar.
22./IX.	9 a.	12·66	12·56	12·14	13·16	13·34	14·0	59	Theilweise klar, starker Wind, hohe Wellen.
22./IX.	12	13·50	13·23	12·59	13·52	13·50	17·7	50	Ganz klar, Sonne seit 10^h.
22./IX.	3 p.	14·73	13·51	12·76	13·88	13·66	19·8	48	Klar, Sonne.
22./IX.	6 p.	13·49	13·19	12·72	13·92	13·92	14·4	81	Klar.
22./IX.	9 p.	13·02	12 89	12·53	13·68	13 83	12·5	85	Halb bewölkt.
22./IX.	12 p.	13·00	12·87	12·43	13·64	13·79	12·8	85	Leichte Trübung.
23./IX.	12	12·84	12·69	12·35	13·48	13·30	12·4	90	Schwacher Regen.
23./IX.	5 p.	12·82	12·71	12·23	13·12	13·22	10·8	93	Schwacher Regen.
24./IX.	12	12·90	12·89	12·31	13·04	13·20	11·5	86	Zur Hälfte Sonne.
24./IX.	3 p.	13·02	13·00	12·43	13·02	13·40	12·4	74	Trübe.
24./IX.	6 p.	12·70	12·71	12·20	12·88	13·26	10·2	80	Trübe.
24./IX.	9 p.	12·45	12·38	11·94	12·72	13·26	9·1	86	Trübe.
24./IX.	12 p.	12·33	12·20	11·78	12·70	13·30	8·6	83	Trübe.
25./IX.	10 a.	12·57	12·59	12·06	12·72	13·12	11·2	68	Leicht trübe.
25./IX.	12	12·94	12·75	12·18	13·24	13·22	14·0	64	Zur Hälfte Sonne.

Datum 1899	Tages-zeit	Temperaturen in Celsiusgraden						Relative Feuchtigkeit der Luft	Wetter
		Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Luft		
25./IX.	3^h p.	13·10	12·75	12·23	13·44	13·46	14·3	57	Trübe.
25./IX.	6 p.	12·66	12·51	12·14	13·28	13·26	10·5	88	Trübe, zeitweise Regen.
25./IX.	9 p.	12·41	12·20	11·86	12·56	12·98	10·0	94	Halb bewölkt.
25./IX.	12 p.	12·45	12·28	11·90	12·76	13·14	10·0	94	Zur Hälfte klar.
26./IX.	9 a.	12·49	12·36	11·94	12·80	13·18	12·6	82	Klar, Sonne.
26./IX.	12	13·71	13·39	12·72	13·18	13·26	15·4	69	Klar, Sonne.
26./IX.	3 p.	14·93	13·23	12·64	13·32	13·60	18·2	62	Klar, Sonne.
26./IX.	6 p.	13·58	13·17	12·47	13·24	13·64	12·8	84	Klar.
26./IX.	9 p.	12·78	12·63	12·14	13·02	13·42	10·3	91	Klar.
26./IX.	12 p.	13·67	13·71	13·81	13·60	13·78	10·5	93	Klar.
27./IX.	9 a.	13·73	12·95	12·39	13·20	13·52	13·2	84	Klar, Sonne.
27./IX.	12	13·50	13·11	12·53	13·40	13·50	18·3	62	Klar, Sonne.
27./IX.	3 p.	13·50	13·15	12·51	13·30	13·74	18·5	60	Klar, Sonne, Wind.
27./IX.	6 p.	12·90	12·83	12·51	13·20	13·66	13·6	88	Klar.
27./IX.	9 p.	12·53	12·57	12·04	12·90	13·42	10·5	94	Klar.
27./IX.	12 p.	12·90	12·91	12·35	13·00	13·30	10·2	92	Dichter Nebel.

28./IX.	6 a.	12·84	12·83	12·27	13·20	13·40	9·7	97	Nebel.
28./IX.	9 a.	12·84	12·83	12·37	13·24	13·58	11·5	93	Nebel, von 10h an Sonne mit leichtem Schleier.
28./IX.	12	14·30	13·63	12·88	13·54	13·74	15·5	74	Sonne mit leichtem Schleier.
28./IX.	3 p.	13·94	13·11	12·41	13·18	13·66	18·7	69	Zur Hälfte bewölkt, dunstig.
28./IX.	6 p.	13·71	12·95	12·43	13·22	13·78	16·0	81	Klar, etwas dunstig.
28./IX.	9 p.	13·33	13·23	12·70	13·42	13·82	15·3	65	Klar, etwas dunstig.
30./IX.	9 a.	12·55	12·42	12·12	12·78	13·10	10·6	87	Klar, Sonne.
30./IX.	12	13·33	13·31	12·76	13·68	13·38	19·0	38	Etwas dunstig, Sonne, starker Wind, hohe Wellen.
30./IX.	3 p.	13·77	13·80	13·14	13·96	13·90	18·2	37	Trüb, starker Wind, hohe Wellen.
1./X.	9 a.	12·70	12·63	12·27	13·38	13·46	11·2	82	Klar, Sonne.
1./X.	12	13·96	13·84	13·16	13·94	13 62	16·1	68	Klar, Sonne.
1./X.	3 p.	13·61	13·49	12·98	14·00	13·98	18·7	61	Klar, Sonne, Wind.
1./X.	6 p.	13·06	13·01	12·64	13·66	13·70	13·0	90	Klar, Sonnenuntergang um 5h.
1./X.	9 p.	12·80	12·81	12·43	13·56	13·56	10·2	94	Klar.
1./X.	12 p.	12·86	12·79	12·51	13·54	13·54	12·6	76	Klar, etwas dunstig.
2./X.	3 a.	12·86	12·95	12·51	13·66	13·74	13·7	68	Klar, Wind, Wellen.
2./X.	6 a.	12·90	13·00	12·55	13·66	13·74	12·0	79	Klar, Wind, Wellen.
2./X.	9 a.	13·20	13·17	12·90	13·76	13·98	15 5	64	Leicht bewölkt, Wind, Wellen.
2./X.	12	14·18	13·94	13·26	13·92	13·92	19·4	59	Dunstig, zur Hälfte Sonne.
2./X.	3 p.	14·08	13·47	13·10	14·16	14·18	20·2	62	Leicht bewölkt, Sonne.
2./X.	6 p.	13·43	13·23	12·88	13·66	13·88	14·7	87	Klar.

Datum 1899	Tages-zeit	Temperaturen in Celsiusgraden						Relative Feuchtigkeit der Luft	Wetter
		Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Luft		
2./X.	9h p.	13·15	13·09	12·86	13·72	13·78	12·0	92	Klar.
2./X.	12 p.	13·23	13·17	12·74	13·60	13·70	10·8	92	Klar.
3./X.	3 a.	13·41	13·15	12·78	13·78	14·00	12·0	95	Bewölkt.
3./X.	6 a.	13·23	13·09	12·78	13·76	13·80	14·1	72	Bewölkt, Wind.
3./X.	9 a.	13·15	13·09	12·78	13·72	13·78	13·0	82	Bewölkt, schwacher Wind.

Infolge der besonders ungünstigen Witterung sind nur wenige Reihen schöner Tage zu verzeichnen; von diesen wurden einige herausgegriffen und zur Zeichnung der nachstehenden Curven verwendet.

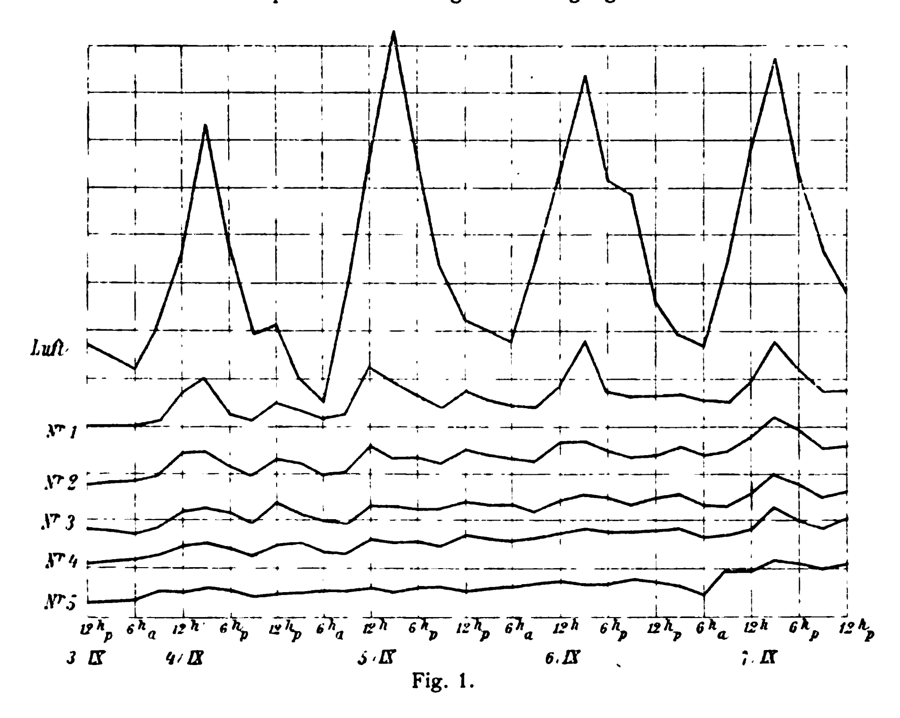


Fig. 1.

Das Mittagsmaximum der Lufttemperatur, das zwischen 12h und 3h p. liegt, hat natürlich ein gleichzeitiges Maximum in der Oberflächenschichte des Wassers zur Folge; nicht zu erwarten war aber, dass die Maxima der Temperaturen in den tieferen Schichten, von Nr. 2 bis Nr. 5, zur selben Zeit stattfinden, was die Curven thatsächlich ganz übereinstimmend zeigen. Würden die tieferen Schichten hauptsächlich durch Wärmeleitung von der Oberfläche her auf eine höhere Temperatur gebracht,

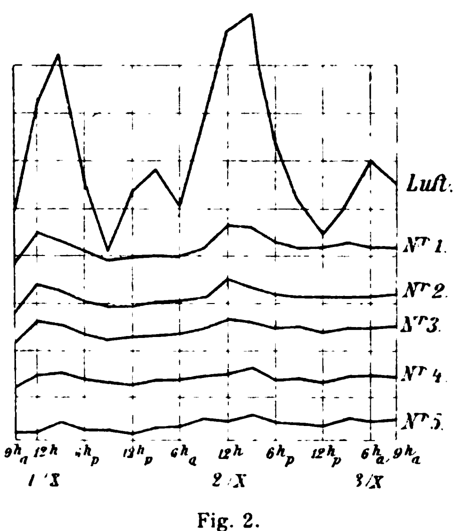


Fig. 2.

so müssten die Curven Phasenverschiebungen gegeneinander zeigen. Es scheint also, dass auch die tieferen Schichten wesentlich durch directe Strahlung erwärmt werden, obwohl die langwelligen Strahlen vom Wasser stark absorbiert werden und die kurzwelligen sichtbaren Strahlen, nach der Durchsichtigkeit des Seewassers zu jener Zeit zu schließen, nicht tiefer als circa 2·5 bis 3 *m* eindrangen.

Aus den Beobachtungen vom 30./VIII. und 4., 5., 6., 7./IX. wurden die Perioden der Temperatur von Luft und Nr. 1, 2, 3, 4, 5 berechnet. Es ergaben sich hiebei die folgenden Werte (u) der Temperaturen für variables t (Zeit, ausgedrückt in Stunden von Mitternacht zu Mitternacht):

$$\text{Luft:}\quad u = 17{\cdot}3° + 5{\cdot}18° \sin\left(\frac{2\pi t}{24} + 222\right) + \\ + 1{\cdot}42° \sin\left(\frac{4\pi t}{24} + 17\right)$$

$$\text{Nr. 1:}\quad u = 19{\cdot}31° + 0{\cdot}88° \sin\left(\frac{2\pi t}{24} + 225\right) + \\ + 0{\cdot}50° \sin\left(\frac{4\pi t}{24} + 21\right)$$

$$\text{Nr. 2:}\quad u = 18{\cdot}78° + 0{\cdot}53° \sin\left(\frac{2\pi t}{24} + 225\right) + \\ + 0{\cdot}26° \sin\left(\frac{4\pi t}{24} + 34\right)$$

$$\text{Nr. 3:}\quad u = 20{\cdot}61° + 0{\cdot}35° \sin\left(\frac{2\pi t}{24} + 202\right) + \\ + 0{\cdot}14° \sin\left(\frac{4\pi t}{24} + 35\right)$$

$$\text{Nr. 4:}\quad u = 19\;24° + 0{\cdot}24° \sin\left(\frac{2\pi t}{24} + 213\right) + \\ + 0{\cdot}10° \sin\left(\frac{4\pi t}{24} + 10\right)$$

$$\text{Nr. 5:}\quad u = 18{\cdot}23° + 0{\cdot}24° \sin\left(\frac{2\pi t}{24} + 227\right) + \\ + 0{\cdot}08° \sin\left(\frac{4\pi t}{24} + 35\right)$$

Die Amplituden beider Perioden nehmen gegen die Tiefe hin ab; die Werte der Nummern 3 und 4 zeigen außer dem erwähnten Fehler in der absoluten Temperatur auch eine Störung der Phase. Da 45° in der Phase 3 Stunden bedeuten, so liegt das Maximum der ersten Periode ungefähr bei 3^h p., das der zweiten bei 2^h a. und 2^h p.

Für die Abweichungen der Temperaturen vom Mittelwerte um 3^h p. findet man einen beträchtlichen Unterschied in den Messungen an den oben genannten Tagen zu Ende August und Anfang September und den zwei klaren Tagen am 1. und 2. October. Diese Abweichungen sind für die zwei obersten Messtellen und für Luft nachstehend angegeben; zugleich ist

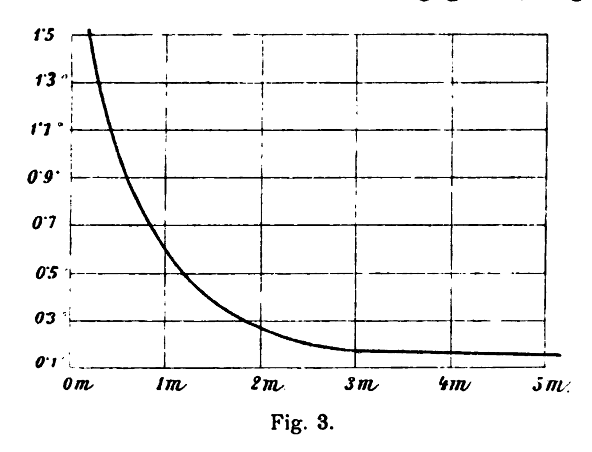


Fig. 3.

für diese zwei Zeiträume die Strahlungswärme der Sonne *(Q)* um 12^h mittags per Minute und Quadratcentimeter in Grammcalorien angegeben.

	Nr. 1	Nr. 2	Luft	Q in Gr.-Cal.
Anfangs September......	1·52°	0·69°	7·3°	1·148
Anfangs October........	0·57°	0·31°	6·0°	1·033

Der Zusammenhang des Anstieges der Temperatur vom Mittelwerte des Tages bis zum Werte um 3^h p. mit der Tiefenzunahme wird durch die vorstehende Curve (Fig. 3) veranschaulicht. Sie bezieht sich auf die klaren Tage zu Anfang September.

Wie die Curve zeigt, nimmt die tägliche Erwärmung mit der Tiefe sehr rasch ab.

Von Interesse ist auch die Temperaturzunahme des Wassers in den verschiedenen Tiefen genommen über eine ganze Zahl von 24stündigen Perioden. Misst man z. B. auf Fig. 1 die Temperaturzunahmen bei den fünf Curven vom 3. September 12^h p. bis 7. September 12^h p., so bekommt man für

Nr. 1.......1·5° Zunahme,
Nr. 2.......1·7° »
Nr. 3.......1·7° »
Nr. 4.......1·7° »
Nr. 5.......1·7° »

Es nimmt also die oberste Schichte an Temperatur weniger zu, als die unteren, was offenbar auf die Verdunstung zurückzuführen ist.

Etwas Ähnliches findet man auch bei Temperaturabnahmen durch Regen oder trübes Wetter, z. B. vom 29. August 12^h p. bis 31. August 12^h p.:

Nr. 1......0·3 ° Abnahme,
Nr. 2......0·15° »
Nr. 3......0·15° »
Nr. 4......0·00° »
Nr. 5......0·5 ° Zunahme.

Die unregelmäßigen Werte von Nr. 4 und Nr. 5 haben wohl ihre Ursache in dem Einflusse einiger kleiner Quellen, die in der Tiefe des Sees Strömungen hervorrufen.

Für den merkwürdigen Umstand, der schon aus den oben angegebenen Gleichungen für den täglichen Gang der Temperatur hervorgeht, nämlich für das Nachtmaximum, kann keine Erklärung gegeben werden. Dasselbe ist in tieferen Schichten zuweilen größer als das Tagesmaximum (siehe Fig. 1).

Verdunstungsmessungen.

Die nachfolgende Tabelle gibt die Werte *(W)* des verdunsteten Wassers in Cubikcentimetern für eine Fläche von 1 cm^3 unter Beifügung der meteorologischen Daten.

Datum und Stunde	Zeitdauer der Verdunstung			W in Cubikcentimetern	Relative Feuchtigkeit der Luft	Mittlere Temperatur von	
	mit Sonne	ohne Sonne	im ganzen			Luft	Wasser
2./IX., 11^h 30 a.—6^h p.	6·5 Stunden	0 Stunden	6·5 Stunden	0 16	62	21·9° C.	19·83° C.
4./IX., 6^h p.—5./IX., 9^h a.	0 »	15 »	15 »	0·18	88	13·9	18·58
5./IX., 9^h a.—6^h p.	9 »	0 »	9 »	0·27	64	21·1	19·46
5./IX., 6^h p.—6./IX., 9^h a.	0 »	15 »	15 »	0·11	88	15·4	18·95
6./IX., 11^h a.—5^h p.	6 »	0 »	6 »	0·18	79	21·9	20·22
7./IX., 5^h p.—8./IX., 9^h a.	1 »	15 »	16 »	0·08	90	17·3	19·76
1./X., 11^h a.—5^h p.	6 »	0 »	6 »	0 25	65	15·9	13 54
1./X., 5^h p.—2./X., 9^h a.	0 »	16 »	16 »	0·06	79	12·8	12·95
2. X., 9^h a.—5^h p.	8 » (halb bewölkt)	0 »	8 »	0·07	62	17·4	13·72

Die Verdunstungsmessungen bei Nacht werden durch den nicht in Rücksicht gezogenen Thau wohl etwas beeinträchtigt sein; wie schon erwähnt, betrug die eingestrahlte Sonnenwärme (per Quadratcentimeter und Minute zu Mittag gemessen) anfangs September im Mittel 1·148 Gr.-Cal., anfangs October hingegen nur mehr 1·033 Gr.-Cal. Diese Abnahme zeigt auch ganz deutlich Fig. 2, auf welcher die Maxima viel flacher verlaufen als auf Fig. 1.

Die Resultate der Beobachtungen lassen sich kurz folgendermaßen zusammenfassen:

Die Wärmeleitung spielt bei der Erwärmung des Wassers eine sehr geringe Rolle, wogegen die Strahlung die Hauptsache ausmacht, da die Convection nur bei Abkühlung in Betracht kommen kann.

Die Strahlung übt bis auf 5·2 *m* Tiefe noch eine merkbare, wenn auch sehr geringe Wirkung.

Die tägliche Erwärmung nimmt mit der Tiefe sehr rasch ab.

Die Temperatur der Luft und des Wassers lässt sich durch die Summe zweier Sinuswellen darstellen, die eine 24- und 12-stündige Periode haben; beide zeigen eine Abnahme der Amplitude, die erstere auch eine geringe Phasenverschiebung mit zunehmender Tiefe.

Zwischen 12^h und 3^h nachts finden in der Luft und in allen Wasserschichten gleichzeitig secundäre Temperaturmaxima statt.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. VI.

Über die Störungen des normalen atmosphärischen Potentialgefälles durch Bodenerhebungen

von

Dr. **Hans Benndorf.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1900.)

Schon bei theoretischen Untersuchungen über die Ursachen der atmosphärischen Elektricität, mehr aber noch bei Ausführung luftelektrischer Messungen an der Erdoberfläche, ist man oft in die Lage versetzt, entscheiden zu sollen, in welchem Verhältnisse das Potentialgefälle in der Ebene zu dem auf einem Plateau oder einer ausgedehnten Bodenerhebung steht; oder man möchte doch wenigstens zu beurtheilen imstande sein, welche geometrische Configuration (z. B. Verhältnis von Höhe zum Durchmesser) das Plateau haben muss, um annehmen zu können, dass das Gefälle in der Mitte des Plateaus sich nicht um mehr als einen bestimmten Procentsatz von dem in der Ebene unterscheidet.

Da dies Problem sich einer exacten Berechnung nicht unterziehen lässt, liegt es nahe, durch Experimente die Entscheidung zu treffen.

Dies kann etwa in der Weise geschehen, dass man sich in kleinem Maßstabe ein Modell der Erdoberfläche mit entsprechenden Bodenerhebungen herstellt, dasselbe lädt und dann mit einem Probekörper am Elektrometer die elektrische Dichte an einzelnen Punkten bestimmt.

Versuche, die in dieser Richtung im hiesigen physikalischen Institute angestellt worden sind, haben aber gezeigt, dass solche Dichtemessungen mit ungewöhnlichen Schwierigkeiten verbunden sind und kaum vollkommen einwandfrei auszuführen sein dürften.

Dagegen lässt sich unsere Aufgabe theoretisch mit einer für alle praktischen Bedürfnisse ausreichenden Genauigkeit angenähert lösen, wenn man eine Methode anwendet, die Maxwell in seinem Treatise u. a. bei der Theorie des Probescheibchens benützt hat.

Der dabei zugrunde liegende Gedanke ist der folgende:

Ein Leiter von bestimmter Gestalt $F(x, y, z) = 0$ auf dem Potentiale V_0 erzeugt im Außenraume ein bestimmtes Kraftfeld, herrührend von der Ladung auf der Oberfläche des Conductors.

Dasselbe Kraftfeld [außerhalb der Fläche $F(x, y, z) = 0$] kann man sich aber auch erzeugt denken durch eine bestimmte Vertheilung elektrischer Massen im Inneren der Fläche, natürlich bei Abwesenheit des Conductors. Diese Massen müssen so vertheilt werden, dass für jeden Punkt des Raumes, der der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ genügt, das Potential V_0 wird.

Umgekehrt, kennt man aus anderweitiger Erfahrung eine Vertheilung elektrischer Massen, die eine sie umschließende Niveaufläche besitzt, welche vollkommen exact oder doch mit großer Annäherung die Oberfläche eines zu untersuchenden Conductors darstellt, so lässt sich für jeden Punkt dieser Fläche die Normalcomponente der elektrischen Kraft berechnen und damit die Dichtenvertheilung auf dem Conductor finden.

Es handelt sich also zunächst darum, Massenvertheilungen zu finden, die eine Niveaufläche besitzen, welche einer unendlich ausgedehnten Ebene mit einer Bodenerhebung von vorgeschriebener Gestalt gleichen.

I. Das einseitig unendlich ausgedehnte Plateau.

Die XY-Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems sei gleichmäßig mit Masse von der Dichte σ belegt, außerdem aber noch die eine Hälfte der Ebene, etwa die des negativen x, von einer elektrischen Doppelschicht mit dem Momente m so

bedeckt, dass die negative Belegung der XY-Ebene zugewandt ist.

Das Potential dieser Massen in einem Punkte $M(x, z)$ ist dann

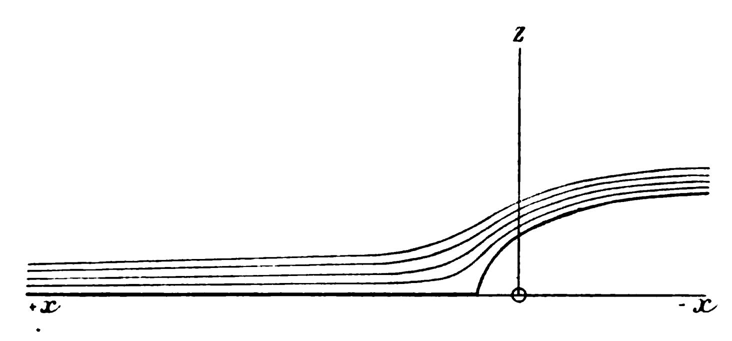
$$V = -4\pi\sigma z + m\omega,$$

wenn ω den Körperwinkel bezeichnet, unter dem die Randcurve der Doppelschicht vom Punkte M aus gesehen wird; oder

$$V = -4\pi\sigma z + 2m \operatorname{arctg} \frac{z}{x}, \qquad \ldots 1)$$

wobei $\operatorname{arctg} \frac{z}{x} = \varphi$ für alle positiven x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, für negative x zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π zu wählen ist.

Wir wollen zunächst die Niveaufläche $V = 0$, und zwar nur für positive z, untersuchen; ihr Durchschnitt mit der XZ-Ebene ist in der Figur stark ausgezogen. Sie wird von der



XY-Ebene (für alle $z = 0$ ist auch $V = 0$) und von einer zweiten Fläche gebildet, die die Gestalt eines einseitig unendlich ausgedehnten Plateaus hat, das sich in einer Geraden parallel mit der Y-Axe aus der Ebene erhebt.

Die Höhe, die das Plateau asymptotisch erreicht, ergibt sich für $\varphi = \pi$

$$h = \frac{2m\pi}{4\pi\sigma} = \frac{m}{2\sigma}. \qquad \ldots 2)$$

Für kleine positive Werthe von $\frac{z}{x}$ lautet die Gleichung der Niveaufläche

$$0 = -4\pi\sigma z + 2m\frac{z}{x},$$

woraus folgt, dass in der Entfernung

$$x_0 = \frac{2m}{4\pi\sigma} = \frac{h}{\pi} \qquad \ldots 3)$$

vom Ursprunge der betrachtete Theil der Niveaufläche die XY-Ebene schneidet, und zwar rechtwinkelig, was übrigens nach dem Satze von Rankine über den Durchschnitt einer Niveaufläche mit sich selbst von vorneherein folgt.

Zur Charakterisierung der Art des Anstieges des Plateaus diene die Figur und folgende Tabelle, welche die Höhe z eines Punktes des Plateaus in der Entfernung $l = x_0 - x$ vom Fußpunkte angibt, ausgedrückt in Bruchtheilen der Maximalhöhe h.

Den Böschungswinkel α kann man aus der Formel

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{hz}{hx-(x^2+z^2)\pi}$$

mittels der Tabelle I leicht berechnen.

Tabelle I.

$\frac{l}{h}$	$\frac{z}{h}$
0·000	0·000
0·029	0·167
0·126	0·333
0·318	0·500
0·703	0·667
1·76	0·833
2·76	0·889
5·67	0·944
11·4	0·970
19·1	0·983
28·6	0·989
57·3	0·995
∞	1·000

In der Natur würde etwa ein steil ins Meer abfallendes Hochland dem eben betrachteten Fall entsprechen.

Es erübrigt nun, die Werte von $-\frac{\partial V}{\partial z}$ für verschiedene Punkte auf der Niveaufläche $V = 0$ zu bestimmen.

Aus 1) folgt

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = 4\pi\sigma - 2m\frac{x}{z^2 + x^2}. \qquad \ldots 4)$$

Für alle $x > x_0$ ist die Niveaufläche eben; es ist daher

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = 4\pi\sigma - \frac{2m}{x};$$

statt x führen wir noch die Entfernung vom Fußpunkte des Plateaus $l = x - x_0$ ein und erhalten

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = 4\pi\sigma - \frac{2m}{l + x_0}$$

und mit Berücksichtigung von 2) und 3)

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = 4\pi\sigma\left(1 - \frac{h}{h + l\pi}\right), \qquad \ldots 5)$$

woraus sich für jeden Punkt der Ebene das Potentialgefälle ergibt.

In der Praxis wird diese Formel natürlich nicht streng gelten, da der Abhang nicht genau die hier vorausgesetzte Form haben wird; es wird sich aber auch meistens nur darum handeln, abzuschätzen, um wie viel Procent das Potentialgefälle in nicht zu großer Nähe vom Abhang vom Normalwerte in einer allseits ausgedehnten Ebene abweicht.

Bezeichnet E_0 die Feldintensität in der unendlichen Ebene, E' die in der Nähe des Plateaus im Abstande l, so ergibt sich aus 5)

$$\frac{E'}{E_0} = 1 - \frac{h}{h + l\pi} = 1 - \frac{p}{100},$$

wo p die Anzahl der Procente bedeutet, um die E von E_0 abweicht.

Daraus folgt

$$l = \frac{h}{\pi} \frac{100-p}{p}.$$

Die Abweichung beträgt also für

$l = 33h$ circa 1%.
$l = 6h$ » 5
$l = 3h$ » 10

Ähnlich verhält es sich mit dem Potentialgefälle auf dem Plateau. Die Werte von $-\frac{\partial V}{\partial z}$ lassen sich mit Benützung der Tabelle I und Formel 4) leicht ausrechnen. Wir wollen nur noch Punkte betrachten, die soweit vom Fußpunkte des Plateaus entfernt sind, dass z^2 gegen x^2 vernachlässigt werden kann.

Es ist dann in Analogie mit dem Früheren

$$\frac{E}{E_0} = \left(1 - \frac{h}{\pi}\frac{1}{x}\right),$$

oder, wenn wir statt x noch den Abstand l vom Fußpunkte des Plateaus einführen

$$\frac{E}{E_0} = \left(1 + \frac{h}{\pi}\frac{1}{l-x_0}\right) = 1 + \frac{h}{\pi l - h} = 1 + \frac{p}{100},$$

also

$$l = \frac{h}{\pi} \frac{100+p}{p}.$$

Es ergibt sich für $l = 33h$

$$p = 1\%$$

und für $l = 7h$

$$p = 5\%.$$

Zusammenfassend können wir also sagen:

Ein einseitig unendlich ausgedehntes Plateau von der Höhe h drückt das normale Potentialgefälle in der Ebene bei einer Entfernung von $33h$ um circa 1%, von $6h$ um circa 5% herab. Auf dem Plateau ist das Potentialgefälle bei analogen Entfernungen um dieselbe Anzahl Procente erhöht.

II. Ein unendlich langer, geradegestreckter Höhenzug.

Auf der gleichmäßig mit Masse von der Dichte σ belegten XY-Ebene sei ein Streifen von der Breite $2a$ parallel und symmetrisch zur Y-Axe mit einer Doppelschicht vom Momente m bedeckt.

Das Potential dieser Massen im Punkte $M(x, z)$ ist wie früher

$$V = -4\pi\sigma z + m\omega = -4\pi\sigma z + 2m\varphi,$$

wo φ den Winkel bedeutet, den die beiden Strahlen, die vom Punkte M zu den Punkten $x = -a$, $z = 0$ und $x = +a$, $z = 0$ gezogen werden können, mit einander einschließen.

Es ist daher für $x > a$

$$V = -4\pi\sigma z + 2m\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{x-a} - \operatorname{arctg}\frac{z}{x+a}\right) \qquad \ldots 6)$$

und für $x < a$

$$V = -4\pi\sigma z + 2m\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{z}{a+x} - \operatorname{arctg}\frac{z}{a-x}\right). \qquad \ldots 6\,a)$$

Da die Schnittlinien der Niveauflächen mit der XZ-Ebene symmetrisch bezüglich der Z-Axe verlaufen, genügt es, die Gleichungen bloß für positive x zu discutieren.

Man sieht sofort, dass die XY-Ebene wieder einen Theil der Niveaufläche $V = 0$ bildet; der andere Theil derselben besteht aus einer Art Wulst, der einen unendlich langen, geraden Bergrücken symmetrisch zur Y-Axe verlaufend darstellen kann. Die Figur gibt mit ihrem Spiegelbilde zusammen ein annäherndes Bild des Profils dieses Rückens im Durchschnitte mit der XZ-Ebene.

Wir wollen im folgenden der Einfachheit wegen voraussetzen, dass die Höhe h des Rückens nicht mehr als ein Zehntel seiner Breite beträgt. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, für eine bestimmte größere Höhe im einzelnen Falle das Problem zu behandeln.

Die Höhe h bestimmt sich aus der Gleichung der Profilcurve, wenn $x = 0$ gesetzt wird; es resultiert aus $6a$)

$$V = -4\pi\sigma z + 2m\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{z}{a}\right) = 0,$$

oder unter der oben gemachten Voraussetzung ist mit einer für unsere Zwecke genügenden Genauigkeit (0·4%) dafür zu setzen

$$V = -4\pi\sigma z + 2m\pi - 4m\frac{z}{a} = 0,$$

woraus sich z, d. i. die Höhe, bestimmt

$$h = \frac{m\pi}{2\pi\sigma + \frac{2m}{a}}. \qquad \ldots 7)$$

Die Breite des Rückens $2b$ ist nur wenig größer als $2a$. Aus Gleichung 6) ergibt sich für $x > a$ und sehr kleine z

$$V = -4\pi\sigma z + 2m\frac{z}{x-a} - 2m\frac{z}{x+a} = 0$$

und daraus

$$x = b = \sqrt{a^2 + \frac{am}{\pi\sigma}} = a + \frac{m}{2\pi\sigma}$$

die halbe Breite des Rückens.

Im folgenden sollen nur folgende zwei Fragen behandelt werden:

Wie groß ist das Potentialgefälle in der Mitte des Rückens, also für kleine x, und wie weit stört der Höhenzug das normale Kraftfeld in der Ebene?

Für die Feldintensität an Punkten auf dem Höhenrücken ergibt sich aus Gleichung 6a) der Ausdruck

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = 4\pi\sigma + 2m\frac{a+x}{(a+x)^2+z^2} + 2m\frac{a-x}{(a-x)^2+z^2},$$

der für kleine x in

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = 4\pi\sigma + 4m\frac{a}{a^2+z^2}$$

oder

$$\left|-\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=h} = 4\pi\sigma + 4m\frac{a}{a^2+h^2} = E$$

übergeht.

Bezeichnet $E_0 = 4\pi\sigma$ wieder das normale Gefälle in der Ebene, so ist

$$\frac{E}{E_0} = 1 + \frac{m}{\pi\sigma} \cdot \frac{a}{a^2+h^2} \qquad \ldots 9)$$

und es handelt sich nur noch darum, die unbekannten Größen a und m durch h und b auszudrücken.

Aus den Gleichungen 7) und 8) findet man

$$a = b - \frac{h}{\pi} \doteq b - \frac{h}{3}$$

und

$$\frac{m}{\pi\sigma} = \frac{2h}{\pi} \doteq \frac{2h}{3}.$$

Diese Werthe, in 9) eingesetzt, ergeben, wenn wir $\frac{h}{b} = \varepsilon < \frac{1}{10}$ setzen,

$$\frac{E}{E_0} = 1 + \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{2}{9}\varepsilon^2 + \ldots,$$

wobei noch $\frac{2}{9}\varepsilon^2$ vernachlässigt werden kann. Die Abweichung des Potentialgefälles auf der Hügelkette vom normalen ergibt sich in Procenten p aus $\frac{2\varepsilon}{3} = \frac{p}{100}$ zu $\varepsilon = \frac{3p}{200}$, also für

$$p = 1 \qquad \frac{b}{h} = 67$$

und für

$$p = 5 \qquad \frac{b}{h} = 13.$$

Für $x > b$, also für die Ebene, folgt aus Gleichung 6)

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = 4\pi\sigma - 2m\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) =$$

$$= 4\pi\sigma - \frac{4ma}{x^2-a^2} = E'$$

und

$$\frac{E'}{E_0} = 1 - \frac{m}{\pi\sigma}\frac{a}{x^2-a^2} = 1 - \frac{2h}{3}\frac{b-\frac{h}{3}}{x^2-\left(b-\frac{h}{3}\right)^2};$$

führen wir wieder $\varepsilon = \frac{h}{b}$ ein, und die Procentzahl p, so ist

$$\frac{x}{b} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9p+(600-6p)\varepsilon-(200-p)\varepsilon^2}{p}},$$

welcher Ausdruck für $\varepsilon < \frac{1}{500}$ in die bequemere Form

$$\frac{x}{b} = 1 + \frac{100-p}{3p}.\varepsilon$$

übergeht.

In folgender Tabelle sind zur Erleichtung der Übersicht einige numerische Werte ausgerechnet. Die letzte Columne enthält die Entfernung $l = x-b$ vom Fußpunkte des Rückens, gemessen in Vielfachen von h.

Tabelle II.

p	$\varepsilon = \frac{h}{b}$	$\frac{x}{b}$	$x-b$
	0·1	2·71	17 h
1%	0·01	1·29	29 h
	0·001	1·03	30 h
	0·1	1·49	4·9 h
5%	0·01	1·060	6·0 h
	0·001	1·0063	6·3 h

Zusammenfassend lässt sich also sagen:

Während auf einem einseitig unendlich ausgedehnten Plateau das Potentialgefälle in einem Punkte, dessen Entfernung

vom Fuße $33h$, respective $7h$ beträgt, um 1%, respective 5% höher als das normale ist, tritt dies bei einem Rücken erst für $b = 67h$, respective $13h$, also in der doppelten Entfernung, ein. Dagegen ist die Störung, die der Höhenzug in der Ebene hervorruft, geringer als die vom Plateau verursachte.

III. Ein kreisförmiges Plateau.

Diesmal habe die auf der mit der Dichte σ belegten XY-Ebene liegende Doppelschicht die Form einer Kreisscheibe vom Radius a, deren Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammenfällt.

Das Potential $V = -4\pi\sigma z + m\omega$ lässt sich allgemein durch elliptische Integrale 3. Art ausdrücken oder, was bequemer ist, in einer Kugelfunctionenreihe entwickeln.[1] Wir wollen die letztere Darstellung wählen.

Bezeichnet r den Abstand des Aufpunktes M vom Ursprunge und ϑ den Winkel, den r mit der Z-Axe bildet, so ist für $r < a$

$$\omega = 2\pi \left\{ 1 + \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^{s+1} \frac{1.3.5\ldots 2s-1}{2.4.6\ldots 2s} \frac{r^{2s+1}}{a^{2s+1}} P_{2s+1}(\cos\vartheta) \right\}, \ldots 10a)$$

wobei $P_{2s+1}(\cos\vartheta)$ die zonale Kugelfunction vom $2s+1$ Grade bezeichnet.

Für $r > a$ wird

$$\omega = 2\pi \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^{s+2} \frac{1.3.5\ldots 2s+1}{2.4.6\ldots 2s+2} \frac{a^{2s+2}}{r^{2s+2}} P_{2s+1}(\cos\vartheta). \quad \ldots 10b)$$

Die Niveaufläche

$$V = -4\pi\sigma z + m\omega = 0$$

besteht wieder aus der XY-Ebene, denn es sind alle

$$\left[P_{2s+1}(\cos\vartheta)\right]_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

---

[1] Siehe Maxwell, Lehrbuch der Elektricität; deutsch von Weinstein, II. Bd., S. 408 ff.

und aus einem Plateau, dessen Fußcurve ein Kreis mit einem Radius R ist, der unter der Annahme, die wir wieder machen wollen, dass die Höhe h des Plateaus klein gegen R sei, um wenig größer als a ist.

Ein Bild des Plateaus gibt die gestrichelte Curve auf der linken Seite von Tafel XXI im zweiten Bande von Maxwells »Treatise«.

Die Größen h und R lassen sich leicht berechnen, wenn $\frac{h}{a}$ so klein ist, dass man bei der Entwickelung von ω sich mit der ersten Potenz von $\frac{h}{a}$ begnügen kann; dies geschieht genügend genau, wenn $\frac{h}{a} \leqq \frac{1}{10}$ ist.

Wir betrachten jetzt nur die Schnittcurve des Plateaus mit der XZ-Ebene.

Für Punkte, deren r klein gegen a ist, wird

$$\omega = 2\pi - 2\pi \frac{r}{a} P_1(\cos\vartheta);$$

nun ist

$$P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta = \frac{z}{r},$$

folglich

$$\omega = 2\pi\left(1 - \frac{z}{a}\right)$$

und es wird

$$V = -4\pi\sigma z + 2m\pi\left(1 - \frac{z}{a}\right) \qquad \ldots 11)$$

unabhängig von x in der Nähe der Z-Axe.

Aus $V = 0$ in 11) ergibt sich

$$z = \frac{a}{1 + a\frac{2\sigma}{m}} = h$$

die Höhe des Plateaus.

Für Punkte, deren x nur wenig größer als a, und deren z **klein** ist, wird

$$V = -4\pi\sigma z + 2m \operatorname{arctg} \frac{z}{x-a} = -4\pi\sigma z + 2m \frac{z}{x-a}.$$

Für $V = 0$ ergibt sich daraus

$$x = a + \frac{m}{2\pi\sigma} = R, \qquad \ldots 13)$$

der Radius des Plateaus.

Das Potentialgefälle E in der Mitte des Plateaus, nahe der Z-Axe, erhalten wir aus 11)

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=h} = 4\pi\sigma + \frac{2\pi m}{a} = E$$

und

$$\frac{E}{E_0} = 1 + \frac{m}{2\sigma}\frac{1}{a},$$

worin m und a noch durch die bekannten Größen h und R auszudrücken sind.

Aus den Gleichungen 12) und 13) folgt bei Vernachlässigung zweiter Potenzen von h

$$\frac{m}{2\sigma} = h$$

und

$$a = R - \frac{h}{\pi} \doteq R - \frac{h}{3}$$

und daraus

$$\frac{E}{E_0} = 1 + \frac{3h}{3R-h} = 1 + \frac{p}{100};$$

es ist daher

$$\varepsilon = \frac{h}{R} = \frac{3p}{300-p},$$

also für

$$p = 1, \quad \frac{R}{h} = 100,$$

und für

$$p = 5, \quad \frac{R}{h} = 19.$$

Um den Wert E' des Potentialgefälles in der Ebene zu erhalten, müssen wir $\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0}$ berechnen mit Anwendung der Formel 10b) für ω.

Es ist

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = 4\pi\sigma - m\left[\frac{\partial \omega}{\partial z}\right]_{z=0},$$

wobei

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial z}\right]_{z=0} = 2\pi \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^{s+2} \frac{1.3.5\ldots 2s+1}{2.4.6\ldots 2s+2} \cdot$$

$$. a^{2s+2} \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^{2s+2}} P_{2s+1}(\cos\vartheta)\right)\right]_{\substack{\vartheta=\frac{\pi}{2}\\ z=0}}$$

wird. Berücksichtigt man, dass

$$\left[P_{2s+1}(\cos\vartheta)\right]_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$\left|P'_{2s+1}(\cos\vartheta)\right|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \left|\frac{\partial P_{2s+1}(\cos\vartheta)}{\partial \cos\vartheta}\right|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= (-1)^s \frac{1.3.5\ldots 2s+1}{2.4.6\ldots 2s},$$

$$\frac{\partial(\cos\vartheta)}{\partial z} = \frac{x^2}{r^2}$$

und schließlich

$$r = x$$

wird, so resultiert für

$$\left|\frac{\partial \omega}{\partial z}\right|_{z=0} =$$

$$= 2\pi \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{2s+2} \frac{1.3.5\ldots 2s+1}{2.4.6\ldots 2s+2} \cdot \frac{1.3.5\ldots 2s+1}{2.4.6\ldots 2s} a^{2s+2} \frac{1}{x^{2s+3}}$$

und für

$$E' = \left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} =$$

$$= 4\pi\sigma - 2\pi m \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2s+1)^2}{2^2.4^2.6^2\ldots(2s)^2(2s+2)} \cdot \frac{a^{2s+2}}{x^{2s+3}}$$

$$= 4\pi\sigma - \frac{2\pi m}{x}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{a}{x}\right)^4 + \frac{75}{128}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^6 + \ldots\right\}.$$

Wir begnügen uns mit dem ersten Gliede der Reihe und erhalten dann

$$\frac{E'}{E_0} = 1 - \frac{m}{4\sigma}\frac{a^2}{x^3} = 1 - \frac{h}{2}\left(R - \frac{h}{3}\right)^2 \frac{1}{x^3} = 1 - \frac{p}{100}.$$

Es wird

$$x^3 = \frac{100}{p}\frac{R^2 h}{2}$$

und

$$\left(\frac{x}{R}\right)^3 = \frac{50}{p}.\varepsilon.$$

Leider verlangen die bei den obigen Entwickelungen gemachten Annahmen, dass $\frac{R}{x}$ nicht viel größer als $\frac{1}{10}$ und ε höchstens $\frac{1}{5}$ sein darf, so dass wir für $x < 10R$ über die Größe des Potentialgefälles nichts aussagen können, ohne Glieder zweiter Ordnung beizuziehen; es erscheint mir aber nicht der Mühe wert, diese langwierige Rechnung durchzuführen.

Für $x = 10R$ und $\varepsilon = \frac{1}{5}$ ist $p = 0{\cdot}01\,\%$; für $x = 5R$ und $\varepsilon = \frac{1}{5}$ ist wenigstens der Größenordnung nach $p = 0{\cdot}1\,\%$.

Man sieht also, dass die Störungen des normalen Gefälles in der Ebene beiweiten nicht so groß sind, wie bei der Hügelkette, geschweige denn beim einseitig unendlichen Plateau, und dass umgekehrt die Abweichungen auf dem Plateau in entgegengesetzter Richtung verlaufen, so dass beim kreisförmigen Plateau der Durchmesser schon ungefähr 200mal so groß sein muss als die Höhe, wenn die Störung unter $1\,\%$ liegen soll.

IV. Ein gerades, langes Thal in einer Hochebene.

Nach dem bisher Gesagten kann ich mich hier ganz kurz fassen, da die Rechnungen mit wenig Modificationen die alten bleiben.

Für ein unendlich langes, gerades Thal, welches in einer Hochebene eingeschnitten ist, gelten die Rechnungen des Abschnittes II.

Die Doppelschicht erfüllt jetzt die ganze XY-Ebene mit Ausnahme eines Streifens von der Breite $2a$ parallel zur Y-Axe. Die Formeln für das Potential 6) und 6a) bleiben dieselben, nur muss für φ, $\pi-\varphi$ eingeführt werden.

Die Tiefe des Thales h und die halbe Breite b findet sich dann in analoger Weise

$$h = \frac{m}{2\sigma} \quad \text{und} \quad b = a - \frac{m}{2\pi\sigma},$$

woraus dann

$$a = b + \frac{h}{\pi} \doteq b + \frac{h}{3}$$

folgt.

Für $x < a$ ist

$$V = -4\pi\sigma z + 2m\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{a+x} + \operatorname{arctg}\frac{z}{a-x}\right)$$

und

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = 4\pi\sigma - \frac{4ma}{a^2-x^2} = E';$$

ferner

$$\frac{E'}{E} = 1 - \frac{m}{\pi\sigma}\,\frac{a}{a^2-x^2} = 1 - \frac{2h}{3}\,\frac{b+\frac{h}{3}}{\left(b+\frac{h}{3}\right)^2 - x^2} = 1 - \frac{p}{100},$$

woraus

$$\frac{x}{b} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9p-(600-6p)\varepsilon-(200-p)\varepsilon^2}{p}},$$

wenn

$$\frac{h}{b} = \varepsilon$$

gesetzt wird.

Für die Mitte $x = 0$ wird

$$\varepsilon = \frac{3p}{200-p}.$$

Für

$$p = 1 \text{ wird } \frac{b}{h} = 66,$$

für

$$p = 5 \text{ wird } \frac{b}{h} = 12.$$

Soll daher in der Mitte des Thales die Störung nicht mehr als 1%, respective 5% betragen, so dürfen sich die Randberge, in Graden ausgedrückt, nicht mehr als circa 1°, respective 5° über den Horizont erheben.

Für $x > a$, also für Punkte, die auf den das Thal einschließenden Plateaux liegen, wird für x, die groß gegen h sind,

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=h} = 4\pi\sigma + \frac{4ma}{x^2-a^2} = E$$

und

$$\frac{E}{E_0} = 1 + \frac{m}{\pi\sigma}\frac{a}{x^2-a^2} = 1 + \frac{2h}{3}\frac{b+\frac{h}{3}}{x^2-\left(b+\frac{h}{3}\right)^2} = 1 + \frac{p}{100},$$

woraus

$$\frac{x}{b} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9p+(600+6p)\varepsilon+(200+p)\varepsilon^2}{p}}$$

folgt.

Für $p = 0 \cdot 1\%$ und

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \text{ wird } x = 8b,$$

die Störung auf den Plateaux ist also eine sehr geringe.

In ganz analoger Weise berechnet sich aus den Formeln des Abschnittes III die Vertheilung des Potentialgefälles in einem kreisförmigen Thalbecken, das in einer Ebene eingesenkt ist. Es zeigt sich dann, dass die Störung im Thalbecken von derselben Größenordnung ist, wie auf dem entsprechenden Hügel und dass die Vertheilung in der Ebene durch Thal und Hügel in gleicher Weise gestört wird.

Man kann, wie ich mich überzeugt habe, durch passende Wahl und Anordnung von derartigen Doppelschichten die verschiedenartigsten Bodenerhebungen imitieren und die betreffenden Rechnungen durchführen. Doch scheint es mir nicht der Mühe wert, diese Rechnungen anzustellen, so lange nicht ein specieller Fall dazu nöthigt. Da es sich doch fast immer nur um Schätzungen handeln wird, habe ich im Vorangehenden nur wenige typische Fälle behandelt.

Die erhaltenen Resultate lassen sich etwa in folgenden Worten aussprechen:

Eine Bodenerhebung (Senkung), die im Verhältnisse zu ihrer Höhe (Tiefe) sich nach zwei Richtungen hin (Hochplateau, unendlich weites Thal) sehr weit erstreckt, stört das normale Potentialgefälle in der Ebene um 1%, respective 5% für Punkte, die um das 30fache, respective 7fache der Höhe von dem Fuße der Bodenerhebung entfernt sind. Geringer wird die Störung, wenn sich der Hügel (Thal) nur nach einer Seite hin sehr weit ausdehnt; sie beträgt 1%, respective 5% in einer Entfernung gleich dem 17-, respective 5fachen der Höhe, wenn sich die Höhe zur Breite zur Länge ungefähr wie $1:20:\infty$ verhält.

Noch geringer ist die Störung, wenn alle drei Dimensionen von gleicher Größenordnung sind.

Verhält sich Höhe : Breite : Länge wie 1 : 10 : 10 (kreisförmiges Plateau, Thalkessel), so ist schon in einer Entfernung gleich dem 25fachen der Höhe die Störung nur mehr 0·1%.

In umgekehrter Reihenfolge ändert sich der Einfluss auf die Bodenerhebungen (in den Thälern). Ein kreisförmiges Plateau (Thalkessel) muss 200mal, respective 40mal breiter als hoch (tief), ein gerader Hügelrücken (langgestrecktes Thal) 130mal, respective 26mal breiter als hoch (tief) sein, damit die Abweichung des wirklich in der Mitte der Erhebung (des Thales) vorhandenen Potentialgefälles, von dem in der allseitig ausgedehnten Ebene nicht mehr als 1%, respective 5% beträgt, während auf dem einseitig unendlich ausgedehnten Plateau dazu schon eine Entfernung vom Fuße genügt, die das 33-, respective 6fache der Höhe beträgt.

Über den Verlauf der Geschwindigkeit eines Projectils in der Nähe der Gewehrmündung

von

Dr. **M. Radaković.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1900.)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der experimentellen Untersuchung des Verlaufes der Geschossgeschwindigkeit in der unmittelbaren Nähe der Gewehrmündung. Das Projectil befindet sich auf diesem ersten Theile seiner Bahn unter abnormen Verhältnissen. Es bewegt sich in der aus dem Laufe des Gewehres herausgestoßenen, bewegten und verdichteten Luft; von rückwärts unterliegt es dem Überdruck der nachdrängenden Pulvergase und es hat überdies noch Energie zu der Bildung seiner Kopfwelle abzugeben.

Diese verschiedenen, die Geschwindigkeit des Geschosses theils vermehrenden, theils vermindernden Umstände bewirken sehr rasche Änderungen in der Bewegung des Projectils, welches erst nach dem Aufhören dieser Ursachen — etwa 2 *m* von der Mündung entfernt — die regelmäßige Bewegung im widerstehenden Mittel beginnt. Die Untersuchung des Geschwindigkeitsverlaufes in dem ersten Theile der Geschossbahn erfordert daher infolge der verhältnismäßig starken Änderungen, welche die zu beobachtende Größe auf einer kurzen Strecke erfährt, die Anwendung einer Methode, welche die mittlere Geschwindigkeit eines Projectils auf einem sehr kleinen Stücke seiner Bahn zu bestimmen gestattet. Diese Bedingung lässt

sich erfüllen, wenn man die Bewegung des Geschosses auf einem kleinen Wegstücke mit der aperiodischen Entladung eines Condensators vergleicht.[1]

Im allgemeinen haben die durchgeführten Versuche die Verwendbarkeit dieses Verfahrens zur Bestimmung von Geschossgeschwindigkeiten ergeben und stellen daher zugleich auch einen weiteren Beweis für die Brauchbarkeit der Methode dar.

Die Ausführung der Versuche fand auf der Militär-Schießstätte des Berg Isel statt. Ich wurde hiebei unterstützt durch den wertvollen Rath und die gütige Hilfe der Herren Oberst v. Minarelli und Prof. Dr. J. Klemenčič, welchen ich hiefür aufrichtig zu danken mir gestatte. Für freundliche Mittheilungen bin ich Herrn Hofrath Prof. Dr. E. Mach in Wien und Herrn Prof. Dr. C. Cranz in Stuttgart, für die Überlassung eines d'Arsonval-Galvanometers Herrn Prof. Dr. M. Th. Edelmann in München zu vielem Danke verpflichtet.

Die Versuchsanordnung.

Die Versuche wurden nach der in der erwähnten ersten Mittheilung bereits angegebenen Anordnung ausgeführt. Es dürfte dieselbe für den vorliegenden Zweck geeigneter sein als die von R. Sabine[2] angewendete Schaltung, und zwar aus dem folgenden Grunde. Bei den Versuchen von R. Sabine ist die Anordnung derart getroffen, dass bei der Bestimmung der Anfangsladung der Condensator zu dem Potential des offenen Elementes geladen wird, während er bei dem eigentlichen Schießversuche sich zu dem Potential des durch den Entladungswiderstand geschlossenen Elementes ladet. Man ist daher gezwungen, nur große Entladungswiderstände anzuwenden, um in beiden Fällen dieselbe Anfangsladung zu erhalten und verliert die Freiheit, sich durch verschiedene Wahl des Entladungswiderstandes die günstigsten Verhältnisse für die verschiedensten Schusszeiten leicht herzustellen.

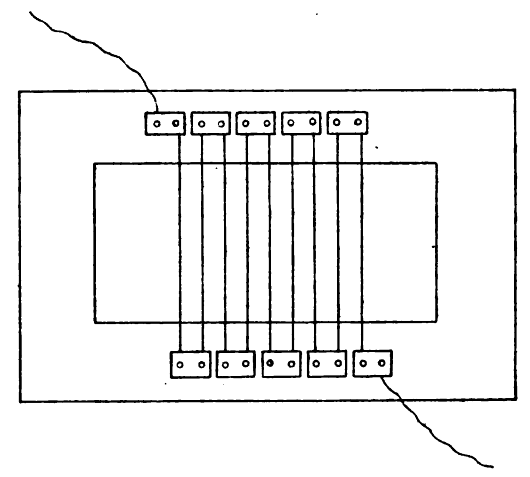
---

[1] Radaković, Diese Sitzungsber., Bd. CIX, Abth. II.a, 1900.

[2] R. Sabine, Philosophical Magazine, Serie V, V. 1, 1876, p. 337.

Die Messung der Anfangs- und Restladung geschah bei dem größeren Theile der Versuche mit einem Wiedemann'schen Galvanometer, welches sehr stark astasiert werden musste und dessen starke Abhängigkeit von äußeren Störungen sich in ungünstiger Weise bemerkbar machte. Bei den letzten Versuchen konnte ein d'Arsonval-Galvanometer angewendet werden, welches sich sehr gut für derartige Versuche im Freien eignet.

Der Condensator war ein Präcisionscondensator von Edelmann, der unter einer luftdicht schließenden Glasglocke aufgestellt und mit Phosphorsäureanhydrid getrocknet wurde.



Als Gitter dienten in Paraffin ausgekochte Holzrahmen, auf deren Längsseiten kleine, je mit zwei Klemmschrauben versehene Messingklötzchen in passenden, durch das Kaliber des Geschosses bestimmten Entfernungen von einander aufgeschraubt waren. Der Gitterdraht war ein 0·2 *mm* dicker, doppelt übersponnener Kupferdraht, der in der gezeichneten Weise eingespannt war. Um die Gitter bei den Versuchen in der unmittelbaren Nähe der Gewehrmündung vor der Einwirkung der Pulvergase zu schützen, waren zwei vertical stehende Blenden angebracht, die in der jeweilig angewendeten Gitterdistanz aufgestellt waren. Auf der dem Gewehre abgewendeten Seite derselben wurden die Rahmen in einer Weise befestigt, welche eine leichte Auswechselung gestattete. Die Öffnung der Blenden war so gewählt, dass die Rahmen geschützt und nur die Drähte

des Gitters dem Schützen sichtbar waren. Auf der in der Richtung des Schusses ersten Blende waren gegen das Gewehr zu zwei horizontale Leisten befestigt, auf welchen ein Querholz verschiebbar angebracht war. Dasselbe diente als Anschlag für das Gewehr, welches hiedurch immer in genau bestimmbare Entfernung von dem ersten Gitter gebracht werden konnte. Bei den Beobachtungen der Geschossgeschwindigkeit bis auf 1·8 *m* von der Mündung des Gewehres bestand das erste Gitter nur aus einem, das zweite aus zwei Drähten. Es wurden immer vier Gitter verwendet; während zwei derselben einem Versuche dienten, wurden die anderen zwei für den folgenden Versuch neu bespannt und hergerichtet. Alle Leitungen wurden theils auf Glas-, theils auf Porzellanisolatoren geführt und zur Erzielung einer möglichst guten Isolation auch alle Messapparate auf Glasplatten gestellt.

Das bei den Versuchen verwendete Gewehr war ein Repetiergewehr M. 88 von 8 *mm* Kaliber (System Manlicher); als Munition dienten Normalpatronen M. 93.

Die Fehlerquellen der Methode.

Die wesentlichste Fehlerquelle bei der Untersuchung der Geschossgeschwindigkeit mittelst aperiodischer Condensatorentladungen sind Mängel in der Isolation der Leitungen. Es empfiehlt sich zur Vermeidung dieses störenden Einflusses alle Leitungen und Messapparate sorgfältig zu isolieren und öfters nachzuprüfen, denn fast immer haben große Unregelmäßigkeiten in den Versuchen in einem kleinen Isolationsfehler der Leitung ihren Grund.

Bei der vorliegenden Anordnung der Versuche ist in dieser Hinsicht der Umstand nachtheilig, dass die Isolation bei der Bestimmung der Anfangsladung und bei der der Restladung in verschieden starker Weise beansprucht wird. Während in dem ersteren Falle der Condensator nur jene sehr kleine Zeit hindurch geöffnet ist, welche der Schlüssel nach dem Loslassen benöthigt, um aus der einen in die andere Stellung zurückzuschnellen, kommt in dem zweiten Falle zu dieser noch jene verhältnismäßig viel größere und sehr variable Zeit hinzu, welche zwischen dem Augenblicke, in dem das zweite Gitter

durchrissen wird und dem Augenblicke, in welchem der Beobachter den Schlüssel loslässt, verfließt. Ich beabsichtige daher, ein drittes Gitter aufzustellen und die Schaltung so zu machen, dass das Geschoss selbst nicht nur die Entladung des Condensators einleitet und beendet, sondern auch durch das Zerreißen des dritten Gitters den Condensator mit dem Galvanometer verbindet. In dieser Weise hoffe ich gleichmäßigere Verhältnisse erzielen zu können.

Eine weitere Fehlerquelle kann in der Selbstinduction des Entladungskreises liegen. Die der Berechnung der Beobachtungen zugrundeliegende Formel

$$q = q_0 . e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad 1)$$

in welcher q und q_0 die Rest-, beziehungsweise die Anfangsladung des Condensators, t die Zeitdauer der Entladung, R den Widerstand des Entladungskreises und C die Capacität des Condensators bedeuten, hat nur dann Giltigkeit, wenn die Leitung inductionsfrei ist. Hat der Selbstinductionscoefficient S der Leitung eine merkbare Größe, so modificiert sich die Form der Entladung, die bei großem S sogar in Oscillationen übergehen kann. Man wird daher trachten, durch die Wahl bifilar gewickelter Widerstände und eine sorgfältige Anlage aller Leitungen den Wert von S auf seinen kleinsten möglichen Betrag herabzudrücken. Es ist dann bei kleiner Selbstinduction die Form der Entladung durch den Ausdruck[1]

$$q = q_0 . e^{-\frac{t}{RC}} . \left[1 + \frac{S}{CR^2}\right] \qquad 2)$$

gegeben.

Man kann sich leicht davon überzeugen, ob das Correctionsglied von Einfluss ist oder nicht. Hiezu genügt entweder eine schätzungsweise Bestimmung des Wertes von S oder auch die Beobachtung derselben Zeit t bei stark verschiedenen Werten von Capacität und Widerstand. Wenn diese

[1] Klemenčič, diese Sitzungsberichte, Bd. XCIII, Abth. II. a., 1886, S. 474.

Beobachtungen, nach Formel 1) berechnet, gleiche Werte für t ergaben, ist man sicher, dass das Correctionsglied ohne Bedeutung sein wird.

Für die bei den vorliegenden Versuchen benützte Leitung wurde eine Prüfung des Einflusses der Selbstinduction in der letzteren Weise durchgeführt. Hiezu wurde die Geschwindigkeit des Geschosses bei derselben Distanz der Gitter und in derselben Entfernung vom Gewehre einmal mit den Werten

$$C = 0 \cdot 5918 \text{ Mikrofarad}, \qquad R = 1354 \text{ Ohm},$$

sodann mit

$$C = 0 \cdot 1978 \text{ Mikrofarad}, \qquad R = 3950 \text{ Ohm}$$

bestimmt. In dem ersten Falle ergab sich im Mittel aus sieben Beobachtungen

$$v = 618 \cdot 8 \frac{m}{\text{sec}},$$

in dem zweiten Falle im Mittel aus sieben Beobachtungen

$$v = 618 \cdot 9 \frac{m}{\text{sec}}.$$

Ein bemerkbarer Einfluss der Selbstinduction war daher nicht vorhanden.

Man kann bei der Bestimmung der Geschossgeschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der Gewehrmündung einen störenden Einfluss der dem Geschosse unmittelbar folgenden Pulvergase vermuthen. In der That wäre es denkbar, dass durch diese heißen Gase eine Leitung zwischen den Enden des durch das Projectil zerrissenen Drahtes hergestellt würde und dadurch bei dem ersten Gitter ein Nachladen des Condensators, bei dem zweiten ein Entladen desselben stattfände.

Anfangs- und Restladung würden dann nicht mehr genau der von dem Geschosse zum Durcheilen der Gitterdistanz benöthigten Zeit entsprechen und die Beobachtungen daher einen fehlerhaften Wert der Geschossgeschwindigkeit ergeben.

Die Untersuchung dieser Möglichkeit führte ich in der Weise durch, dass ich zwischen zwei, unmittelbar vor der Mündung des Gewehres in beiläufig 9 *mm* von einander angebrachten Drähten hindurchschießen ließ und beobachtete, ob man mittels einer Leitung der Pulvergase zwischen den beiden Drähten eine Ladung des Condensators erreichen kann. Der Versuch ergab ein negatives Resultat und dürfte daher innerhalb der Grenzen der benützten Genauigkeit der Messungen ein merkbarer störender Einfluss infolge dieses Umstandes nicht vorhanden sein.

Eine weitere Gruppe von Fehlerquellen kann darin ihren Grund haben, dass durch Unregelmäßigkeiten im Zerreißen der Drähte die der beobachteten Zeit entsprechende wahre Gitterdistanz der vor dem Versuche gemessenen gegenüber verkleinert oder vergrößert wird.

Es kann dies aus verschiedenen Ursachen geschehen; zunächst dadurch, dass der Draht eines Gitters nicht immer in derselben relativen Stellung zum Projectil zu reißen braucht. Es hängt dies davon ab, ob der Draht von der Spitze des Geschosses voll getroffen oder ob er nur gestreift wird. In dem ersteren Falle wird er in einer zum Geschosse senkrechten Richtung breitgequetscht und vor der Spitze desselben zerrissen; in dem zweiten Falle jedoch quetscht ihn das Projectil in der Richtung seiner Bewegung breit und reißt ihn von vorne nach rückwärts, indem es ihn ausbiegt, durch. Das Zerreißen geschieht dann, je nachdem ob der Draht mehr oder weniger gestreift wird, früher oder später, während das Geschoss die Verticalebene des Gitters durcheilt.

Dieser Vorgang muss bei den Drähten der beiden Gitter nicht in genau gleicher Weise verlaufen und es kann daher kommen, dass die beobachtete Zeit, das ist jene, welche zwischen dem Augenblicke des Reißens des ersten Drahtes und dem des zweiten Drahtes verfließt, nicht gleich der Zeit ist, welche das Geschoss zum Durcheilen der gemessenen Gitterdistanz benöthigt. Sie entspricht vielmehr der gemessenen Gitterdistanz, vermehrt oder vermindert um die Differenz der relativen Stellungen der Drähte beider Gitter gegen das Projectil in dem Augenblicke des Reißens. Bei den kleinen

verwendeten Gitterdistanzen kann dieser Umstand merkbar ins Gewicht fallen.

Ich glaube in der That das Eintreten dieser Fehlerursache beobachtet zu haben. Bei den ersten durchgeführten Versuchen hatte ich zwar das erste Gitter aus sehr dünnem Drahte gemacht, um nicht die Energie des Projectils um den Betrag der zum Reißen des ersten Drahtes nöthigen Arbeit nutzlos zu verkleinern, aber als Draht des zweiten Gitters hatte ich 0·8 *mm* dicken Kupferdraht gewählt. Man konnte nicht nur aus dem Anblicke der Enden des zerrissenen Drahtes sehen, ob er voll getroffen oder gestreift worden war, sondern es zeigten auch die Beobachtungen bei einer Gitterdistanz von rund 30 *cm* ziemlich bedeutende Unregelmäßigkeiten untereinander, die erst verschwunden sind, als ich das zweite Gitter auch aus sehr dünnem Drahte machte.

Zur Vermeidung der aus dieser Ursache entspringenden Fehler empfiehlt sich daher die Anwendung sehr dünner Drähte bei beiden Gittern.

Ähnliche Fehler können weiters dadurch entstehen, dass die Drähte vor dem Reißen durch die Kopfwelle des Geschosses in verschiedener Weise ausgebogen werden oder dass ein gelegentliches Schleifen der zerrissenen Drahtenden auf dem Projectile eine Leitung vermittelt.

Beide Fehlerursachen haben das eine gemeinsam, dass sie die Gitterdistanz scheinbar um kleine Größen ändern. Sie müssen sich daher, wenn sie von Einfluss sind, in umso größeren Unterschieden zwischen den einzelnen Beobachtungen einer Reihe unter einander ausdrücken, je kleiner die Gitterdistanz ist. Ich habe bei sehr verschiedenen Gitterdistanzen die Geschwindigkeit des Geschosses zu bestimmen versucht. Es wurden drei verschiedene Gitterdistanzen angewendet, und zwar befand sich bei $s = 16 \cdot 6$ *cm* und $s = 28 \cdot 5$ *cm* das erste Gitter unmittelbar vor der Mündung des Gewehres, beziehungsweise 180 *cm* von derselben entfernt, bei der dritten Gitterdistanz $s = 98 \cdot 3$ *cm* hingegen war es 10·6 *m* von derselben entfernt aufgestellt. Das Auftreten größerer Unterschiede unter den einzelnen Beobachtungen war daher bei den ersten beiden Beobachtungsreihen der dritten gegenüber nicht nur durch die

Kleinheit der Gitterdistanz begünstigt, sondern auch noch durch den Umstand gefördert, dass bei den ersteren Versuchen die Geschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der Mündung, also in einem Gebiete beobachtet wurde, in welchem sie sehr rapiden Änderungen unterliegt, während bei dem letzten Versuche die Geschossgeschwindigkeit vom ersten bis zum zweiten Gitter als constant angesehen werden kann.

Es ergaben sich die folgenden Werte für den mittleren Fehler einer Beobachtung aus je zehn Einzelbeobachtungen berechnet:

Gitterdistanz:

$$s = 16\cdot 6\,cm, \qquad s = 28\cdot 5\,cm, \qquad s = 98\cdot 3\,cm.$$

Mittlerer Fehler einer Beobachtung:

$$f_m = 9\cdot 83\,\frac{m}{\mathrm{sec}}, \qquad f_m = 10\cdot 09\,\frac{m}{\mathrm{sec}}, \qquad {}_m = 5\cdot 77\,\frac{m}{\mathrm{sec}}.$$

Ein bemerkbarer Einfluss der betrachteten Fehlerquelle lässt sich nicht constatieren. Wäre nämlich ein solcher vorhanden, so hätten die mittleren Fehler einer Beobachtung bei der ersten Reihe den sechsfachen, bei der zweiten den dreifachen Wert des mittleren Fehlers bei der dritten Reihe betragen müssen. Der vorhandene Unterschied unter den mittleren Fehlern dürfte sich ungezwungen aus anderen Gründen erklären lassen. Ich werde auf diesen Umstand noch zurückkommen.

Es erübrigt noch die Untersuchung der Frage, ob die zur Messung der Geschossgeschwindigkeit verwendete Methode irgend welche ihrem Wesen selbst anhaftende constante Fehler enthalte. Die Entscheidung hierüber lässt sich erbringen durch die Beobachtung eines Vorganges, dessen Zeitdauer auf einem anderen Wege mit genügender Genauigkeit bestimmbar ist. Die Übereinstimmung der beobachteten mit der berechneten Zeit ist eine Gewähr dafür, dass die Methode keine constanten Fehler enthält.

Eine derartige Prüfung ist den Arbeiten mit dem Hiecke'schen Fallapparate[1] zu entnehmen. Bei diesem wird die Zeit,

[1] Vergl. Hiecke, diese Sitzungsber., Bd. 96, S. 134, 1887, und Klemenčič, diese Sitzungsberichte, Bd. 104, S. 724, 1895.



welche ein fallendes Gewicht zum Durcheilen eines kleinen Weges benöthigt, einerseits mittels der aperiodischen Entladung eines Condensators beobachtet und anderseits aus der Fallhöhe berechnet. Es ergab[1] sich z. B. im Mittel für eine durchfallene Strecke von 0·692 *mm*, die einer ganzen Trommelumdrehung der Mikrometerschraube des Apparates entspricht,

$$t = 0{\cdot}0001644 \text{ sec (beobachtet)}$$

und

$$t = 0{\cdot}0001614 \text{ sec (berechnet).}$$

Die Übereinstimmung ist eine sehr gute, nachdem der berechnete Wert infolge der Vernachlässigung des Luftwiderstandes und der Reibung des fallenden Gewichtes an seinem Führungsdrahte zu klein ausfallen musste. Da man jedoch Zeiten, die einer Änderung der durchfallenen Strecke um ihren zwanzigsten Theil entsprechen, noch leicht beobachten kann, so kann man mit der Methode noch Zeiten von 0·000008 sec mit Sicherheit bestimmen.

Die Genauigkeit ließe sich gewiss noch weiter treiben; die angeführten Versuche hatten nur den Zweck einer Aichung des verwendeten Apparates und nicht den einer Untersuchung über die Grenzen der Methode.

Bei einer Geschossgeschwindigkeit von 600 $\frac{m}{\text{sec}}$ und einer Gitterdistanz von 30 *cm* sind die zu beobachtenden Zeiten von der Größenordnung von 0·0005 sec, so dass man die absoluten Zeitwerte als durch keine der Methode anhaftende constante Fehler gefälscht ansehen kann.

Die Beobachtungsresultate.

Es wurde die mittlere Geschwindigkeit des Geschosses auf der Gitterdistanz für verschiedene Entfernungen D der Gewehrmündung von dem ersten Gitter bestimmt, und zwar wurden die Versuche in der Weise variiert, dass entweder mit den Beobachtungen bei $D = 0$ begonnen und mit den Versuchen bei der jeweilig größten Entfernung am Beobachtungs-

[1] Klemenčič, diese Sitzungsberichte, Bd. 104, S. 733, 1895.

tage geschlossen wurde, oder es wurde in umgekehrter Reihenfolge, oder endlich derart beobachtet, dass die gewählten Entfernungen wachsend bis zur größten und von dieser wieder abnehmend bis zum Anfangswerte angeordnet waren. Im allgemeinen wurden bei jeder Entfernung für je 10 Schüsse die Geschwindigkeit bestimmt. Die Beobachtungen erstreckten sich auf das Gebiet von $D = 0$ bis $D = 180\,cm$; einige Beobachtungen wurden noch bei einer Entfernung von rund $D = 10\,m$ ausgeführt.

Als Beispiele für die Einzelbeobachtungen bei demselben Werte von D mögen die in der folgenden Tabelle mitgetheilten Beobachtungsdaten dienen, in welcher die Capacitäten in Mikrofarad, die Widerstände in Ohm angegeben sind.

	$D = 0\ cm$ $s = 29·8$ $C = 0·5918$ $R = 1354$	$D = 5\ cm$ $s = 16·6$ $C = 0·5918$ $R = 597$	$D = 150\ cm$ $s = 28·1$ $C = 0·5918$ $R = 1354$	$D = 1065\ cm$ $s = 98·3$ $C = 0·5918$ $R = 3950$
1	622·9 $\frac{m}{sec}$	613·1 $\frac{m}{sec}$	591·2 $\frac{m}{sec}$	601·3 $\frac{m}{sec}$
2	614·8	611·6	606·6	595·0
3	614·1	615·5	607·7	591·3
4	616·5	593·5	598·1	592·2
5	630·6	589·5	595·4	598·5
6	615·0	618·3	595·6	599·1
7	612·7	616·1	591·0	609·3
8	623·5	603·2	599·5	598·7
9	614·6	603·1	606·3	593·2
10	625·8	609·1	612·5	605·1
Mittel	619·05	607·2	600·4	598·4

Die Unterschiede der einzelnen Beobachtungen einer Reihe untereinander sind beträchtliche, und zwar sind sie bei den

kleinen Entfernungen D in der Umgebung der Mündung etwas größer als bei der großen Entfernung von 10 *m*.

Die wesentlichsten Ursachen hievon sind die Variationen der Geschwindigkeit bei den einzelnen Schüssen, welche durch Ungleichheiten in dem Gewichte der Pulvermenge, in der chemischen Beschaffenheit desselben, sowie in dem Verlaufe des Entzündungsvorganges bedingt sind. Bei zehn Patronen fand ich Verschiedenheiten in der Pulvermenge bis zu 2·5%; dies allein würde Unterschiede in der Geschossgeschwindigkeit von 1·2% oder rund $7 \frac{m}{\text{sec}}$ erklären. Den ungleichmäßigen Verlauf des Entzündungsprocesses erkennt man aus der Beobachtung, dass stets unverbrannte Pulverblättchen mit dem Geschosse herausgeschleudert werden und in den Blenden zu finden sind.

Die Unterschiede zwischen den Einzelbeobachtungen bei kleinen Entfernungen D sind jedoch durch diese Umstände allein nicht völlig erklärbar. Diese Beobachtungen stimmen nämlich weniger gut untereinander überein, als dies bei Messungen der mittleren Geschossgeschwindigkeit auf 50 *m* der Bahn mit dem Apparate von Le Boulengé der Fall ist. Nur die Beobachtungen bei $D = 10\,m$ kommen diesen letzteren Messungen an Genauigkeit sehr nahe.

Zunächst dürfte bei den vorliegenden Versuchen die Isolation der Gitter keine tadellose, vielmehr durch gelegentliches Beschlagen mit Feuchtigkeit öfteren Schwankungen ausgesetzt gewesen sein; dies ist jedoch infolge der bereits erwähnten verschiedenen Inanspruchnahme der Isolation bei den Bestimmungen der Anfangs- und Restladung von Einfluss auf den Gang der Beobachtungen. Sodann wurden die Versuche bei den kleinen Entfernungen fast ausschließlich mit einem stark astasierten Galvanometer ausgeführt, dessen Empfindlichkeit eine geringe war. Es betrug der Ausschlag bei der Messung der Restladung etwa 100 Scalentheile, so dass eine Störung des Ausschlages um einen Scalentheil bereits einen Fehler von 1% in dem Resultate ergeben musste. Derartige Störungen waren jedoch auf dem von den Truppen sehr viel benützten Schießplatze, in dessen unmittelbarer Nähe überdies noch die

Eisenbahn verläuft, sehr häufig. Das zu den Beobachtungen bei der großen Entfernung verwendete d'Arsonval-Galvanometer war empfindlicher und unabhängiger von äußeren Einflüssen.

Endlich ist es nicht ganz ausgeschlossen, dass die Geschwindigkeit eines Projectils an einer der Gewehrmündung sehr naheliegenden Stelle überhaupt bei den einzelnen Schüssen mehr variiert als an weiter von derselben entfernten Punkten seiner Bahn. Die Versuche weisen nämlich darauf hin, dass die Geschwindigkeitscurve von der Mündung bis 2 *m* von derselben nicht nur sehr starke Schwankungen besitzt, sondern auch bei Wahrung des allgemeinen Typus manchmal auf eine kürzere Strecke zusammengedrängt, manchmal auf eine längere auseinandergezogen zu sein scheint. Bestimmt man nun innerhalb dieses Gebietes rapider Änderungen die mittlere Geschwindigkeit des Projectils auf einer im Verhältnisse zu der Ausdehnung des Bereiches großen Strecke von 30 *cm* in fester Entfernung von dem Gewehre, so können die Veränderungen in der Steilheit der Geschwindigkeitscurve größere Variationen der mittleren Geschwindigkeit ergeben, als man weiter von der Mündung des Gewehres, wo diese Ursache wegfällt, findet.

Aus der Kritik der Einzelbeobachtungen darf man daher schließen, dass die Methode der aperiodischen Condensatorentladungen, wenigstens in größerer Entfernung vom Gewehre, die Geschwindigkeit mit nahezu derselben Genauigkeit, wie der Apparat von Le Boulengé zu bestimmen gestattet. Es ist höchst wahrscheinlich, dass dieselbe Präcision der Messungen, wie bei diesem viel verwendeten Apparate, bei ruhiger Aufstellung der Instrumente und tadelloser Isolation zumindestens erreicht, wenn nicht übertroffen werden kann.

Die Resultate der Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	Gitterdistanz in Centimeter	Entfernung des ersten Gitters von der Gewehrmündung						
		$D = 0\,cm$	$D = 30\,cm$	$D = 60\,cm$	$D = 90\,cm$	$D = 120\,cm$	$D = 150\,cm$	$D = 180\,cm$
		$\frac{m}{sec}$						
I.	29·8	619·1	—	—	—	—	—	—
II.	29·8	618·8	—	—	—	—	—	—
III.	29·8	618·9	—	—	—	—	—	—
IV.	29·8	626·9*	604·9*	603·9*	—	—	—	—
V.	29 8	615·1	600·6	592·8	596·4	—	—	—
VI.	29·8	617·6	—	591·9	—	606·4*	—	—
VII.	29·8	598·5	—	590·9*	—	602·6	—	—
VIII.	28·5	617·3*	—	595·9*	—	606·8	—	604·6
IX.	28·5	608·5	597·0	—	599·9	603·6	—	604·1*
X.	16·6	607·2	—	589·4*	—	—	—	—
XI.	28·2	620·4	599·8	594·4	—	598·6	—	—
XII.	28·2	629·0	—	596·5	—	—	600·4	—
XIII.	28·2	621 8*	—	592·9*	—	—	609·8	—
XIV.	28·2	—	—	592·9	—	—	603·9*	—

Alle Werte sind Mittelwerte aus 8 bis 10 Einzelbeobachtungen, mit Ausnahme der mit * bezeichneten, welche Mittel aus je 5 Beobachtungen sind. Die Beobachtungen in jeder Horizontalreihe sind immer an demselben Tage angestellt worden. Alle 14 Reihen erstrecken sich auf ein Intervall von 4 Monaten, von März bis Juni; sie sind also bei den verschiedensten äußeren Umständen ausgeführt.

Die Reihen II und III, sowie XIII und XIV wurden je an demselben Tage beobachtet. Die Reihen IV bis VII, IX und X sind bei steigenden Werten, die Reihe VIII bei abnehmenden Werten von D beobachtet; die Reihen XI bis XIV sind einschließende Beobachtungen nach der bereits erwähnten Art. In der Reihe X sind die beiden Entfernungen genauer $D = 5$ *cm* und $D = 66$ *cm*.

Alle Beobachtungsreihen ergeben übereinstimmend, dass die Geschossgeschwindigkeit von der Mündung des Gewehres an, bei welcher sie ihren größten Wert besitzt, zuerst abnimmt. Sie erreicht einen kleinsten Wert beiläufig 75 *cm* $\left(= 60 + \frac{s}{2}\right)$ von derselben entfernt und nimmt dann wieder zu, um in einer Entfernung von 165 *cm* $\left(= 150 + \frac{s}{2}\right)$ ein zweites Maximum zu erlangen. Die Stellen des Minimums und des Maximums scheinen innerhalb kleiner Grenzen zu variieren, so dass die Steilheit der Geschwindigkeitscurve sowohl in dem abnehmenden, wie in dem zunehmenden Theile keine feste, sondern eine veränderliche Größe ist.

Das Maximum der Geschossgeschwindigkeit bei circa 165 *cm* von der Mündung ist, wie ich dem Compendium der theoretischen äußeren Ballistik von C. Cranz entnehme, bereits von Cushing Crehore und Owen Squier durch Messungen mit dem Photo-Chronographen beobachtet worden.

Die genannten Beobachter fanden ein Maximum der Geschwindigkeit in circa 2 *m* von der Mündung des Gewehres entfernt; die vorliegenden Versuche bilden eine wenigstens qualitative Bestätigung dieser Beobachtungen. Das Minimum der Geschwindigkeit bei circa 75 *cm* ist meines Wissens noch nicht beobachtet worden.

Man kann sich diesen Verlauf der Geschwindigkeit leicht verständlich machen, wenn man die äußeren Verhältnisse bedenkt, in welchen das Geschoss nach Verlassen der Gewehrmündung sich befindet. Dieselben wurden bekanntlich von Mach mittels der Schlierenmethode untersucht und sind sehr genau erforscht.

In den photographischen Aufnahmen[1] des Projectils unmittelbar und kurz nach dem Verlassen der Gewehrmündung sieht man vor dem Geschosse die aus dem Laufe des Gewehres verdrängte Luft in Form eines Luftpilzes; an der Spitze des Projectils erkennt man die beginnende Bildung seiner Kopfwelle und hinter demselben sind die in Pilzform aus dem Laufe herauswachsenden Pulvergase erkennbar. Diese abnormen Verhältnisse findet das Geschoss nur auf einer sehr kleinen Strecke seiner Bahn, denn wenige Meter von dem Laufe erhielten die genannten Beobachter bereits ganz reine Bilder.

Das Projectil unterliegt daher nach Verlassen der Gewehrmündung verschiedenen Einflüssen, welche seine Geschwindigkeit in entgegengesetzter Weise beeinflussen. Es bewegt sich in der aus dem Laufe des Gewehres herausgestoßenen Luft, also in einem bewegten und verdichteten Medium, welches ihm jedenfalls größeren Widerstand bietet als die ruhende Luft, die es in späteren Theilen seiner Bahn durcheilt. Überdies hat das Geschoss noch Energie zu der Bildung seiner Kopfwelle abzugeben. Diese Einflüsse vermindern seine Geschwindigkeit. Anderseits steht das Projectil unter der Einwirkung der ihm folgenden Pulvergase, die eine größere Geschwindigkeit besitzen und die Bewegung des Geschosses zu beschleunigen trachten. Beide Kräfte, die auf das Projectil wirken, sowohl die verzögernde, als die beschleunigende Kraft nehmen sehr rasch, jedoch in ungleicher Weise, mit der Zeit ab, und zwar vermindert sich die Intensität der ersteren Kraft rascher als die der letzteren.

Es scheint verständlich, dass die Geschwindigkeit des Projectils zuerst unter dem überwiegenden Einflusse der verzögernden Umstände sich vermindert, dass nach sehr kurzer

[1] E. und L. Mach, diese Sitzungsber., Bd. 98, 1889, S. 1310.

Zeit jedoch die beschleunigenden Einflüsse die rascher abnehmenden, verzögernden noch an Stärke zu übertreffen vermögen und nun ihrerseits die Geschwindigkeit des Geschosses wieder steigern.

Die Geschwindigkeitscurve muss daher von der Gewehrmündung an abnehmend verlaufen, bis sie ein Minimum an jener Stelle erreicht, an welcher die beiden sich widerstreitenden Kräfte gleiche Stärke besitzen; sie nimmt sodann so lange zu, bis der sinkende Überdruck der Pulvergase dem Widerstande in der ruhenden Luft gleichgeworden ist. In diesem Augenblicke erreicht die Geschwindigkeit ein Maximum, um von dieser Stelle an nunmehr sich fortdauernd zu vermindern.[1]

Man kann sich leicht vorstellen, dass dieser ganze Process, der auf der kurzen Strecke von 2 *m*, also in einer Zeit von beiläufig 0·003 sec, verläuft, sich bei den einzelnen Schüssen nicht ganz gleichmäßig wiederholt. Bringt ja doch schon die von Mach mit Hilfe der erzeugten Schallwellen beobachtete ruckweise Bewegung des Projectils vor seinem Austritte aus dem Laufe ein variables Element in die Bildung des vor dem Projectile befindlichen Luftpilz hinein. Es erscheint daher verständlich, dass die Stellen, an welchen das Minimum und das Maximum der Geschossgeschwindigkeit auftreten, und damit die Steilheit der Geschwindigkeitscurve bei den einzelnen Schüssen veränderlich sind.

Zusammenfassung der Resultate.

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen lassen sich in den folgenden Sätzen zusammenfassen:

Die mittlere Geschwindigkeit eines Projectils auf einer kleinen Strecke seiner Bahn lässt sich durch den Vergleich mit der aperiodischen Entladung eines Condensators bestimmen.

---

[1] Es wäre nicht ohne Interesse, ein Gewehr zu untersuchen, dessen Projectil eine Mündungsgeschwindigkeit hat, welche kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist. In diesem Falle würde von den verzögernden Umständen die Bildung der Kopfwelle entfallen, und es wäre nicht ausgeschlossen, dass daher das bei großen Geschwindigkeiten beobachtete Minimum bei einem solchen Gewehre gar nicht vorhanden wäre, sondern die Geschwindigkeit des Geschosses von der Mündung an zunächst nur steigend verläuft.

Diese Methode dürfte keinerlei ihrem Wesen anhaftende constante Fehler oder variable Störungen, die sich nicht vermeiden ließen, besitzen.

Die Genauigkeit der Messungen ist bei der Aufnahme der Geschwindigkeit in der nächsten Nähe der Mündung kleiner, bei Beobachtungen in größerer Entfernung nahezu so groß, wie die der Messungen mit dem Apparate von Le Boulengé. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass sich dieselbe Genauigkeit bei genügender Isolation und ruhiger Aufstellung der Messapparate wird erreichen lassen.

Der große Vorzug, beliebige, sehr kleine Distanzen anwenden zu können, auf welchen die mittlere Geschwindigkeit des Geschosses bestimmt wird, zeichnet die vorliegende Methode ganz besonders aus.

Die Geschwindigkeit des Projectils nimmt von der Mündung an zunächst ab; sie besitzt in einer Entfernung von circa 75 *cm* vom Gewehre ein Minimum, um sodann wieder zuzunehmen und bei circa 165 *cm* ein Maximum zu erlangen.

Die Stellen des Minimums und Maximums scheinen innerhalb kleiner Grenzen an verschiedenen Tagen, wahrscheinlich auch von Schuss zu Schuss, zu variieren.

Preis des ganzen Heftes: 7 K 60 h = 7 Mk. 60 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. [Cl.] erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in [folgenden] **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.

132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. VIII. UND IX. HEFT.

JAHRGANG 1900. — OCTOBER UND NOVEMBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 1 TEXTFIGUR.)



A WIEN, 1900.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 8. und 9. Heftes October und November 1900 des CIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 K 40 h = 2 Mk. 40 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XIX. SITZUNG VOM 11. OCTOBER 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 109, Abth. I, Heft I bis III (Jänner bis März 1900); Heft IV bis VI (April bis Juni 1900). — Abth. II. a, Heft IV und V (April und Mai 1900). — Abth. II. b., Heft III und IV (März und April 1900). — Abth. III, Heft I bis IV (Jänner bis April 1900). — Monatshefte für Chemie, Bd. XXI, Heft VI (Juni 1900); Heft VII (Juli 1900).

Der Vorsitzende, Herr Präsident Prof. E. Sueß, begrüßt die Classe bei Wiederaufnahme der Sitzungen nach den akademischen Ferien und heißt das neueintretende w. M. Herrn Director Prof. Dr. Richard Wettstein Ritter v. Westersheim herzlich willkommen.

Der Vorsitzende gedenkt ferner des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 20. September l. J. in Graz erfolgte Ableben des w. M. der philosophisch-historischen Classe, Herrn Hofrathes Prof. Dr. Karl Schenkl, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der niederösterr. Landesausschuss dankt für die Erstattung des Gutachtens über die von Herrn Dr. Karl Kostersitz projectierte Errichtung eines astrophysikalischen und meteorologischen Observatoriums auf dem Schneeberge.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus, und zwar Herr Director Prof. Dr. Richard Wettstein Ritter v. Westersheim für seine Wahl zum wirklichen Mitgliede, die Herren Prof. Dr. Ferdinand Hochstetter, Prof. Dr. Karl Heider in Innsbruck und Dr. Karl Auer v. Welsbach in Wien für ihre Wahl zum inländischen correspondierenden Mitgliede die Herren geh. Regierungsrath Prof. Dr. Felix Klein in

Göttingen und geh. Rath Prof. Dr. Karl Alfred Ritter v. Zittel in München für ihre Wahl zum ausländischen correspondierenden Mitgliede dieser Classe.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt folgende eingesendete Arbeiten vor:

I. »Über den Einfluss des Bindemittels auf den photochemischen Effect in Bromsilberemulsionen, und die photochemische Induction (Mit Versuchen von Cl. Immerwahr)«, von Herrn Richard Abegg in Breslau.

II. »Über die specifische Wärme von Lösungen«. von Herrn Prof. P. C. Puschl in Seitenstetten.

III. »Über die sphärische Abbildung der Flächen zweiten Grades und ihre Anwendung in der darstellenden Geometrie, I«, von Herrn August Adler, k. k. Professor an der deutschen Staatsrealschule in Karolinenthal.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. J. v. Radinger übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Der Äther und die Geschwindigkeit des Lichtes«.

Das w. M. Herr Prof. G. Ritter v. Escherich legt das 4. Heft des II. Bandes der mit Unterstützung der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebenen Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Albert Ier, Prince de Monaco, Résultats des campagnes scientifiques accomplics sur son yacht. Fascicules XIII, XIV, XV. XVI. Imprimerie de Monaco, 1899—1900. 4°.

— Les campagnes scientifiques. Imprimerie de Monaco, 1900. 8°.

Baudouin O., La pluie artificielle précédée de considérations sur la nature et l'origine de la chaleur, la lumière et l'électricité. Paris, 1900. 8°.

Birkenmayer L. A., Mikołaj Kopernik. Część pierwsza studya nad pracami Kopernika oraz materyały biograficzne. Krakau, 1900. 4⁰.

Curcommission in Baden, Der Curort Baden bei Wien in Wort und Bild. Wien und Leipzig, 1900. 8⁰.

Destefano O. Dr., Il crepuscolo, ossia spiegazione de' fenomeni luminosi che si osservano nel tramonto del sole e nelle diverse aurore. Neapel, 1865. 8⁰.

Duparc L., Degrange E. und Monnier A., Traité de chimie analytique qualitative suivi de tables systématiques pour l'analyse minérale. Génève et Paris, 1900. 8⁰.

Jamshedji E., Reciprocally related figures and the principle of continuity. Ahmedabad, 1900. 8⁰.

Laufer H., Beiträge zur Kenntnis der Tibetischen Medicin. I. Theil. Berlin, 1900. 8⁰.

Osservatorio R. di Padova, All' astronomo G. V. Schiaparelli Omaggio 30 Giugno 1860—30 Giugno 1900. Groß-8⁰.

Observatoire de Paris, Carte photographique du ciel. 91 feuilles.

— Atlas photographique de la Lune, exécuté par M. M. Loewy & M. P. Puiseux. Planches du IVème fascicule. Paris, 1899.

Pacher P., Die Kraft ist keine Eigenschaft des Stoffes. Wien, 1900. 8⁰.

Pamperl K., Universalgeld auf Grundlage des metrischen Gewichtes und des Monometallismus, vorzüglich der Silberwährung. Ruckerlberg bei Graz, 1900. 8⁰.

Issel A. e G. Rovereto, Illustrazione del molluschi fossili tongriani posseduti dal museo geologico della R. università di Genova. Genova, 1900. Groß-8⁰.

Todaro della Galia A., Ordini equestri e di merito degli stati d' Europa. Palermo, 1900. Groß-8⁰.

Über das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgange eines elektrischen Stromes

von

Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1900.)

Bestimmungen der »Leitfähigkeit« schlecht leitender. flüssiger Dielektrica sind wiederholt ausgeführt worden, doch stimmen die Angaben verschiedener Beobachter so wenig überein, dass die Leitfähigkeit einstweilen kaum als charakteristische Constante einer solchen Substanz verwendet werden kann. Diese Nichtübereinstimmung mag theilweise an dem Umstande liegen, dass die flüssigen Dielektrica häufig chemisch nicht definierte Gemische verschiedener organischer Verbindungen sind (wie die meisten fetten Öle, Petroleum, Benzin u. dgl.), oder sich nur schwierig rein darstellen und in diesem Zustande beim Experimentieren erhalten lassen. Außerdem hat es sich aber gezeigt, dass selbst bei einer gegebenen Probe einer Substanz der scheinbare Widerstand von Nebenumständen abhängt, indem das Ohm'sche Gesetz bei flüssigen Dielektricas nicht erfüllt ist.

Neben älteren Beobachtungen von Hertz,[1] Quincke[2] und anderen sind es hauptsächlich die Untersuchungen Kollers,[3] die hierüber Aufschluss geben.

Koller maß den Widerstand einer von zwei parallelen Metallplatten begrenzten Schichte eines flüssigen Dielektricums,

[1] H. Hertz, Wied. Ann., 20, S. 279 (1883).

[2] G. Quinke, Wied. Ann., 28, S. 529 (1886).

[3] H. Koller, Diese Sitzungsberichte, Bd. 98, S. 201 (1889).

indem er diesen Condensator und einen bekannten großen Widerstand hintereinander in den Kreis einer Batterie einschaltete und elektrometrisch den Potentialabfall im Condensator und im Vergleichswiderstande bestimmte. Die elektromotorische Kraft variierte bei seinen Versuchen zwischen $^1/_8$ und 8 Daniells, die Elektrodendistanz zwischen einigen Zehntelmillimetern bis zu nahe einem Centimeter.

Die Ergebnisse seiner Beobachtungen waren kurz die folgenden: Die Stromstärke ändert sich mit der Zeit, sie nimmt unmittelbar nach Stromschluss rasch, späterhin langsamer ab, und es ist diese Änderung stundenlang verfolgbar. Der Gegensatz zwischen dem raschen Absinken des Stromes in den ersten Secunden und dem langsamen in der darauffolgenden Zeit ist bei manchen Substanzen sehr schroff, bei anderen weniger ausgesprochen, einzelne zeigen überhaupt nur geringe zeitliche Änderungen.

Die Stromstärke ist nicht proportional der eingeschalteten elektromotorischen Kraft, sondern nimmt in geringerem Maße zu als diese, wenigstens bei den von Koller angewendeten niedrigen Spannungen, während Quincke[1] bei hoher Spannung das entgegengesetzte Verhalten beobachtet hatte.

Ebenso ist die Stromstärke bei constanter elektromotorischer Kraft und verschiedenen Schichtdicken nicht dieser umgekehrt proportional, sondern die scheinbare Leitfähigkeit nimmt mit der Elektrodendistanz zu.

Nach einer der Koller'schen im Principe gleichen Methode hat Naccari[2] analoge Versuche angestellt. Im Gegensatze zu Koller findet Naccari nur geringe Abweichungen vom Ohm-schen Gesetze; ferner constatiert er ein rasches Anwachsen der Leitfähigkeit mit der Temperatur.

Da auch Koller in einzelnen Fällen nur geringe Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze erhielt, sind Naccaris Resultate kein Gegenbeweis dafür, dass häufig, wenn auch nicht immer, unter noch nicht bekannten Bedingungen solche Abweichungen bestehen.

---

1 L. c.

2 Naccari, Nuov. Cim. (4) 8. S. 259 (1898).

Gerade die Verhältnisse in einem derartigen Dielektricum scheinen mir eine große Analogie mit jenen eines ionisierten Gases (von Röntgen- oder Becquerelstrahlen durchsetzte Gase, Flammengase) zu zeigen. Auch bei diesen finden wir eine Abnahme der Leitfähigkeit infolge der Aufzehrung der freien Ionen, dieselbe Art der Abhängigkeit der Stromstärke von der elektromotorischen Kraft und von der Elektrodendistanz, Erscheinungen, die durch die verschiedene Geschwindigkeit der positiven und negativen Ionen und durch die Störung des elektrischen Feldes infolge der Aufstauung derselben verständlich gemacht wurden.

Um diese Analogien weiter zu verfolgen, habe ich zunächst an Toluol Messungen angestellt; ich bediente mich der directen galvanometrischen Methode, die bei besser isolierenden Flüssigkeiten vielleicht versagt hätte, bei Toluol aber eine ziemliche Variation der elektromotorischen Kräfte zuließ und durch ihre Einfachheit nicht nur bequemer als die elektrometrische, sondern auch verlässlicher ist und rascheres Arbeiten ermöglicht.

Das verwendete Toluol war käufliches, »rectificiertes«; auf besondere Reinheit desselben legte ich keinen Wert, da es sich mir zunächst nicht um die Frage handelte, ob die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze bloß von Verunreinigungen (Staub, Wassergehalt u. dgl.) herrühren oder auch bei vollkommen reinen Substanzen auftreten, sondern nur darum, das Verhalten einer einmal gegebenen Substanz beim Durchgange eines elektrischen Stromes genauer festzustellen. In der That zeigte es sich, dass verschiedene Proben zwar ziemlich verschiedene Werte für die »Leitfähigkeit« lieferten, dass aber die Änderungen derselben mit der Durchströmungsdauer und anderen Nebenumständen in qualitativ gleicher Weise erfolgten.

Die Versuchsanordnung war die folgende:

In einer von der zu untersuchenden Flüssigkeitsprobe erfüllten Porzellanschale lagen parallel und horizontal die beiden Elektroden, gebildet durch Messingscheiben von circa 66 *mm* Durchmesser, die durch drei dazwischen gelegte isolierende Plättchen (entweder Quarzstücke von 1 *mm* oder Glasstücke von 3·1 *mm* Dicke) getrennt waren. Die eine Elektrode

war über ein Galvanometer, eventuell über einen Kurzschluss der Galvanometerrolle dauernd zur Erde geleitet, die andere mit einem Punkte constanten Potentiales verbunden, das zwischen 0 und +300 Volt variiert und mittels eines Westonvoltmeters auf circa 1‰ genau gemessen werden konnte. Die Isolation der Quarz-, respective Glasplättchen erwies sich als unendlich groß im Vergleiche zu der des Toluols. Das verwendete Galvanometer war ein hochempfindliches D'Arsonval'sches von Siemens & Halske; sein innerer Widerstand betrug 10.000 Ω, die Schwingungen waren fast aperiodisch gedämpft, so dass beim Öffnen des die Galvanometerspule kurz schließenden Schlüssels die Einstellung in die neue Ruhelage in ungefähr 20 Secunden erfolgte; der Reductionsfactor betrug $5 \cdot 00 . 10^{-10}$ Ampère pro 1 *mm* einseitigen Ausschlages. Für einige Versuche wurde in die Zuführungen zu den Elektroden des zu messenden Widerstandes ein Commutator eingeschaltet, mittels dessen die Stromrichtung im Dielektricum umgekehrt werden konnte.

Was zunächt die Abnahme der Stromstärke mit der Durchströmungsdauer betrifft, so erhielt ich mit den Koller'schen übereinstimmende Resultate, wie aus den nachstehenden Tabellen hervorgeht, in denen einige charakteristische Versuchsreihen dargestellt sind.

Es bedeutet E die elektromotorische Kraft in Volt, d die Elektrodendistanz in Millimetern, t die Zeit in Minuten, vom Stromschlusse an gerechnet, i die beobachtete Stromstärke in 10^{-10} Ampère.

I. $E = 300\ V$, $d = 1$ *mm*.

t	i
0	—
0·75	545
1	480
1·5	440
2	410
2·5	390
3	375
4	348
5	330

II. $E = 200\ V$, $d = 1$ *mm*.

t	i
0	—
0·5	375
1	260
1·5	182
2	155
2·5	140
3	130
4	117
5	110

t	i	t	i
6	319	6	105
7	305	7	101
8	297	8	99
9	294	9	95
10	282	10	94
—	—	54	78

III. $E = 10\ V$, $d = 1\ mm$.

t	i
0	—
0·25	115
0·5	110
1	100
2	80
3	75
4	65
5	55
6	72
7	60
8	51
9	42
10	40

IV. $E = 5\ V$, $d = 3 \cdot 1\ mm$.

t	i
0	—
0·5	34
1	32
1·5	30
2	26
2·5	24
3	20
4	18
5	15
6	13
7	11
8	10
9	10
10	8
12	6
14	5

Man erkennt auch hier wieder, dass die percentuelle Abnahme der Stromstärke, also auch die ihr proportionale Abnahme der Leitfähigkeit, die ich kurz als »Ermüdung« des Dielektricums bezeichnen will, unmittelbar nach Stromschluss weit höhere Werte annimmt als später, ferner dass die »Ermüdung« umso mehr in den ersten Secunden erfolgt, je höher die angewendete elektromotorische Kraft ist, bei kleinerer elektromotorischen Kraft aber gleichmäßiger über einen längeren Zeitraum vertheilt ist, was bereits von Koller behauptet wurde. Häufig (wie z. B. in Versuchsreihe III) kam ein vorübergehendes Anwachsen der Stromstärke vor, was wohl auf zufällige Störungen zurückzuführen sein dürfte.

Wird nach längerer Durchströmungsdauer die elektromotorische Kraft plötzlich ausgeschaltet und die Anode mit der Erde verbunden, so ist ein Polarisationsstrom nicht sicher nachweisbar, jedenfalls übersteigt seine Größe nicht 2 bis $3.10^{-10} A$; eine durch Polarisation entstandene elektromotorische Gegenkraft beträgt somit höchstens ein Volt und kann weder die allmähliche Abnahme der Stromstärke, noch einige später erwähnte Erscheinungen erklären.

Wird die elektromotorische Kraft, nachdem sie einige Zeit ausgeschaltet war, wieder eingeschaltet, so ist in der Regel die Stromstärke größer als vorher, sinkt aber wieder auf den früheren Wert; auch diese Erscheinung ist bei Anwendung höherer Spannungen stärker ausgeprägt, bei niederen Spannungen oft nicht merkbar. Bereits Hertz[1] erwähnt diese Thatsache und fasst sie auf als das Resultat der Übereinanderlagerung der »rückstandsbildenden« und der »eigentlichen Strömung«. Da aber nach dem Obigen die den Rückstand liefernden Ströme galvanometrisch nicht messbar, also von anderer Größenordnung sind, muss man wohl schlechthin ein Wiederanwachsen der Leitfähigkeit, eine »Erholung« des Dielektricums in der stromlosen Periode annehmen, über deren Natur man sich die von der Theorie der Gasentladungen nahegelegten Vorstellungen bilden mag.

Zwei Beispiele für den Verlauf dieser Erscheinung geben die Tabellen V und VI.

V. $E = 300\ V,\ d = 1\ mm$.

t	*i*	*t*	*i*
0	—	7	320
0·25	365	10	306
1	340	[10—12;	$E = 0$]
2	325	12·3	345
3	315	13	325
5	309	15	307
[5—6;	$E = 0$]	[15—19;	$E = 0$]
6·25	332	19·3	362

[1] L. c.

t	i	t	i
20	330	[68—69;	$E = 0$]
26	286	69·3	65
[26—31;	$E = 0$]	73	61
31·3	362	[73—75;	$E = 0$]
32	315	75·3	68
36	278	77	64
[36—36·5;	$E = 0$]	[77—107;	$E = 0$]
36·8	290	107·3	82
37·5	265	120	66

VI. $E = 200\,V,\ d = 1\,mm.$

t	i
0	—
1	125
2	114
5	107
10	100
68	60

VII.

τ	$\frac{\Delta i}{i}$
$\tau = 0·5$	$= 4·3\%$
1	7·5
2	12·7
4	18
5	27

In Tabelle VII ist der Zusammenhang der durch die percentuelle Zunahme der Leitfähigkeit $\left(\frac{\Delta i}{i}\right)$ quantitativ festgesetzten »Erholung« mit der Dauer der Erholungsperiode (τ) auf Grund der Versuchsreihe V dargestellt. Es zeigt sich analog wie bei der »Ermüdung«, dass die »Erholung« hauptsächlich in der ersten Zeit stattfindet, später langsamer zunimmt.

Wird nach längerer Dauer des Stromes seine Richtung im Dielektricum umgekehrt, so erhält man zunächst eine bedeutend größere Stromstärke als in der ursprünglichen Richtung, zugleich ist aber die zeitliche Abnahme derselben eine noch raschere als bei einem noch gar nicht vom Strome durchflossenen Dielektricum. Bei beliebig oft wiederholtem Umschalten zeigt sich diese Erscheinung immer wieder; ähnlich wie die Phänomene der »Ermüdung« und »Erholung« ist übrigens auch dieses umso auffallender, je größer die angewandte elektromotorische Kraft ist.

Die Tabellen VIII und IX enthalten die Resultate zweier aus anderen herausgegriffenen Versuchsreihen. A und B

bezeichnen hiebei die beiden entgegengesetzten Stromrichtungen.

VIII. $E = 200$ V.

t		i
40	A	58
42	B	170
43	B	90
45	B	85
46	A	110

IX. $E = 100$ V.

t		i
0	A	77
11	A	41
12	B	107
16	B	60
17	A	115
22	A	47

Auch diese Erscheinung, die ja mit den Rückstandserscheinungen offenbar in nahem Zusammenhange steht, lässt sich aus den bereits erwähnten Gründen nicht einfach durch die Annahme erklären, dass zu einem gewöhnlichen Leitungsstrome ein Rückstandsstrom sich addiere. Vielmehr scheint hier ein Analogon zu der unipolaren Leitfähigkeit der Gase vorzuliegen; ein durch die längere Wirkung eines Stromes ermüdetes Dielektricum zeigt, wenn auch nicht ein streng unipolares Leitvermögen, wie Gase unter bestimmten Bedingungen, doch eine beträchtliche Verschiedenheit der Werte seines Leitvermögens für entgegengesetzte Stromrichtungen.

Die Erscheinungen der »Ermüdung« und »Erholung« erschweren die Aufstellung quantitativer Beziehungen zwischen elektromotorischer Kraft und Stromstärke. Je nach der Reihenfolge, in der man von niederen zu höheren Spannungen oder umgekehrt fortschreitet und der Zeit, durch welche man diese Spannungen wirken lässt, kann man daher ziemlich verschiedene Formen für diese Abhängigkeit finden. Immerhin ließ sich erkennen, dass die Werte, welche bei verschiedenen elektromotorischen Kräften die Stromstärken nach hinreichend langer Dauer nahezu constant beibehalten, nicht der elektromotorischen Kraft proportional sind, sondern hinter derselben zurückbleiben, was also ebenfalls mit Kollers Resultaten übereinstimmt.

Wenn die bisher besprochenen Eigenthümlichkeiten flüssiger Dielektrica in ihrem Verhalten beim Durchgange eines elektrischen Stromes wirklich in Analogie mit der Theorie der

Erscheinungen in ionisierten Gasen zu erklären sind, so müssen sich auch innerhalb eines durchströmten Dielektricums freie positive oder negative Ladungen nachweisen lassen. Dies ist mir mittels folgender Versuchsanordnung in der That gelungen.[1]

Zwei Zinkblechplatten vom Formate 9×6 *cm* standen in einem mit Toluol gefüllten Gefäße parallel und vertical in einer Distanz von 24 *mm*; die eine Platte war über das Galvanometer zur Erde abgeleitet, die andere blieb constant auf +300 Volt geladen; der zwischen den Platten übergehende Strom betrug $250-190 \,.\, 10^{-10}$ Ampère. Zwischen den beiden Platten war eine aus einem verticalen Platindrahte gebildete Sonde horizontal verschiebbar, deren Entfernung von den Elektroden auf 0·1 *mm* bestimmbar war, während ihr Potential an einem Exner'schen Elektroskope auf ± 1 Volt gemessen werden konnte. Die Resultate zweier Versuchsreihen sind in den Tabellen X und XI angegeben, wo x die Entfernung der Sonde von der Kathode in Millimetern, V ihr Potential in Volt bedeutet. Für V sind in XI die Mittelwerte aus je drei bei abwechselnder Verschiebungsrichtung der Sonde gewonnenen Werten eingesetzt, wobei die maximalen Abweichungen vom Mittel 2 Volt betrugen. Umstehende Textfigur stellt die Resultate graphisch dar.

X. $E = 300\ V,\ d = 24\ mm,$

$$\frac{E}{d} = 12 \cdot 5 \frac{V}{mm}.$$

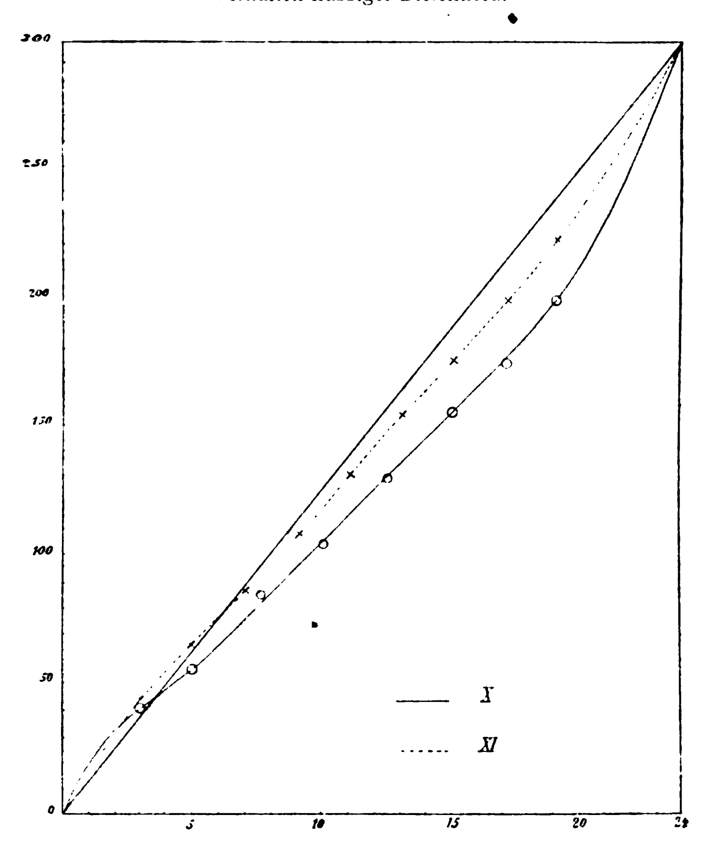
$x =$	$V =$
3	41
5	57
7·5	85
10	106
12·5	130
15	157
17	174
19	200

XI. $E = 300\ V,\ d = 24\ mm,$

$$\frac{E}{d} = 12 \cdot 5 \frac{V}{mm}.$$

$x =$	$V =$
3	43
5	66
7	88
9	110
11	132
13	156
15	177
17	200
19	222

[1] Herr Koller hat vor Jahren analoge Versuche mittels Tropfelektroden ausgeführt; über die Resultate derselben, die nicht publiciert wurden, konnte ich aber nichts näheres erfahren.



Es ist deutlich zu erkennen, dass die Potentialgradienten an den Elektroden erhöht, in der Mitte dagegen erniedrigt sind, dass also in der Nähe der Anode freie negative, in der Nähe der Kathode positive Ladungen angehäuft sind.

Auf Grund dieser Ergebnisse dürfte der Schluss gerechtfertigt sein, dass die Analogien im Verhalten ionisierter Gase und flüssiger Dielektrica keine zufälligen, sondern im Wesen des Entladungsvorganges begründet sind.

Über den Einfluss des Bindemittels auf den photochemischen Effect in Bromsilberemulsionen und die photochemische Induction

von

R. Abegg,

nach Versuchen mit

Cl. Immerwahr.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1900.)

Durch die wertvollen Untersuchungen von Luggin[1] und Luther[2] ist erwiesen worden, dass die dauernde Belichtung von Halogensilber zu chemischen Gleichgewichtszuständen führt, die für jede Lichtintensität durch ein bestimmtes Potential (Gasdruck, elektromotorisches Potential, Lösungsconcentration) des freiwerdenden Halogens definiert sind. Diese Gleichgewichtszustände werden nun aus zweierlei Gründen bei dem üblichen Negativprocesse nicht erreicht: 1. ist die gewöhnliche Belichtung viel zu kurz, um dies zu erzielen, 2. ist dem Halogen normalerweise nicht Gelegenheit geboten, sein Gleichgewichtspotential herzustellen, da es beim Freiwerden sich sofort *a)* durch Diffusion vertheilt und so sein der Belichtung ursprünglich entsprechendes Potential vermindert, *b)* durch etwaige chemische Bindung durch das Bindemittel ebenfalls an der Erreichung seines Gleichgewichtspotentials gehindert wird.

Die Empfindlichkeit einer Emulsion wird offenbar gemessen durch den photochemischen Effect, den eine gegebene Belichtung hervorbringt, und da die Grenzwirkung einer Belichtung

[1] Luggin, Zeitschrift physik. Chem., *23*, 577, 1897; Bihg. d. Schwed. Akad., *23*, I, Nr. 6, 1897; *25*, I, Nr. 1, 1899; Eders, Jahrb. 1898, 163.

[2] Luther, Zeitschrift physik. Chem., *30*, 628, 1899; Arch. wiss. Phot., *2*, 1900.

erreicht ist, sobald das Halogen sein Gleichgewichtspotential besitzt, so befördert den photochemischen Effect und damit die Lichtempfindlichkeit alles das, was das Halogenpotential unter den die Lichtwirkung aufhebenden Gleichgewichtswert erniedrigt.

Dass diese theoretischen Folgerungen durch die Erfahrung bestätigt werden, zeigt zunächst der Umstand, dass die Empfindlichkeit der Halogensilberpräparate steigt, je mehr die Schichtsubstanz zur chemischen Bindung von freiem Halogen neigt; so ist die leicht oxydierbare Gelatine ja dem chemisch gegen Halogen indifferenten Collodium weit als »chemischer Sensibilisator« überlegen, was von jeher in diesem Sinne gedeutet worden ist.

Der durch 1. erreichbare photochemische Effect, d. h. der Reductionszustand des Silberhaloids wird nun durch die unter 2. aufgeführten Einflüsse derart verändert, dass derselbe größer wird, weil das die Lichtwirkung hemmende freie Halogen auf ein niedrigeres Potential gebracht wird.

Wir wollen nunmehr überlegen, wie diese Einflüsse bei einer photochemischen Platte sich geltend machen können:

Wird ein in freier Luft befindliches Bromsilberkorn vom Lichte bestimmter Stärke getroffen, so spaltet es Brom ab, und dieses würde, in der Umgebung des Korns verbleibend, sehr schnell die weitere Lichtwirkung hindern, wenn nicht durch das Wegdiffundieren sehr schnell — abhängig von der Diffusionsgeschwindigkeit — diese Hemmung beseitigt und so die weitere Lichtwirkung ermöglicht würde.

Für ein in gleichen Bedingungen befindliches, aber von Gelatine eingehülltes Bromsilberkorn ändern sich die Verhältnisse in zweierlei Hinsicht; erstens nämlich wird das freiwerdende Brom durch die Gelatine gebunden, zweitens aber die Diffusion des in der betrachteten Zeit etwa noch nicht gebundenen Broms gegen die Diffusion in freier Luft erheblich verlangsamt, so dass ersterer Umstand im Sinne einer Vergrößerung, letzterer aber in dem einer Verringerung des photochemischen Effectes wirksam ist. Dass der erstere — vergrößernde — Einfluss erheblich überwiegt, ist durch die große Sensibilisationswirkung der Gelatine bewiesen, und es bleibt

nur die Frage offen, ob überhaupt der Einfluss einer Diffusionsbehinderung nachweisbar ist.

Dass dies der Fall ist, werden die sofort zu beschreibenden einfachen Versuche wahrscheinlich machen. Dadurch wird gleichzeitig dargethan, dass die chemische Bindung des Broms durch die Gelatine eine Zeit erfordert, welche im Vergleich zu der Bromabspaltung durch das Licht nicht zu vernachlässigen ist; denn wäre die Reactionsgeschwindigkeit zwischen Brom und Gelatine sehr groß gegen die des Lichtes auf Bromsilber, so würde jedes entstehende Brom-Atom von der Gelatine bereits chemisch absorbiert sein, ehe es die weitere Lichtreaction verhindern könnte; die durch Gelatine verminderte Diffusionsgeschwindigkeit würde daher keinerlei Einfluss äußern können.

Das einfachste Mittel, um die durch Gelatine ausgeübte Diffusionshemmung nachzuweisen, schien uns die vergleichende Belichtung zweier Platten zu liefern, deren eine das Glas, die andere die Schicht der Belichtungsquelle zuwandte. Um genau vergleichbare Verhältnisse zu haben, wurde eine Platte — da deren Schicht die größte Sicherheit bezüglich gleichmäßiger Empfindlichkeit gewährte — des Formates $9 \times 18\ cm^2$ in zwei Theile $9 \times 9\ cm^2$ zerschnitten und in einem Stereoskopapparat[1] auf eine hellbeleuchtete Wand derart exponiert, dass in der Cassette von den nebeneinander liegenden Plattenhälften die eine mit der Schicht, die andere mit dem Glase dem Objective zugekehrt war. Damit die letztere wegen der Lichtabsorption im Glase der Platte nicht benachtheiligt würde, wurde in die Camera in einiger Entfernung vor der Platte eine klare Glasplatte eingeschaltet, so dass die in beiden Hälften auf die Emulsion wirkenden Lichtstärken völlig gleich waren. Es zeigte sich übrigens, dass die Lichtabsorption in der Glasplatte keine merkliche Schwächung des photochemischen Effectes verursachte.

Die Verschiedenheit der Wirkungsbedingungen des Lichtes von der Schichtseite und von der Glasseite sind offenbar die folgenden: Die größte und deshalb wesentlich wirksame Lichtfntensität — nämlich die durch Absorption innerhalb der Emul-

[1] Siehe Abegg, Arch. wiss. Phot., *1*, 115, 1899.

sionsschicht noch nicht geschwächte — herrscht in einem Fall in der Schichtebene, die an Luft, im anderen in der, die an Glas grenzt. An der Luftgrenze findet das freiwerdende Halogen günstigste Gelegenheit, sich unmittelbar in die Luft zu verbreiten, d. h. sein Potential zu erniedrigen, an der Glasgrenze dagegen hindert einerseits das Glas völlig ein Fortdiffundieren des Halogens aus der Schicht, und in der entgegengesetzten Richtung wird die Diffusion durch die gesammte Dicke der Gelatineschicht erheblich gehemmt. Diese Hemmung nimmt beim Vordringen des Lichtes von der Glasgrenze der Schicht nach der dahinter liegenden Luftgrenze allmählich ab, der photochemische Effect könnte daher steigen, wenn nicht die Lichtintensität durch die Absorption in der Schicht gleichzeitig geringer würde.

Nach diesen Überlegungen lässt sich nunmehr Folgendes voraussagen: Bei der Belichtung der Schicht von der Luftgrenze her wird der photochemische Effect wesentlich in dieser Grenzschicht localisiert sein, da sich dem durch Absorption geschwächten Lichte in den tieferen Lagen der Schicht wegen der immer mehr erschwerten Diffusion immer mehr Halogen entgegenstemmt.

Bei der Belichtung von der Glasseite her wird der photochemische Effect sich mehr durch die ganze Schicht vertheilen, da die Lichtschwächung durch Absorption zum Theile durch die nach der Luftgrenze zu wachsende Leichtigkeit der Halogendiffusion compensiert wird. Dagegen wird der Gesammteffect bei dieser Belichtungsart wesentlich geringer sein, weil die Lichtwirkung an der Glasgrenze einen viel erheblicheren Halogenwiderstand findet als an der diffusionsbegünstigten Luftgrenze. Genau diesen Erwartungen entsprechen die Versuche: Die von der Glasseite belichteten Platten zeigten — in sehr langsam wirkendem Entwickler gleichzeitig und gleichlange mit der anderen Plattenhälfte hervorgerufen — ein erheblich schwächeres Bild, welches auf der Glasseite und der Oberfläche der Schicht ziemlich gleichzeitig erscheint und gleichmäßig anwächst, während das Bild auf der normal exponierten Platte schneller und kräftiger auf der Schichtoberfläche erschien und erst langsam nach der Glasseite durchschlug. Die mikroskopische

Prüfung zweier genau entsprechender Stellen eines solchen Plattenpaares ergab die Kornzahlen:

Belichtung	Körner pro Quadratmillimeter
Von der Glasseite	325.000
Von der Luftgrenze	410.000

Die Auszählung geschah mit Ölimmersion $^1/_{12}$ und Ocular-Netzmikrometer. Die Kornvertheilung in die Tiefe war mittels der Mikrometerschraube des Mikroskops leicht zu verfolgen: es ergab sich dasselbe, was aus dem Augenschein bei der Entwickelung schon zu schließen war, dass nämlich bei der Glasseitenbelichtung die Körner in allen Schichttiefen gleichmäßig vertheilt waren, während sie bei der gewöhnlich exponierten Platte fast nur in einer Ebene, der Oberfläche der Schicht liegen, da alle Körner ohne Verstellung des Mikrometers auf einmal scharf zu sehen waren. Der Unterschied ist unverkennbar.

Ein Gegenversuch durch Auflegen von Glimmerplättchen auf Platten, die von der Schicht aus in gewöhnlicher Weise exponiert wurden, zeigte, dass die lose Berührung nicht ausreichend ist, um die Halogendiffusion aus der Schicht heraus wirksam zu verhindern; die minimale freiwerdende Halogenmenge (siehe Luggin, Eders Jahrbuch l. c.) findet also genügend Raum, sich merklich auszubreiten, wenn die diffusionshindernde Wand nicht in directester Berührung mit der Schicht ist.

Man könnte gegen die Beweiskraft der Versuche vielleicht einwenden, dass die schwächere Entwickelung des gleichzeitig exponierten Bildes davon herrührt, dass hier der Entwickler bis zu der Ebene, wo der hauptsächlichste Theil des latenten Bildes liegt, erst die gesammte Schicht durchdringen muss, dass also die Entwickelung hier später beginnt als da, wo das latente Bild auf der freien Oberfläche der Schicht liegt und wo der Entwickler sofort zu wirken beginnt. Wir haben dies Bedenken

dadurch zu vermeiden gesucht, dass wir sehr verdünnten, langsam wirkenden Entwickler (Standentwickelung) verwendeten, so dass die Entwickelungszeit groß genug wird, um daneben die Durchdringungszeit der Schicht und die Zeit der Nachdiffusion von frischer Entwickelungssubstanz vernachlässigen zu dürfen.[1] Es zeigte sich in der That, dass bei schneller Entwickelung die Differenzen der Platten noch größer ausfielen.

Der Vergleich der normalen und der glasseitigen Belichtung ließe sich exakter gestalten, wenn man die Plattenschicht der glasseitig belichteten Hälfte abziehen, umgekehrt auf Glas bringen und dann erst entwickeln würde, so dass der Entwickler in beiden Fällen in der Ebene maximaler Belichtung gleichzeitig angreift; doch konnte angesichts der vorliegenden Ergebnisse vorläufig auf die Ausführung dieses Versuches verzichtet werden.

Von Wichtigkeit ist schließlich der Einfluss der Belichtungsdauer auf das soeben beschriebene Phänomen; auch dieser lässt sich durch eine einfache Überlegung ableiten: Die Diffusion des Halogens ist ein Zeitvorgang, und wird deshalb um so mehr Platz greifen, je längere Zeit die Lichtreaction beansprucht. Umgekehrt also wird eine Diffusionsverhinderung um so deutlicher werden, je kürzer die Belichtung ist, je geringer damit die Möglichkeit des Ausgleichs von Diffusionsverschiedenheiten während der Belichtung ist.

Dem entspricht in der That, dass bei längeren Belichtungen (durch eine schwächere Lichtquelle) die bei »Moment«-Belichtung sehr starken Unterschiede der normalen und glasseitigen Belichtung undeutlich werden. Bei einer $^1/_2$ Minute langen Belichtung waren die Unterschiede in der Dichte des entwickelten Bildes in der That kaum noch zu constatieren.

Diese Beobachtung ist gleichzeitig eine Erklärung für die erheblichen Unterschiede des photochemischen Effectes, die von Abney[2] und neuerdings von Englisch[3] zwischen continuierlicher und intermittierender Belichtung (bei in Summa

---

1 Vergl. Luther, Chem. Vorgänge der Photographie, S. 64 ff. Halle, 1899.
2 Abney, Eders Jahrb., 1894, 374, ref. nach »Photography«, 1843, 682.
3 Englisch, Arch. wiss. Phot., *1*, 117, 1899.

gleichen Zeiten) constatiert worden sind: Bei continuierlicher Belichtung findet das im ersten Moment freiwerdende Halogen während des Fortganges der Belichtung Gelegenheit, fortzudiffundieren, da die gleichmäßige Nachentwickelung von Halogen ein stationäres Diffusionsgefälle erzeugen muss. Bei intermittierender Bestrahlung findet in der Pause nach einem kurzen Belichtungsmoment das noch nicht durch Diffusion und Reaction mit der Gelatine beseitigte Halogen Gelegenheit, sich wieder mit dem Lichtreductionsproducte zu vereinigen und so einen Theil der Lichtwirkung wieder rückgängig zu machen. Auch dass die Länge der Pausen den photochemischen Effect, wie von genannten Forschern gefunden, verringert, ergibt sich aus der beschränkten Reactionsgeschwindigkeit der Lichtreactionsproducte, und man muss danach vermuthen, dass eine Verlängerung der Belichtungspausen den photochemischen Effect nicht unbeschränkt, sondern nur bis zu einem Minimalbetrag herabdrücken kann. Umgekehrt müssen, wie ebenfalls durch die Erfahrung bestätigt wird, bei starken Belichtungsintensitäten, wo die Drucke des freiwerdenden Halogens relativ groß werden, die Diffusionsgeschwindigkeiten wachsen, so dass während der Belichtungspausen die Rückbildung geringfügiger wird. Und auch bei unseren Versuchen ergaben sich bei Überexposition keine merklichen Unterschiede mehr zwischen glasseitiger und gewöhnlicher Belichtung.

Die angeführten Überlegungen sind offenbar nichts anderes als eine Deutung der photochemischen Induction von Halogensilberemulsionen. Die Berechtigung dieser Anschauungen erscheint durch die mitgetheilten Versuche ausreichend dargelegt zu sein, doch soll versucht werden, durch geeignete Überkleidung photographischer Schichten das Phänomen der Halogendiffusionshinderung noch ausführlicher zu beweisen, sowie die noch nicht völlig ausgeschlossene Fehlerquelle einer etwaigen verschiedenen Wirksamkeit des Entwicklers (siehe S. 978, 979) gänzlich auszuschließen.

Über die specifische Wärme von Lösungen

von

Karl Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1900.)

Aus Anlass einer theoretischen Untersuchung über die specifische Wärme fester und flüssiger Verbindungen stellte ich mir vor einiger Zeit die Frage, ob es nicht unter gewissen Bedingungen möglich wäre, die specifische Wärme einer in Wasser gelösten, im freien Zustande festen oder flüssigen Substanz aus der beobachteten specifischen Wärme der bezüglichen Lösung zu ermitteln. Als ich hierüber die betreffenden Angaben in den »physikalisch-chemischen Tabellen« von Landolt und Börnstein zurathe zog, fand ich bei den dort angeführten Lösungen fast ohne Ausnahme die specifische Wärme bedeutend kleiner, als sie sein müsste, wenn darin die specifische Wärme des Wassers und jene der gelösten Substanz dieselben wie im freien Zustande wären, und insbesondere ergab sich meiner Erwartung entgegen, dass, wenn man aus der specifischen Wärme einer verdünnten Lösung, diejenige des Wassers $= 1$ setzend, die specifische Wärme der gelösten Substanz sucht, der resultierende Wert derselben mit zunehmender Verdünnung immer kleiner ausfällt und schließlich, soweit die Versuche reichen, immer stärker negativ wird.

Diese letztere Thatsache ist nun zwar, wie ich seither fand, schon früher von anderer Seite erkannt worden; man hat aber meines Erachtens bisher dieselbe nicht ihrer Bedeutung entsprechend hervorgehoben. Da die specifische Wärme einer Substanz nicht negativ sein kann, erscheint es für alle das erwähnte Verhalten zeigenden Lösungen (sie sind sämmtlich elektrolytische) zweifellos erwiesen, dass in denselben die specifische Wärme des Wassers nicht ihre normale

Größe $= 1$ hat, sondern jedenfalls mehr oder minder bedeutend unter diesen Wert herabgemindert sein muss; es ist daher möglich, dass eine in Wasser gelöste elektrolytische Substanz hiebei die gleiche specifische Wärme wie im freien Zustande besitzt, und dass die specifische Wärme der Lösung nur durch die entsprechende Verminderung der specifischen Wärme ihres Wassers den relativ kleinen Wert bekommt, welchen die Beobachtung ergibt.

Da die Auflösung einer fremden Substanz in Wasser gewöhnlich von einer geringen Contraction des Gesammtvolumens begleitet ist, so könnte man vielleicht vermuthen, dass dann die Verminderung der specifischen Wärme des lösenden Wassers einfach von dessen Verdichtung herrühren könne. Dies ist aber, wie ich glaube, aus folgendem Grunde nicht annehmbar.

Wenn das Volumen v der Gewichtseinheit Wasser bei constanter Temperatur durch Abnahme des äußeren Druckes sich um die sehr kleine Größe dv ausdehnt, so muss die darin enthaltene Wärmemenge w durch Fortschiebung des äußeren und des inneren Druckes, deren Summe r heiße, die Arbeit rdv leisten; enthält dann das Wasser bei dem Volumen $v+dv$ die Wärmemenge $w+dw$, so hat dasselbe im ganzen die Wärmemenge

$$\frac{rdv}{A}+dw,$$

wo A das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit ist, von außen aufnehmen müssen. Für das Maximum der Dichte verschwindet diese Wärmemenge bekanntlich, und es ist somit dann

$$\frac{r}{A}+\frac{dw}{dv}=0;$$

da r positiv ist, folgt hieraus, dass der Quotient $\frac{dw}{dv}$ für das Wasser einen negativen Wert hat, und da man, wenn s die specifische Wärme und T die absolute Temperatur bedeutet, wenigstens angenähert $w = sT$ setzen kann, so ist auch $\frac{ds}{dv}$ negativ, d. h. die specifische Wärme des Wassers wird durch

eine Verminderung seines Volumens nicht kleiner, sondern größer. Die erwähnte Vermuthung erscheint daher ausgeschlossen.

Eine annehmbare Erklärung der anomalen Kleinheit der specifischen Wärme verdünnter Lösungen als Folge einer Verminderung der specifischen Wärme des Lösungswassers scheint sich mir aus nachstehender Überlegung zu ergeben.

Bedeutet c die specifische Wärme einer Verbindung (oder Lösung), Σ die Summe der Äquivalentgewichte ihrer Bestandtheile und W die Summe der bezüglichen Äquivalentwärmen, so ist allgemein

$$W = c\Sigma.$$

Für das Wasser ist $c = 1$ und $\Sigma = 18$, daher die Wärmesumme $W = 18$; man kann also annehmen, dass hier die beiden Elemente H und O die Äquivalentwärme 6 haben. Für das Eis mit der specifischen Wärme 0·5 ist $W = 9$; hier haben beide Elemente die Äquivalentwärme 3. Auch in den festen Hydraten ist die der Wassermenge 18 entsprechende Wärmesumme, wie im Eise, $= 9$.

Überhaupt lässt sich zeigen, dass die Elemente H und O nicht bloß in festen, sondern auch in flüssigen Verbindungen sehr gewöhnlich mit der Äquivalentwärme 3 vorkommen.

Eine feste Verbindung dieser Art ist die Oxalsäure $C_2H_2O_4 + 2H_2O = 126$. Nimmt man an, dass jedes ihrer Elemente die Äquivalentwärme 3 habe, so wird $W = 42$, und es berechnet sich die specifische Wärme

$$c = \frac{42}{126} = 0 \cdot 333;$$

da dieser Wert mit dem beobachteten $= 0 \cdot 336$ gut übereinstimmt, erscheint die gemachte Annahme thatsächlich bestätigt.

Unter den flüssigen Verbindungen nenne ich diesbezüglich den Methylalkohol $CH_4O = 32$. Gibt man hier jedem Elemente die Äquivalentwärme 3, so wird $W = 18$ und man erhält die specifische Wärme

$$c = \frac{18}{32} = 0 \cdot 562,$$

welcher Wert dem beobachteten $= 0 \cdot 590$ befriedigend nahe kommt. Auch das Aceton $C_3H_6O_3 = 90$ und die Buttersäure $C_4H_8O_2 = 88$ sind solche Flüssigkeiten, deren specifische Wärmen, beziehungsweise $0 \cdot 412$ und $0 \cdot 503$, sich genügend erklären, wenn man jedem ihrer Elemente die Äquivalentwärme 3 beilegt.

Das flüssige Ammoniak $NH_3 = 17$ hat nach Lüdeking und Star die specifische Wärme $c = 0 \cdot 885$, woraus nahe $W = 15$ folgt. Da der Stickstoff gewöhnlich die normale Äquivalentwärme 6 hat, entspricht hiernach dem Wasserstoff die Äquivalentwärme 3.

Für das Schwefelsäurehydrat $H_2O + SO_3 = 98$ folgt aus $c = 0 \cdot 336$ angenähert $W = 33$, wovon auf SO_3 der Antheil 15 entfällt; da der flüssige Schwefel sich normal verhält, resultiert für den Sauerstoff der wasserfreien Schwefelsäure die Äquivalentwärme 3.

Wenn es bereits nach den hier angeführten Belegen kaum einem Zweifel unterliegt, dass die Elemente H und O die Fähigkeit haben, wie im Eise, ebenso in flüssigen Verbindungen sich die Äquivalentwärme 3 und also die Hälfte der ihnen im Wasser zukommenden anzueignen, so wird man auch keine besondere Schwierigkeit in der Annahme finden, dass das Wasser unter chemischer Einwirkung, ohne die flüssige Form zu verlieren, die Summe der Äquivalentwärmen seiner Elemente von 18 auf 9 und somit seine normale specifische Wärme auf deren Hälfte $= 0 \cdot 5$ reducieren könne. Das Wasser gienge dabei durch chemischen Zwang in eine Modification über, welche sich vom festen Eise nur durch den flüssigen Zustand unterschiede und für sich allein nicht bestandfähig wäre.

Man denke sich jetzt eine verdünnte Lösung, beispielsweise von Kaliumhydroxyd KHO, deren specifische Wärme in den Tabellen von Landolt und Börnstein gegeben ist. In der hinreichend wasserhaltigen Lösung bilde die Substanzmenge KHO mit der partialen Wassermenge nH_2O, wo n eine ganze Zahl sei, das Hydrat $KHO + nH_2O$, wo das Wasser die specifische Wärme $0 \cdot 5$ habe. Nimmt man die Summe der Äquivalentwärmen von KHO als bekannt an, so kennt man

auch die Wärmesumme, sie heiße W', welche die Lösung enthalten müsste, wenn alles Wasser derselben normal wäre, aus den Tabellen aber entnimmt man die specifische Wärme der Lösung und sohin die Wärmesumme W, die sie wirklich enthält. Zieht man nun die letztere Summe von der ersteren ab, so bekommt man den Wärmeverlust $W'-W$, welchen die Lösung durch die angenommene Hydratbildung erlitten hat. Nach dem Gesagten ist klar, dass dieser Verlust $= n\frac{H_2O}{2} = 9n$ und also ein ganzes Multiplum von 9 sein muss. Dieser Fall kommt in der That mit auffallend guter Annäherung häufig vor. Folgende, den Tabellen entnommene Lösungen mögen dafür als Beispiele dienen.

Die Lösung $KHO+30H_2O$ hat nach Thomsen die specifische Wärme $c = 0{\cdot}876$, woraus, da $\Sigma = 596$ ist,

$$W = 0{\cdot}876 \times 596 = 522{\cdot}1$$

folgt. Die Summe der Äquivalentwärmen von KHO ist nicht direct bekannt; da aber sowohl für H_2O, als auch nach den bezüglichen Salzen für K_2O dieselbe $= 18$ ist, halte ich es für wahrscheinlich, dass die gleiche Summe auch dem Complexe KHO zukomme. Dann ist $W' = 558$, und man findet

$$W'-W = 558-522{\cdot}1 = 35{\cdot}9;$$

der Wärmeverlust durch Hydratbildung ist also nahezu $= 36 = 4\times 9$, der Annahme entsprechend, dass die Lösung das Hydrat $KHO+4H_2O$ enthält, dessen Wasser die specifische Wärme $0{\cdot}5$ hat.

Die specifische Wärme des ganzen Lösungswassers ist hiernach

$$\frac{540-36}{540} = 0{\cdot}933,$$

und für die Lösung selbst berechnet sich die specifische Wärme

$$c = \frac{558-36}{596} = 0{\cdot}876;$$

mit dem beobachteten Werte zusammenfallend.

Die Lösung $KHO+200\,H_2O = 3656$ hat nach demselben Beobachter die specifische Wärme $0\cdot975$; für dieselbe ist somit

$$W = 0\cdot975 \times 3656 = 3564\cdot6,$$

während $W' = 3618$ ist, und hieraus folgt der Wärmeverlust

$$W' - W = 3618 - 3564\cdot6 = 53\cdot4,$$

also nahe $= 54 = 6 \times 9$. Die Lösung enthält daher das Hydrat $KHO+6\,H_2O$, worin die specifische Wärme des Wassers auf $0\cdot5$ reduciert ist. Nach dieser Annahme hat die Lösung die specifische Wärme

$$c = \frac{3618-54}{3656} = 0\cdot975,$$

mit dem Beobachtungswerte übereinstimmend.

Die Jodkaliumlösung $KJ+25\,H_2O = 616$ hat nach Marignac die specifische Wärme $0\cdot715$, woraus

$$W = 0\cdot715 \times 616 = 440\cdot4$$

folgt. Verflüssigtes Jod besitzt die Äquivalentwärme 12; nimmt man an, dass demselben in wässerigen Lösungen die gleiche Äquivalentwärme zukomme, so entfällt auf KJ die Wärmesumme 18, und es wird $W' = 468$. Demnach ist

$$W' - W = 468 - 440\cdot4 = 27\cdot6,$$

nahe $= 27 = 3 \times 9$; die Lösung enthält also das Hydrat $KJ+3\,H_2O$, worin das Wasser die specifische Wärme $0\cdot5$ hat. Die hieraus für die Lösung berechnete specifische Wärme

$$c = \frac{468-27}{616} = 0\cdot715$$

fällt mit ihrem beobachteten Werte zusammen.

Die Jodnatriumlösung $NaJ+25\,H_2O = 600$ hat nach Marignac die specifische Wärme $0\cdot749$, womit man $W = 449\cdot4$ findet. Da $W' = 468$ ist, ergibt sich

$$W' - W = 468 - 449\cdot4 = 18\cdot6,$$

nahe $= 18 = 2 \times 9$; in dieser Lösung ist also die Menge des auf die bezeichnete Weise modificierten Hydratwassers $= 2\,H_2O$. Hieraus folgt die specifische Wärme

$$c = \frac{468-18}{600} = 0{\cdot}750,$$

mit dem beobachteten Werte so gut wie identisch.

Die Berylliumsulfatlösung $BeSO_4 + 25\,H_2O = 555$ hat nach dem vorgenannten Beobachter die specifische Wärme 0·828, womit $W = 459{\cdot}5$ wird. Da für Sulfate dieser Form die Summe der Äquivalentwärmen $= 27$ ist, so folgt $W' = 477$, und man hat

$$W' - W = 477 - 459{\cdot}5 = 17{\cdot}5,$$

nahe $= 18 = 2 \times 9$; die Menge des modificierten Hydratwassers ist daher $= 2\,H_2O$.

Die Nickelsulfatlösung $NiSO_4 + 25\,H_2O = 1055$ hat die specifische Wärme 0·837; hieraus folgt $W = 883{\cdot}0$, und da nach obiger Bemerkung $W' = 927$ ist, so ergibt sich

$$W' - W = 927 - 883 = 44,$$

nahe $= 45 = 5 \times 9$, wonach in dieser Lösung die modificierte Wassermenge $= 5\,H_2O$ ist.

Die Natriumnitratlösung $NaNO_3 + 25\,H_2O = 535$ hat die specifische Wärme 0·870, woraus $W = 465{\cdot}4$ folgt. Da in den Nitraten dem Complexe NO_3 die Wärmesumme 18 zukommt, so ist $W' = 474$, und es wird

$$W' - W = 474 - 465{\cdot}4 = 8{\cdot}6,$$

nahe $= 9$; die modificierte Wassermenge ist daher $= H_2O$.

Die Mangannitratlösung $MnN_2O_6 + 50\,H_2O = 1079$ hat die specifische Wärme 0·832 mit $W = 897{\cdot}7$. Da $W' = 942$ ist, so folgt

$$W' - W = 942 - 897{\cdot}7 = 44{\cdot}3,$$

nahe $= 45 = 5 \times 9$, wonach die modificierte Wassermenge $= 5\,H_2O$ ist. Für die Lösung $MnN_2O_6 + 200\,H_2O = 3779$ mit der specifischen Wärme 0·947 findet man durch ähnliche Rechnung die modificierte Wassermenge $= 7\,H_2O$.

Die Schwefelsäurelösung $H_2SO_4 + 200\,H_2O = 3698$ hat die specifische Wärme $0\cdot975$, entsprechend $W = 3605\cdot5$. Da für dieselbe $W' = 3633$ ist, hat man

$$W' - W = 3633 - 3605\cdot5 = 27\cdot5,$$

nahe $= 27 = 3 \times 9$; die Lösung enthält also das Hydrat $H_2SO_4 + 3\,H_2O$, worin die Wassermenge $3\,H_2O$ die specifische Wärme $0\cdot5$ hat.

In den bisher betrachteten Lösungen entspricht der durch ihre chemische Formel ausgedrückten Menge der gelösten Substanz eine modificierte Wassermenge $= n\,H_2O$, wo n eine einfache ganze Zahl ist. Denken wir uns jetzt eine Lösung, in welcher die derselben Menge gelöster Substanz entsprechende modificierte Wassermenge $= \frac{n}{2}\,H_2O$ sei. Man sieht, dass der Wärmeverlust, welchen die Lösung dann erfahren musste, indem darin diese Wassermenge ihre specifische Wärme von 1 auf $0\cdot5$ reducierte, $= \frac{9n}{2}$ und also ein ganzes Multiplum von $4\cdot5$ sein muss. Von den vielen Lösungen, welche speciell dieser Bedingung entsprechen, seien hier die folgenden angeführt.

Für die Natriumhydroxydlösung $NaHO + 7\cdot5\,H_2O = 175$ ist nach Thomsen die specifische Wärme $c = 0\cdot847$ und folglich $W = 148\cdot2$. Nimmt man für NaHO, analog mit KHO, die Summe der Äquivalentwärmen $= 18$, so wird $W' = 153$ und daher

$$W' - W = 153 - 148\cdot2 = 4\cdot8,$$

nahe $= 4\cdot5$; in dieser Lösung ist also die Wassermenge, deren specifische Wärme auf die Hälfte reduciert ist, $= 0\cdot5\,H_2O$.

Für die verdünntere Lösung $NaHO + 50\,H_2O = 940$ ist $c = 0\cdot942$ und daher $W = 885\cdot5$. Da hier $W' = 918$ ist, so folgt

$$W' - W = 918 - 885\cdot5 = 32\cdot5,$$

nahe $= 31\cdot5 = 7 \times 4\cdot5$, wonach die Menge des modificierten Hydratwassers $= 3\cdot5\,H_2O$ ist.

Für die noch mehr verdünnte Lösung $NaHO+100\,H_2O = 1840$ ist $c = 0\cdot983$ und $W = 1808\cdot7$, während $W' = 1818$ ist; man hat also

$$W'-W = 1818-1808\cdot7 = 9\cdot3,$$

nahe $= 9$, einer modificierten Wassermenge $= H_2O$ entsprechend, welche somit hier kleiner ist als in der vorigen Lösung. Nach diesem merkwürdigen Verhalten zu schließen, nimmt in Lösungen mit ihrer Verdünnung die Menge des modificierten Hydratwassers nicht fortwährend, sondern nur bis zu einem Maximum zu, welches bei der in Rede stehenden Lösung schon überschritten ist. Es scheint sonach, dass in äußerst verdünnten Lösungen eine Hydratbildung gar nicht mehr vorkommen würde.

Für die Jodkaliumlösung $KJ+200\,H_2O = 3766$ ist nach Marignac $c = 0\cdot950$ und folglich $W = 3577\cdot7$. Da nach der obigen, die Äquivalentwärme des flüssigen Jod betreffenden Bemerkung $W' = 3618$ ist, so wird

$$W'-W = 3618-3577\cdot7 = 40\cdot3,$$

nahe $= 40\cdot5 = 9\times4\cdot5$, einer modificierten Wassermenge $= 4\cdot5\,H_2O$ entsprechend.

Für die Magnesiumsulfatlösung $MgSO_4+200\,H_2O = 3720$ ist nach Thomsen $c = 0\cdot952$ und somit $W = 3541\cdot4$. Da für dieselbe $W' = 3627$ ist, so folgt

$$W'-W = 3627-3541\cdot4 = 85\cdot6,$$

nahe $= 85 = 19\times4\cdot5$, was einer modificierten Wassermenge $= 9\cdot5\,H_2O$ entspricht.

Für die Magnesiumnitratlösung $MgN_2O_6+200\,H_2O = 3748$ ist nach Marignac $c = 0\cdot954$ und $W = 3575\cdot6$, ferner $W' = 3642$; man hat also

$$W'-W = 3642-3575\cdot6 = 66\cdot4,$$

nahe $= 67\cdot5 = 15\times4\cdot5$, wonach die modificierte Wassermenge $= 7\cdot5\,H_2O$ ist.

Man kann sich übrigens auf die oben angedeutete Weise auch leicht überzeugen, dass die Übereinstimmung zwischen

der aus der angenommenen Hydratbildung sich ergebenden und der beobachteten specifischen Wärme bei allen vorstehend erwähnten Lösungen, wo dies nicht ausdrücklich bemerkt wurde, eine so gut wie vollkommene ist. Ich glaube, dass diese durchgängige Coincidenz sowohl für die Anwendbarkeit der Hypothese als auch für die Genauigkeit der benutzten Versuchswerte spricht.

Nach der Gesammtheit der in den Tabellen zusammengestellten Versuche nimmt in hinreichend verdünnten Lösungen die Menge des Hydratwassers, dessen specifische Wärme durch chemischen Einfluss auf die Hälfte reduciert ist, im allgemeinen zwar mit der Verdünnung auch selbst, aber viel langsamer als diese zu, und es nähert sich demgemäß dabei die specifische Wärme der ganzen Wassermenge der Lösung jedesmal schließlich dem Grenzwerte 1. Umgekehrt kann es für eine Lösung thatsächlich eine schwache Verdünnung geben, bei welcher jenes modificierte Hydratwasser völlig verschwindet und somit die specifische Wärme des ganzen Lösungswassers normal $= 1$ wird; dieselbe muss dann offenbar bei einer gewissen Verdünnung ein Minimum haben, und wenn ihr Abfall zu diesem Minimum stark genug ist, muss auch die specifische Wärme der Lösung ein solches zeigen. Das diesbezügliche Minimum nun ist für die Lösungen von NaHO bei den hier vorkommenden schwachen Verdünnungen unmittelbar aus den Tabellen ersichtlich; dasselbe liegt der oben angeführten (22·9 procentigen) Lösung $NaHO + 7 \cdot 5\, H_2O$ jedenfalls nahe. Eine 25·6 procentige Lösung derselben Substanz hat nach Hammerl die specifische Wärme 0·869, woraus folgt, dass dabei die specifische Wärme des Wassers nicht erheblich von der Einheit abweichen kann; da nun, wenn dies der Fall ist, die specifische Wärme der Lösung mit der Verdünnung zunimmt, so muss dieselbe, bevor sie bei entsprechend stärkerer Verdünnung ihr Minimum erreicht, zuerst durch ein Maximum gehen. Ein solcher Verlauf ist hier aus den Tabellen wirklich zu entnehmen. Da bei der schwach verdünnten Natriumnitratlösung $NaNO_3 + 10\, H_2O$ mit der specifischen Wärme $c = 0 \cdot 769$ diejenige ihres Wassers sich normal ergibt, so könnte man auch in diesem Falle bei zunehmender Verdünnung ein Maximum und ein Minimum von c erwarten,

welche beide in dem Intervalle zwischen der genannten und der nächst untersuchten verdünnteren Lösung $NaNO_3 + 25 H_2O$ eintreten müssten.

Schließlich ist noch Folgendes zu bemerken. Die Fälle, wo in verdünnten Lösungen die Differenz $W' - W$ nach ihrer obigen Bedeutung den vorliegenden Versuchen zufolge verhältnismäßig nahe ein ganzes Multiplum von 9 oder von 4·5 ist, sind so überwiegend zahlreich, dass es scheint, es würden, wenn die Beobachtungswerte immer hinreichend genau wären, andere als solche gut entsprechende Fälle überhaupt nicht vorkommen. Wenn diese Vermuthung richtig ist, dann wird für eine Lösung, deren Verdünnung man zwischen weiten Grenzen continuierlich ändert, jene Differenz nicht continuierlich, sondern nur bei gewissen Verdünnungsgraden, also periodisch und sprungweise, und zwar nach ganzen Multiplen von 4·5 an Größe wechseln; eine den Gang der specifischen Wärme c der Lösung darstellende Curve wird daher in ihrem sonst regelmäßigen, der Formel $W = c\Sigma$ entsprechenden Verlaufe bei gewissen Punkten, wo W sich sprungweise ändert, einen Knick zeigen. Ob in der bezüglichen Curve solche mehrfach aufeinander folgende Knicke wirklich vorkommen würden, lassen die in den Tabellen enthaltenen, nur einige durch weite Zwischenräume getrennte Verdünnungsgrade betreffenden Angaben natürlich nicht erkennen. Systematische, mit Rücksicht auf diese Frage angestellte Versuche würden darüber entscheiden können.

Auf Grund der eigenartigen Ergebnisse, zu denen die vorstehende Betrachtung in Kürze geführt hat, scheint es mir, dass die aufgestellte Erklärung der specifischen Wärme verdünnter Lösungen, welches Erscheinungsgebiet theoretisch bisher kaum berührt ist, von Seite der Chemiker und Physiker erwogen zu werden verdienen könnte.

Über die Unsichtbarkeit von Kometen für den Äquator und für höhere geographische Breiten

von

Dr. J. Holetschek.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1900.)

Diese Abhandlung ist die sechste meiner Untersuchungen über die Bahnen solcher Kometen, die während ihrer Erscheinung für die Erde eine besondere Stellung zur Sonne eingenommen und infolge dessen zur Häufigkeit oder Seltenheit von Kometen mit gewissen Bahnelementen oder anderen Bahneigenthümlichkeiten beigetragen haben,[1] und bildet der Hauptsache nach eine Ergänzung und Erweiterung der zweiten dieser Abhandlungen, in welcher ich eine Beziehung zwischen der heliocentrischen Perihellänge und der Perihelzeit der Kometen dargelegt und dieselbe zu dem Nachweis benützt habe, dass die Tendenz der Perihelpunkte der Kometen, sich in den heliocentrischen Längen bei 90° und 270° dichter als an anderen Stellen anzusammeln, durch den Stand der meisten Beobachter unter höheren geographischen Breiten und insbesondere das Maximum bei 270° dadurch erklärt werden kann, dass wir im Sommer mehr als in irgendeiner anderen Jahreszeit Gelegen-

[1] Da in dieser Abhandlung alle fünf früheren citiert werden, so führe ich sie hier an und versehe sie zur Vereinfachung der Hinweise mit Nummern; sie sind sämmtlich in diesen Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften erschienen, und zwar:

I. Über die Bahn eines Kometen, der während seiner günstigen Helligkeit nicht aus den Sonnenstrahlen heraustreten kann. Bd. 88, S. 1099.

II. Über die Richtungen der großen Axen der Kometenbahnen. Bd. 94, S. 874.

III. Über die Frage nach der Existenz von Kometensystemen. Bd. 96, S. 291.

IV. Über die Vertheilung der Bahnelemente der Kometen. Bd. 98, S. 1541.

V. Über den scheinbaren Zusammenhang der heliocentrischen Perihellänge mit der Perihelzeit der Kometen. Bd. 99, S. 654.

heit haben, in geringen Elongationen von der Sonne Kometen zu sehen, die am Äquator unsichtbar sind.

Da vorausgesetzt werden darf, dass durch Kometenentdeckungen in den Äquatorgegenden, weil dort der ganze Himmel, und zwar die eine Hemisphäre so gut wie die andere überschaut werden kann, eine nahezu gleichmäßige Vertheilung der Perihellängen entstehen würde, so wäre nach jener Abhandlung zu erwarten, dass sich durch die Ausscheidung jener Kometen, die am Äquator wesentlich schwerer als unter höheren geographischen Breiten oder gar nicht zu sehen waren, eine wesentliche Verkleinerung der Maxima, insbesondere desjenigen bei 270°, erreichen lässt. Das ist nun allerdings auch thatsächlich der Fall, aber nur in einem beschränkten Maße. Sucht man nämlich die Kometen mit der angedeuteten Eigenschaft auf und scheidet sie aus dem Verzeichnisse aus, so werden zwar die Perihelanhäufungen bei 90° und 270° wesentlich vermindert, doch fallen auch Kometen mit anderen Perihellängen weg, und insbesondere bleiben, was das Wichtigste ist, die spärlich besetzten Stellen bei den Längen 0° und 180° immer noch bestehen. Es vermag somit die Begünstigung durch eine Circumpolargegend, die wir vor dem Äquator voraus haben, die ungleichmäßige Vertheilung der Perihellängen nicht vollständig zu erklären, und die frühere Untersuchung erfordert eine wesentliche Ergänzung: Man hat nicht nur zu untersuchen, warum die Perihellängen bei 90° und 270° häufiger, sondern auch, warum sie bei 0° und 180° seltener sind.

Den Fingerzeig zur Erklärung geben nun gerade die für den Äquator unsichtbaren Kometen, und zwar durch den ganz bestimmt hervortretenden Umstand, dass sie fast durchgehends große Neigungen haben, d. h. solche, die näher an 90°, als an 0° oder 180° liegen. Beachtet man nämlich, dass in den Äquatorgegenden die Ekliptik während des ganzen Jahres auf dem Horizont nahezu senkrecht steht, so erscheint es selbstverständlich, dass gerade Kometen mit solchen Neigungen unsichtbar bleiben können, weil bei diesen am leichtesten Gelegenheit geboten ist, dass sie sowohl beim Durchgange durch die Ekliptik, als auch nördlich und südlich von der Sonne nahe gleichzeitig mit der Sonne auf- und untergehen.

wenn nur noch der eine Umstand hinzutritt, dass sie die Ekliptik in geringen Elongationen von der Sonne durchschneiden. Das ist nun auch thatsächlich bei der Mehrzahl der Kometen zu erwarten, und zwar auf Grund der schon erwähnten Beziehung zwischen der Perihellänge und der Perihelzeit der Kometen, welche darin besteht, dass in jeder Jahreszeit jene Kometen am leichtesten gefunden werden, also auch unter den bekannten am häufigsten sind, bei denen die Differenz zwischen der heliocentrischen Perihellänge l_0 und der zur Perihelzeit T gehörenden heliocentrischen Länge der Erde $L_0 \pm 180°$ klein ist. Diese Beziehung, welcher ich in der V. Abhandlung eine eigene Untersuchung gewidmet habe, werde ich hier kurz als Perihelregel bezeichnen.

Wenn nun am Äquator Kometen unsichtbar bleiben können, die unter höheren geographischen Breiten zu sehen sind, und zwar das ganze Jahr hindurch, so dürfen wir annehmen, dass auch unter höheren Breiten Kometen unsichtbar bleiben können, die am Äquator zu sehen sind, wenn dieselben drei Umstände zusammentreffen, also nebst großer Neigung und geringer Elongation von der Sonne auch noch steiler Stand der Ekliptik gegen den Horizont, wenigstens beim Beginne oder beim Ende der Nacht. Da diese Stellung bei uns im Frühling am Abend und im Herbst am Morgen eintritt, so kann das Unsichtbarbleiben von Kometen, die am Äquator zu sehen sind, bei uns besonders im Frühling und im Herbst stattfinden, und zwar werden, weil zufolge der Perihelregel im September hauptsächlich Kometen mit Perihellängen bei 0° und im März Kometen mit Perihellängen bei 180° zu erwarten sind, diese bei uns unsichtbar bleibenden Kometen im allgemeinen solche sein, deren Perihellängen in der Nähe von 0° und 180° liegen.

Diese Ergänzung der II. Abhandlung erschien auch schon darum besonders nothwendig, weil die Untersuchung der Abhängigkeit der ungleichmäßigen Vertheilung der Perihellängen von höheren geographischen Breiten in jener Abhandlung neben der Begründung der Perihelregel zu kurz gekommen ist, indem sich dort eigentlich nur die Bemerkungen auf S. 8 und 24, dass wir in unseren Breiten im Sommer mehr Kometen in kleinen, im Winter mehr Kometen in großen Elongationen

von der Sonne sehen können, auf die Maxima bei 270°, beziehungsweise 90° beziehen, dagegen fast alles Übrige und so insbesondere auch das Periheltableau S. 21 auf die von der geographischen Breite unabhängige Perihelregel.

Nach dieser vorläufigen Darlegung möchte ich auch gleich hervorheben, dass ich meine früheren Untersuchungen jetzt auch nach einer anderen Seite erweitert habe, nämlich dadurch, dass nebst den Perihellängen auch die Perihelrectascensionen in Betracht gezogen und zu diesem Zwecke alle Perihelpunkte von der Ekliptik auf den Äquator übertragen worden sind. Die Übertragung geschah auf zwei verschiedenen Wegen, nämlich einerseits dadurch, dass aus den schon von früher her bekannten eklipticalen Coordinaten l_0 und b_0 direct die äquatorialen α_0 und δ_0 berechnet, anderseits dadurch, dass die eklipticalen Elemente $\pi - \Omega$, Ω und i in die äquatorialen $\pi' - \Omega'$, Ω' und i' verwandelt und mit diesen die äquatorialen Coordinaten der Perihelpunkte α_0 und δ_0 berechnet wurden, was eine gute Controle der Rechnung liefert.[1] Durch die Berechnung der äquatorialen Bahnelemente ist auch Gelegenheit geboten, die Vertheilung dieser Elemente, insbesondere die von Ω' und i' zu untersuchen, so dass die vorliegende Abhandlung in dieser Beziehung auch eine Ergänzung der IV. Abhandlung bildet.

Auf diese Weise ist das folgende, 355 Kometen enthaltende Verzeichnis entstanden, welches auf den linken, geraden Seiten hauptsächlich die auf die Ekliptik, auf den rechten, ungeraden die auf den Äquator reducierten Bahnelemente und Perihelpunkte enthält.

Als Äquinoctium ist nicht, wie in der II. Abhandlung, ein gemeinschaftliches gewählt, sondern für jeden Kometen das Äquinoctium der Zeit seiner Erscheinung beibehalten, weil dieses dem Sinne der vorliegenden Untersuchung besser entspricht. Solange es sich nämlich nur um die Vertheilung der

---

[1] Bei diesen Rechnungen habe ich u. a. bemerkt, dass in meinen früheren Untersuchungen die Perihellänge des Kometen 1861 I um 10° zu groß angegeben ist, indem 226° durch 216° ersetzt werden muss. Infolge dessen ist in der V. Abhandlung die Differenz $l_0 - L_0 \pm 180°$ nicht —26°6, sondern —36°6, und in der III. Abhandlung hat auf S. 16 das Kometenpaar 1822 III, 1861 I wegen der jetzt schon zu großen Differenz zwischen den Längen zu entfallen.

Perihel-, beziehungsweise Aphelpunkte an der Himmelssphäre überhaupt, z. B. um die Bestimmung der Stelle der dichtesten Gruppierung handelt (Houzeau, Svedstrup), muss man allerdings die Coordinaten sämmtlicher Punkte auf dasselbe Äquinoctium bringen. Hier aber, wo es sich um die Stellung der Perihelpunkte zu dem jeweiligen Sonnenstande handelt, würde die Vergleichbarkeit der Perihellängen mit den Sonnenlängen umsomehr verloren gehen, je mehr man sich mit dem Äquinoctium der Perihelpunkte von dem der jeweiligen Sonnenlänge entfernt. Man begeht demnach keine Inconsequenz, wenn man z. B. die den Kometen 1680 und 1890 II gemeinschaftliche Perihellänge 267°5, obwohl sie sich bei jedem Kometen auf ein anderes Äquinoctium bezieht, für die vorliegende Untersuchung als gleichbedeutend betrachtet.

Die periodischen Kometen sind mit der ersten gesicherten Erscheinung angesetzt und so bezeichnet wie in Galles Kometenbahnverzeichnis vom Jahre 1894, nämlich dadurch, dass ihnen die Anfangsbuchstaben ihrer üblich gewordenen Benennung in Klammern beigefügt sind. In ähnlicher Weise habe ich auch jene Kometen kenntlich gemacht, welche zwar der Rechnung zufolge elliptische Bahnen haben, aber bisher bloß in einer einzigen Erscheinung beobachtet sind, nur mit dem Unterschiede, dass der Raum zwischen den Klammern ( ) leer gelassen ist. Es sind jedoch hier nur diejenigen Kometen in Betracht gezogen, deren Umlaufszeit 100 Jahre nicht wesentlich übersteigt; die höchste auf diese Weise berücksichtigte Umlaufszeit ist die des Kometen 1889 III mit 128 Jahren.

Bei sehr unsicheren Bahnen habe ich, auch wenn die Berechner in den Bahnelementen Minuten oder vielleicht gar Secunden angegeben haben, in den daraus berechneten Perihelpunkten nur Grade angesetzt. Ist bei einem Kometen das Beobachtungsmaterial so unvollkommen oder der Beobachtungszeitraum so kurz, dass selbst die in der vorliegenden Untersuchung auf die berechnete Bahn gegründeten Schlüsse in Frage gestellt erscheinen, und dass es demnach fast besser gewesen wäre, ihn ganz auszuschließen, so ist diese besondere Unsicherheit durch ein Fragezeichen (?) in der vorletzten Columne angedeutet.

Komet	T		q	π—☊		☊		i		Perihelpunkt l_0		Perihelpunkt b_0	
240	Nov.	10	0·37	82°		189°		44°		268°		+43°	
565	Juli	9	0·72	70		158		118		106		+56	
568	Aug.	29	0·91	24	20'	294	15'	4	8'	318	32'	+ 1	42'
574	April	7	0·96	15	22	128	17	46	31	138	59	+11	5
770	Juni	6	0·64	93	52	90	59	118	11	352	50	+61	34
961	[Dec.	30	0·55	82	32	350	35	100	27	296	26	+77	11
1092	Febr.	15	0·93	30	40	125	40	28	55	153	6	+14	16
1097	Sept.	21	0·74	125		207½		73½		5½		+52	
1231	[Jan.	30	0·95	121	18	13	30	6	5	134	57	+ 5	12
1264	Juli	19	0·82	159	34	140	55	16	29	301	15	+ 5	41
1299	[März	31	0·32	103	48	107	8	111	3	343		+65	
1337	Juni	15	0·83	90	41	93	1	139	32	2	7	+40	28
1362	März	11	0·46	30		249		159		221		+10	
1366	Oct.	21	0·98	169	21	217	25	152	23	46	53	+ 4	55
1378 *(H)*	Nov.	8	0·58	107	46	47	17	162	4	298	40	+17	3
1385	Oct.	16	0·77	166	44	268	31	127	45	96	44	+10	27
1402	März	21	0·38	91		117		55		209		+55	
1433	Nov.	7	0·49	189	19	96	20	104	0	274	3	— 9	2
1449	Dec.	9	0·33	356	52	261	18	155	40	264	9	— 1	17
1457 I	Jan.	17	0·70	194	54	249	39	13	16	84	10	— 3	23
1457 II	Aug.	8	0·76	185	8	184	24	9	52	9	27	— 0	53
1468	Oct.	7	0·85	65	12	61	15	135	41	4	6	+39	22
1472	[Febr.	29	0·48	256	53	296	8	165	48	39	39	—13	50
1491	Jan.	4	0·76	155		263		105		90		+24	
1499	Sept.	6	0·95	33½		326½		21		358		+11½	
1500	Mai	17	1·4	20		310		105		305		+19	
1506	Sept.	3	0·39	242	13	132	50	134	59	259	32	—38	44
1532	Oct.	18	0·52	24	25	87	23	32	36	108	19	+12	52
1533	Juni	14	0·33	278	21	299	19	28	14	219		—28	
1556	[April	22	0·49	100	53	175	14	32	26	278	3	+31	46

Komet	π′—☊′	☊′	i'	Perihelpunkt		$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$	H
				α_0	δ_0		
240	72°	198°	21°	268°	+20°	—138°	*a*
565	79	161	96	134	+77	—156 :	*na*
568	326 33'	351 15'	25 35'	320 27'	—13 46'	— 19·4	*a*
574	47 51	103 27	35 50	145 18	+25 44	— 52·6	*an*
770	120 8	102 58	115 16	319 17	+51 27	+ 61·4:	*na*
961	78 2	348 53	123 40	279 48	+54 30	+173·9:	*a*
1092	84 17	76 54	23 47	160 39	+23 40	+ 6·3	*a*
1097	112	214	53	337	+48	— 28 ?	*a*
1231	132 13	2 53	29 29	139 4	+21 22	— 1·3	*a*
1264	257 56	44 40	14 44	302 13	—14 24	— 4·5	*a*
1299	126 49	113 55	102 41	310	+51	+114 :	*a*
1337	123 48	117 20	133 9	342 57	+37 19	+ 71·0	*na*
1362	351	214	144	221	— 5	+ 42 ?	*an*
1366	150 23	202 10	131 43	42 53	+21 38	+ 8·7	*na*
1378	192 56	129 45	162 53	297 22	— 3 47	—115·4	*na*
1385	138 8	251 36	123 36	97 58	+33 46	+ 68·4	*a*
1402	120	99	48	229	+40	+ 41 ?	*a*
1433	213 5	101 25	100 19	274 45	—32 29	—137·6	*n**
1449	314 31	224 4	144 10	263 34	—24 40	+176·8	*an*
1457 I	116 18	325 41	22 26	83 49	+20 0	— 46·2	*a*
1457 II	12 34	356 49	13 42	9 2	+ 2 57	+ 42·6	*a*
1468	99 59	87 52	142 12	345 18	+37 8	— 36·7	*na*
1472	175 33	217 26	158 46	41 35	+ 1 37	—129·3	*ana*
1491	131	258	101	90	$+47\frac{1}{2}$	— 26	*a*
1499	$14\frac{1}{2}$	343	$42\frac{1}{2}$	354	+10	+ 1	*an*
1500	$359\frac{1}{2}$	302	119	$302\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+ 59	*an*
1506	261 24	144 20	117 10	252 39	—61 37	— 98·3	*n**
1532	62 26	56 20	40 17	111 57	+34 59	+ 79·1	*a*
1533	248 30	323 48	44 19	205	—41	— 68	*an*
1556	112 50	163 49	9 12	276 55	+ 8 28	+ 57·4	*an*

Komet	T		q	$\pi - \Omega$		Ω		i		Perihelpunkt			
										l_0		b_0	
1558	Aug.	10	0·58	2°	47'	332°	36'	106°	31'	332°		+ 3°	
1577	[Oct.	26	0·18	255	38	25	20	104	50	160	21	—69	28'
1580	[Nov.	28	0·60	89	20	19	7	64	34	107	34	+64	33
1582	Mai	6	0·17	333	3	229	18	119	13	243		—23	
1585	Oct.	8	1·09	331	24	37	44	6	6	9	16	— 2	55
1590	Febr.	8	0·57	307	40	165	37	150	30	214	3	—22	57
1593	Juli	18	0·09	12	4	164	15	87	58	164	41	+12	3
1596	Juli	25	0·57	59	26	330	21	128	2	284	8	+42	42
1618 I	Aug.	17	0·51	24	55	293	25	21	28	316	48	+ 8	52
1618 II	Nov.	8	0·39	287	21	75	44	37	12	7	9	—35	15
1652	Nov.	12	0 85	300	9	88	10	79	28	70	42	—58	14
1661	Jan.	26	0·44	33	22	81	54	33	1	110	49	+17	27
1664	Dec.	4	1·03	310	33	81	16	158	42	128	42	—16	1
1665	April	24	0·11	156	7	228	2	103	55	54	6	+23	8
1668	Febr.	24	0·25	206	43	193	26	27	7	38		—12	
1672	März	1	0·70	109	34	298	6	82	57	99	2	+69	15
1677	Mai	6	0·28	99	12	236	49	100	57	106	21	+75	44
1678	Aug.	27	1·24	166	6	161	40	3	4	327	47	+ 0	44
1680	Dec.	18	0·01	350	40	272	9	60	40	267	33	— 8	8
1683	Juli	13	0·56	87	49	173	25	96	47	101	18	+82	52
1684	Juni	8	0·96	330	21	268	11	65	25	254	50	—26	44
1686	Sept.	15	0·34	81	55	354	4	34	56	74	13	+34	32
1689	Nov.	30	0·06	78	11	279	24	63	11	345		+61	
1695	Nov.	9	0·84	204		216		22		58		— 9	
1698	Oct.	17	0·73	151	11	65	53	169	5	274	16	+ 5	14
1699	Jan.	13	0·75	109	33	321	41	109	23	184	46	+62	44
1701	Oct.	17	0·59	165	0	298	41	138	21	130	0	+ 9	54
1702	März	13	0·65	309	47	188	59	4	25	138	52	— 3	23
1706	Jan.	30	0·43	59	25	13	11	55	14	57	10	+45	0
1707	Dec.	11	0·86	27	8	52	50	88	38	53	32	+27	8

Komet	$\pi'-\Omega'$	Ω'	i'	Perihelpunkt α_0	Perihelpunkt δ_0	$\alpha_0-A_0\pm180°$	H
1558	349° 31'	326° 31'	126° 53'	333°	— 8°	+ 4°	*n**
1577	267 46	30 37	125 40	124 27'	—54 16'	+ 83·0	*a*
1580	96 51	17 13	86 55	173 6	+82 30	+ 97·1 :	*a*
1582	315 0	222 43	10 45	235	—44	+ 2	*n**
1585	2 6	7 49	28 33	9 40	+ 1 0	— 4·2	*a*
1590	314 50	171 18	127 27	202 36	—34 16	+ 60·6	*n**
1593	18 54	162 39	65 25	170 45	+17 8	—127·3	*n**
1596	38 15	314 27	146 55	280 59	+19 45	— 24·0	*n**
1618 I	347 47	326 20	37 18	316 34	— 7 22	— 10·1	*n**
1618 II	318 46	52 13	47 50	21 45	—29 15	— 22·1	*an*
1652	323 55	84 5	81 5	77 39	—35 34	+ 28·6	*a*
1661	69 11	53 8	42 24	115 53	+39 4	— 14·5	*a*
1664	5 27	131 46	151 13	126 59	+ 2 37	+ 54·7	*a*
1665	138 53	226 14	87 49	44 20	+41 5	—168·3	*a*
1668	155 0	243 52	6 46	39	+ 3	—119	*a*
1672	88 55	298 37	94 13	222 57	+85 38	+ 59·4 :	*n**
1677	79 42	235 19	87 43	247 43	+79 27	+ 23·8 :	*n**
1678	325 13	2 45	20 35	329 43	—11 34	— 7·1	*a*
1680	324 24	284 30	64 8	267 9	—31 35	+179·8	*a*
1683	90 33	173 10	73 27	265 5	+73 27	— 27·7 :	*n**
1684	304 41	278 42	66 51	249 6	—49 7	— 8·5	*a*
1686	79 8	356 1	58 19	65 56	+56 42	+ 71·7	*a*
1689	53 18	289 36	69 10	315	+49	—112	*a*
1695	125	293	14	58	+11	+ 13	*a*
1698	239 0	151 38	158 39	274 28	—18 11	—108·3	*na*
1699	91 34	313 4	126 50	220 27	+53 9	+104·5	*na*
1701	128 10	269 29	144 20	135 26	+27 17	+113·0	*a*
1702	140 44	357 54	19 8	140 13	+11 58	— 33·4	*a*
1706	64 45	11 2	78 12	34 28	+62 18	— 98·4	*a*
1707	46 7	54 44	102 38	41 56	+44 42	— 37·0	*an*

Komet	T		q	π — ☊		☊		i		Perihelpunkt			
										l_0		b_0	
1718	Jan.	14	1·03	6°	16'	127°	55'	148°	52'	122°	33'	+ 3°	14'
1723	Sept.	27	1·00	331	22	14	14	130	0	33	34	—21	32
1729	Juni	16	4·05	10	26	310	37	77	4	312	59	+10	10
1737 I	Jan.	30	0·22	99	33	226	22	18	21	326	25	+18	5
1737 II	Juni	8	0·87	138	43	123	54	39	14	269	41	+24	40
1739	Juni	17	0·67	104	47	207	25	124	17	92	20	+53	1
1742	Febr.	8	0·77	328	30	185	9	112	28	198	20	—28	52
1743 I	Jan.	10	0·84	25	26	67	32	2	16	92	57	+ 0	59
1743 II	Sept.	20	0·52	119	2	6	2	134	23	237	36	+38	41
1744	März	1	0·22	151	27	45	45	47	7	205	26	+20	30
1747	März	3	2·20	230	17	147	19	100	54	314	30	—49	3
1748 I	April	28	0·84	17	28	232	52	94	32	231	27	+17	24
1748 II	Juni	18	0·63	245	39	33	8	67	3	253	53	—57	2
1757	Oct.	21	0·34	268	45	214	13	12	50	122	56	—12	50
1758	Juni	11	0·22	36	48	230	50	68	19	246	17	+33	49
1759 II	Nov.	27	0·80	273	55	139	40	79	7	69	35	—78	26
1759 III	Dec.	16	0·97	301	21	79	50	175	7	138	24	— 4	10
1762	Mai	28	1·01	115	29	348	33	85	38	159	28	+64	10
1763	Nov.	1	0·50	88	35	356	24	72	32	81	41	+72	29
1764	Febr.	12	0·56	104	50	120	5	127	6	6	22	+50	27
1766 I	Febr.	17	0·51	100	55	244	11	139	10	139	53	+39	57
1766 II ( )	April	26	0·40	177	2	74	11	8	2	251	15	+ 0	25
1769	Oct.	7	0·12	329	7	175	4	40	46	150	42	—19	35
1770 I ( )	Aug.	13	0·67	224	18	131	59	1	34	356	16	— 1	6
1770 II	Nov.	22	0·53	260	19	108	42	148	34	210	0	—30	56
1771	April	19	0·90	76	8	27	53	11	16	103	45	+10	56
1772 *(B)*	Febr.	16	0·99	213	3	257	16	17	3	109	9	— 9	12
1773	Sept.	5	1·13	314	5	121	5	61	14	94	40	—39	1
1774	Aug.	15	1·43	136	32	180	50	83	0	354	15	+43	4
1779	Jan.	4	0·71	62	10	25	4	32	31	83	1	+28	23

Komet	$\pi'-\Omega'$	Ω'	i'	Perihelpunkt α_0	Perihelpunkt δ_0	$\alpha_0-A_0\pm180°$	H
1718	30° 56'	147° 11'	131° 11'	125° 39'	+22° 46'	+ 8°7	*n**
1723	343 32	23 54	152 17	38 35	− 7 35	+ 34·6	*a*
1729	352 48	312 13	92 43	312 33	− 7 11	+ 47·7	*a*
1737 I	15 4	308 8	16 50	322 35	+ 4 19	−171·0	*a*
1737 II	177 43	91 39	31 41	269 43	+ 1 12	+ 12·9	*a*
1739	93 56	202 59	102 59	96 0	+76 27	−169·7:	*n**
1742	326 27	184 46	89 5	184 10	−33 33	+ 41·5	*an*
1743 I	88 19	5 5	24 26	93 14	+24 25	− 19·2	*a*
1743 II	125 21	11 23	157 37	243 53	+18 6	−114·0	*n**
1744	169 47	35 21	65 8	211 1	+ 9 16	+ 48·0	*a*
1747	242 51	147 32	81 2	344 26	−61 31	−179·8	*a*
1748 I	358 41	233 43	80 22	233 30	− 1 18	+ 16·7	*n**
1748 II	258 14	30 16	87 7	223 53	−77 54	− 44·3:	*a*
1757	151 6	330 23	14 39	122 17	+ 7 1	+ 95·7	*a*
1758	14 40	241 29	55 4	250 1	+11 59	− 9·6	*an*
1759 II	290 54	133 53	61 52	82 54	−55 28	+ 19·8	*a*
1759 III	30 12	167 41	156 55	139 31	+11 23	+ 54·8	*a*
1762	110 42	347 57	108 38	208 10	+62 26	− 37·4:	*n**
1763	87 8	356 33	95 57	292 14	+83 24	−105·0:	*a*
1764	126 51	131 20	113 13	339 4	+47 20	−167·1	*n**
1766 I	74 48	226 18	125 29	161 23	+51 47	+ 10·0	*n**
1766 II	235 27	17 23	26 44	249 45	−21 45	+ 34·9	*a*
1769	335 40	169 13	17 29	145 54	− 7 6	+132·0	*a*
1770 I	353 27	3 4	22 27	357 1	− 2 30	+ 33·5	*a*
1770 II	293 2	134 57	135 44	194 15	−39 58	+135·9	*a*
1771	95 41	9 27	33 49	106 17	+33 38	−101·0	*a*
1772	148 31	318 20	25 29	109 24	+12 59	− 40·8	*a*
1773	339 54	106 35	51 34	93 46	−15 37	+108·8	*an*
1774	136 9	180 57	59 32	335 0	+36 40	+ 9·6	*na*
1779	74 7	16 14	54 35	80 5	+51 37	− 25·3	*na*

Komet	T	q	π—☊	☊	i	Perihelpunkt	
						l_0	b_0
1780 I	Sept. 30	0·10	237° 30'	124° 0'	126° 4'	261° 16'	—42° 59'
1780 II	Nov. 28	0·52	255 9	142 1	107 56	272 44	—66 52
1781 I	Juli 7	0·78	156 11	83 1	81 43	259 23	+23 34
1781 II	Nov. 29	0·96	61 20	77 23	152 48	18 58	+23 39
1783 ( )	Nov. 19	1·46	354 37	55 40	45 7	51 52	— 3 49
1784	Jan. 21	0·71	336 5	56 49	128 51	72 22	—18 24
1785 I	Jan. 27	1·14	205 40	264 12	70 14	93 26	—24 3
1785 II	April 8	0·43	127 11	64 41	92 38	248 9	+52 44
1786 I *(E)*	Jan. 30	0·33	182 30	334 8	13 36	156 34	— 0 35
1786 II	Juli 7	0·41	325 3	194 23	50 54	170 36	—26 24
1787	Mai 10	0·35	99 7	106 52	131 44	3 19	+47 27
1788 I	Nov. 10	1·06	57 49	156 57	167 32	99 45	+10 31
1788 II	Nov. 20	0·76	30 25	352 24	64 30	6 36	+27 12
1790 I	Jan. 16	0·75	114 25	172 50	150 16	55 14	+26 51
1790 II *(Tu)*	Jan. 30	1·04	207 5	268 37	54 6	105 18	—21 38
1790 III	Mai 21	0·80	119 28	33 11	116 8	251 7	+51 25
1792 I	Jan. 13	1·29	154 17	190 46	140 13	31 6	+16 8
1792 II	Dec. 27	0·97	147 16	283 15	130 58	126 6	+24 6
1793 I	Nov. 4	0·40	239 47	108 29	119 39	248	—49
1793 II	Nov. 19	1·50	69 20	2 17	51 55	60 50	+47 25
1796	April 2	1·58	184 18	17 2	115 5	195 12	— 3 54
1797	Juli 9	0·53	279 48	329 16	129 19	44 1	—49 40
1798 I	April 4	0·49	342 58	122 7	43 48	109 39	—11 42
1798 II	Dec. 31	0·78	215 1	249 31	137 37	42 9	—22 46
1799 I	Sept. 7	0·84	95 48	99 30	129 4	0 21	+50 34
1799 II	Dec. 25	0·63	136 29	326 49	102 58	158 51	+42 9
1801	Aug. 8	0·26	219 47	42 29	159 15	184 35	—13 6
1802	Sept. 9	1·09	21 53	310 16	57 1	322 36	+18 13
1804	Febr. 13	1·07	331 57	176 48	56 29	160 24	—23 5
1806 II	Dec. 28	1·08	225 20	322 23	144 57	102 45	—24 6

Komet	$\pi' - ☊'$	☊'	i'	Perihelpunkt α_0	Perihelpunkt δ_0	$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$	H
1780 I	258° 13'	134° 5'	111° 6'	254° 10'	−65° 58'	−113°8	*n**
1780 II	269 20	144 9	89 5	18 27	−88 52	− 47·6:	*a*
1781 I	179 33	80 18	85 11	260 16	+ 0 27	− 26·8	*n**
1781 II	109 59	120 29	148 50	7 27	+29 6	− 59·0	*ana*
1783	16 45	42 6	60 47	50 28	+14 34	− 5·3	*a*
1784	6 4	77 47	138 10	73 15	+ 4 2	− 50·3	*a*
1785 I	180 40	272 54	69 38	93 8	− 0 37	− 37·7	*a*
1785 II	148 47	67 32	102 15	254 51	+30 25	+ 56·9	*n**
1786 I	165 23	349 59	36 10	158 6	+ 8 34	+ 23·9	*a*
1786 II	313 8	203 43	28 37	160 35	−20 28	−127·0	*a*
1787	125 43	122 59	121 38	339 6	+43 44	+111·1	*a*
1788 I	73 29	171 35	144 45	101 32	+33 36	+ 54·9	*n**
1788 II	27 24	353 9	87 48	354 17	+27 23	− 62·7	*n**
1790 I	117 59	175 34	126 55	44 4	+44 55	− 75·5	*na*
1790 II	178 44	284 54	56 56	104 12	+ 1 4	− 30·0	*a*
1790 III	137 19	43 43	134 41	256 41	+28 49	+ 18·1	*n**
1792 I	149 29	187 43	117 2	22 43	+26 53	− 92·9	*na*
1792 II	115 46	262 5	132 6	136 19	+41 56	+ 38·8	*n**
1793 I	263 30	118 37	110 7	227	−69	−174 ?	*a*
1793 II	70 16	1 52	75 22	37 2	+65 36	− 18·9	*n**
1796	194 11	22 59	137 12	192 29	− 9 35	− 0·6	*a*
1797	257 22	312 7	147 47	56 58	−31 21	+127·8	*n**
1798 I	17 57	94 54	36 2	109 34	+10 27	− 84·7	*n**
1798 II	187 40	231 3	125 42	46 33	− 6 13	− 55·1	*na*
1799 I	123 19	115 42	121 49	334 25	+45 14	− 11·7	*n**
1799 II	121 35	321 0	122 3	181 48	+46 13	+ 86·7	*na*
1801	299 10	119 1	164 7	178 53	−13 49	−139·5	*n**
1802	3 25	318 8	73 32	319 6	+ 3 17	− 28·8	*a*
1804	334 17	175 6	33 4	153 8	−13 42	+ 6·6	*a*
1806 II	183 11	284 35	158 46	101 38	− 1 9	+ 3·9	*a*

Komet	T	q	π—☊		☊		i		Perihelpunkt l_0		Perihelpunkt b_0	
1807	Sept. 18	0·65	4°	7'	266°	47'	63°	10'	268°	39'	+ 3°	41'
1808 I	Mai 12	0·39	253	46	322	59	134	17	75	38	—43	25
1808 II	Juli 12	0·61	131	32	24	11	140	41	245	18	+28	18
1810	Oct. 6	0·97	114	56	308	51	62	56	84	28	+53	51
1811 I	Sept. 12	1·04	65	24	140	25	106	58	107	54	+60	25
1811 II	Nov. 11	1·58	314	26	93	2	31	17	51	57	—21	46
1812 *(P—Bs)*	Sept. 15	0·78	199	19	253	1	73	58	78	33	—18	32
1813 I	März 4	0·70	350	52	60	48	158	46	69	19	— 3	18
1813 II	Mai 19	1·22	205	3	42	40	98	53	218	33	—24	44
1815 *(O)*	April 26	1·21	65	33	83	29	44	30	140	58	+39	39
1816	März 1	0·05	304	21	323	15	43	5	276	20	—34	20
1818 I	Febr. 3	0·70	180	17	256	1	34	11	76	15	— 0	10
1818 II	Febr. 25	1·20	112	19	70	26	89	44	249	47	+67	41
1818 III	Dec. 4	0·86	348	5	90	0	116	55	95	27	—10	37
1819 II	Juni 27	0·34	13	26	273	42	80	45	275	54	+13	16
1819 III *(W)*	Juli 18	0·77	161	30	113	11	10	43	274	59	+ 3	23
1819 IV ( )	Nov. 20	0·89	350	5	77	14	9	1	67	26	— 1	33
1821	März 21	0·09	169	12	48	41	106	27	231	46	+10	22
1822 I	Mai 5	0·50	344	43	177	27	126	23	186	39	—12	15
1822 III	Juli 15	0·85	237	45	97	44	143	42	225	47	—30	2
1822 IV	Oct. 23	1·15	181	4	92	45	127	21	272	6	— 0	51
1823	Dec. 9	0·23	28	28	303	3	103	48	295	41	+27	35
1824 I	Juli 11	0·59	334	3	234	21	125	23	250	6	—20	54
1824 II	Sept. 29	1·05	85	15	279	16	54	37	1	6	+54	20
1825 I	Mai 30	0·89	106	11	20	6	123	19	262	15	+53	22
1825 II	Aug. 18	0·88	177	18	192	56	89	42	12	55	+ 2	42
1825 IV	Dec. 10	1·24	256	57	215	43	146	27	321	16	—32	34
1826 II	April 21	2·01	279	23	197	37	40	0	119	47	—39	22
1826 III	April 29	0·19	4	41	40	29	174	43	36		+½	
1826 IV	Oct. 8	0·85	13	42	44	6	25	57	56	28	+ 5	57

Komet	$\pi' - ☊'$		☊'		i'		Perihelpunkt α_0		Perihelpunkt δ_0		$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$	H
1807	337°	56'	278°	32'	64°	17'	268°	34'	−19°	47'	− 87°1	*a*
1808 I	224	53	299	45	150	14	78	54	−20	31	−151·1	*n**
1808 II	160	4	49	27	160	1	248	16	+ 6	41	− 43·4	*n**
1810	96	30	315	0	78	45	75	18	+77	1	+ 63·5:	*n**
1811 I	80	6	142	26	88	31	150	53	+80	0	+161·0:	*ana*
1811 II	355	22	58	43	37	22	55	2	− 2	49	+ 9·3	*a*
1812	175	10	260	53	68	35	79	7	+ 4	30	+ 85·7	*na*
1813 I	57	23	123	30	157	44	68	10	+18	37	− 97·2	*n**
1813 II	222	27	47	54	115	31	206	24	−37	32	− 29·9	*a*
1815	95	55	62	51	51	30	162	19	+51	7	− 50·7	*a*
1816	288	51	332	44	63	8	279	48	−57	35	+117·1	*n**
1818 I	138	43	290	35	35	37	75	5	+22	36	− 61·7	*a*
1818 II	134	33	71	50	97	25	259	18	+44	58	+100·3	*na*
1818 III	14	2	101	25	114	32	95	30	+12	45	+ 24·2	*an*
1819 II	349	50	277	5	82	59	275	50	−10	5	− 0·3	*n**
1819 III	248	55	27	48	21	30	275	18	−19	59	− 22·5	*a*
1819 IV	49	22	19	47	26	51	65	54	+20	3	+ 10·6	*a*
1821	189	34	56	59	120	47	232	3	− 8	12	+ 51·0	*a*
1822 I	345	46	177	54	102	56	181	9	−13	52	− 41·3	*n**
1822 III	271	41	123	54	135	3	211	30	−44	56	− 83·5	*a*
1822 IV	209	18	109	12	122	46	272	18	−24	18	−115·9	*na*
1823	6	47	295	39	115	27	292	43	+ 6	7	−143·3	*ana*
1824 I	313	54	224	49	110	0	244	23	−42	37	− 46·7	*a*
1824 II	58	40	293	34	61	23	331	45	+48	35	− 34·0	*an*
1825 I	119	53	29	49	144	43	264	40	+30	3	+ 17·1	*na*
1825 II	171	45	194	5	66	52	10	50	+ 7	35	+ 42·7	*a*
1825 IV	240	17	203	28	125	52	337	43	−44	44	−100·2	*a*
1826 II	257	27	217	6	18	48	113	52	−18	21	− 95·7	*a*
1826 III	134	42	169	48	160	16	33		+14		+177 ?	*a*
1826 IV	36	31	25	14	45	36	52	38	+25	10	+ 38·3	*a*

Komet	T		q	π—☊		☊		i		Perihelpunkt			
										l_0		b_0	
1826 V	Nov.	18	0·03	279°	37'	235°	6'	90°	38'	238°	49'	—80°	22'
1827 I	Febr.	4	0·51	150	58	184	28	102	24	11	16	+28	18
1827 II	Juni	7	0·81	20	39	318	10	136	21	302	55	+14	5
1827 III	Sept.	11	0·14	258	42	149	39	125	55	258	28	—52	[illegible]
1830 I	April	9	0·92	5	50	206	22	21	17	211	48	+ 2	7
1830 II	Dec.	27	0·13	26	54	337	53	135	14	318	4	+18	34
1832 II	Sept.	25	1·18	204	36	72	27	136	40	234	3	—16	36
1833	Sept.	10	0·46	259	47	323	9	7	20	222	52	— 7	13
1834	April	2	0·51	50	26	226	1	6	0	276	17	+ 4	37
1835 I	März	27	2·04	210	37	58	20	170	52	208	2	— 4	38
1840 I	Jan.	4	0·62	72	14	119	58	53	6	181	53	+49	36
1840 II	März	13	1·22	156	36	236	50	120	47	69	19	+19	57
1840 III	April	2	0·75	138	1	186	2	79	52	357	3	+41	11
1840 IV	Nov.	13	1·48	133	35	248	56	57	57	39	48	+37	52
1842 II	Dec.	15	0·50	240	32	207	49	106	26	1	13	—56	37
1843 I	Febr.	27	0·01	82	35	1	15	144	19	280	22	+35	20
1843 II	Mai	6	1·62	124	15	157	15	52	45	295	36	+41	8
1843 III *(F)*	Oct.	17	1·69	200	4	209	29	11	23	49	11	— 3	53
1844 I ( )	Sept.	2	1·19	278	41	63	50	2	55	342	32	— 2	53
1844 II	Oct.	17	0·86	211	15	31	39	131	24	189	47	—22	54
1844 III	Dec.	13	0·25	177	43	118	19	45	39	296	44	+ 1	38
1845 I	Jan.	8	0·91	114	35	336	44	46	51	100	32	+41	33
1845 II	April	21	1·25	205	27	347	7	56	24	181	52	—20	58
1845 III	Juni	5	0·40	75	46	337	49	131	18	268	50	+46	44
1846 I	Jan.	22	1·48	337	58	111	8	47	26	95	50	—16	[illegible]
1846 III *(Br)*	Febr.	25	0·65	13	47	102	42	30	55	114	34	+ 7	[illegible]
1846 IV ( )	März	5	0·66	12	53	77	33	85	6	78	40	+12	50
1846 V	Mai	27	1·38	78	45	161	19	122	24	91	41	+55	55
1846 VI ( )	Juni	1	1·53	339	38	260	24	30	40	242	41	—10	14
1846 VII	Juni	5	0·63	99	47	261	53	150	41	160	42	+28	[illegible]

Komet	$\pi'-\Omega'$		Ω'		i'		Perihelpunkt				$\alpha_0-A_0\pm180°$	H
							α_0		δ_0			
1826 V	260°	4'	237°	10'	77°	26'	108°	20'	—74°	1'	+ 54°6 :	n*
1827 I	149	9	184	26	79	1	357	57	+30	13	—140·4	n*
1827 II	348	15	291	45	150	18	302	0	— 5	48	+ 46·4	n*
1827 III	270	43	154	56	105	4	242	9	—74	55	—107·4	n*
1830 I	275	58	294	18	10	11	210	22	—10	8	+ 12·4	sa
1830 II	5	34	319	59	155	39	314	54	+ 2	18	—141·6	a
1832 II	239	36	98	41	138	33	226	44	—34	49	—136·0	a
1833	230	55	351	6	29	38	218	3	—22	34	—130·6	a
1834	288	25	347	9	19	45	276	37	—18	42	+ 84·6	a
1835 I	310	48	156	55	159	52	204	19	—15	6	+ 18·2	a
1840 I	101	33	100	25	44	46	206	28	+43	38	+101·5	an
1840 II	136	16	228	34	106	24	63	41	+41	32	—110·0	n*
1840 III	135	8	187	7	56	34	338	23	+36	4	+146·2	n*
1840 IV	105	41	265	4	52	33	19	52	+49	51	— 29·6	na
1842 II	229	48	206	40	85	31	31	58	—49	35	— 51·7	na
1843 I	84	55	3	26	167	46	278	38	+12	11	+118·3	a
1843 II	141	7	144	33	32	3	290	12	+19	28	+ 67·3	a
1843 III	71	3	337	22	14	37	47	49	+13	48	+ 26·0	a
1844 I	336	50	6	13	24	52	345	0	— 9	32	+ 3·0	a
1844 II	235	29	50	40	149	25	179	17	—24	48	+156·5	as
1844 III	211	30	92	59	39	4	298	26	—19	14	—143·2	sa
1845 I	104	53	342	0	68	52	108	25	+64	21	— 1·4	na
1845 II	200	16	349	6	79	22	173	0	—19	54	— 36·1	na
1845 III	57	8	322	55	151	56	269	8	+23	17	+ 15·1	n*
1846 I	10	40	87	52	43	26	95	39	+ 7	18	— 28·9	a
1846 III	58	12	64	37	33	42	117	54	+28	8	— 40·7	an
1846 IV	35	46	76	39	90	25	76	21	+35	46	— 89·9	an
1846 V	86	11	164	3	99	58	95	7	+79	20	—149·6 :	na
1846 VI	295	56	297	44	34	37	238	18	—30	44	— 10·8	a
1846 VII	61	26	229	44	140	34	174	55	+33	55	— 78·6	an

Komet	T	q	$\pi - ☊$	☊	i	Perihelpunkt l_0	Perihelpunkt b_0
1846 VIII	Oct. 29	0·83	93° 58'	4° 41'	49° 42'	100° 49'	+49° 32'
1847 I	März 30	0 04	254 21	21 42	48 39	268 43	−46 17
1847 II	Juni 4	2·12	32 21	173 57	100 26	167 24	+31 45
1847 III	Aug. 9	1·77	91 32	338 17	96 34	235 7	+83 15
1847 IV	Aug. 9	1·48	55 26	76 43	147 21	26 1	+26 22
1847 V ( )	Sept. 9	0·49	129 23	309 49	19 8	80 48	+14 41
1847 VI	Nov. 14	0·33	276 37	190 50	108 9	260 25	−70 43
1848 I	Sept. 8	0·32	260 58	211 32	95 35	0 4	−79 24
1849 I	Jan. 19	0·96	208 1	215 13	85 3	37 51	−27 54
1849 II	Mai 26	1·16	33 10	202 33	67 10	216 47	+30 17
1849 III	Juni 8	0·89	236 34	30 32	66 55	241 14	−50 [illegible]
1850 I	Juli 23	1·08	180 32	92 53	68 11	273 5	− 0 30
1850 II	Oct. 19	0 57	243 13	206 0	40 5	82 35	−35 5
1851 II (d'A)	Juli 8	1·17	174 31	148 23	13 55	323 4	+ 1 19
1851 III	Aug. 26	0·98	87 18	223 41	38 9	310 15	+38 [illegible]
1851 IV	Sept. 30	0·14	294 25	44 22	73 59	13 4	−61 4
1852 II	April 19	0·91	37 13	317 13	131 7	290 41	+27 6
1852 IV ( )	Oct. 12	1·25	57 4	346 10	40 55	35 33	+33 2[illegible]
1853 I	Febr. 24	1·09	275 51	69 34	159 45	153 20	−20 8
1853 II	Mai 9	0·91	199 13	40 58	122 11	210 27	−16 10
1853 III	Sept. 1	0·31	170 26	140 31	61 31	315 55	+ 8 24
1853 IV	Oct. 16	0·17	277 51	220 6	119 0	294 13	−60 3
1854 I	Jan. 3	2·04	170 56	227 3	113 53	50 45	+ 8 17
1854 II	März 24	0·28	101 38	315 28	97 28	167 43	+76 [illegible]
1854 III	Juni 22	0 65	74 34	347 40	108 41	298 26	+65 57
1854 IV	Oct. 27	0·80	129 56	324 29	40 55	102 24	+30 [illegible]
1854 V	Dec. 15	1·36	287 2	238 8	14 9	165 39	−13 3[illegible]
1855 I	Febr. 5	2 19	323 6	189 44	128 36	214 49	−27 59
1855 II	Mai 30	0·57	22 36	260 19	156 53	239 21	+ 8 4[illegible]
1855 IV	Nov. 25	1·23	325 32	51 34	169 49	85 37	− 5 45

Komet	$\pi'-☊'$		$☊'$		i'		Perihelpunkt				$\alpha_0-A_0\pm180°$	H
							α_0		δ_0			
1846 VIII	95°	55'	3°	44'	73°	6'	113°	22'	+72°	7'	+ 79°2	*n**
1847 I	263	18	17	5	70	50	267	26	−69	44	+ 78·8:	*n**
1847 II	34	49	173	54	77	6	182	43	+33	49	− 69·8	*an*
1847 III	81	55	335	21	118	11	262	6	+60	46	− 56·9:	*na*
1847 IV	98	16	112	52	145	16	12	50	+34	20	+ 53·8	*na*
1847 V	99	56	336	7	38	28	78	43	+37	47	+ 91·0	*a*
1847 VI	272	19	190	19	85	5	125	30	−84	34	+ 76·0:	*na*
1848 I	248	33	212	31	75	37	64	49	−64	22	+ 77·7:	*n**
1849 I	193	30	218	53	66	13	44	25	−12	20	− 77·5	*na*
1849 II	20	55	209	26	45	59	224	18	+14	53	− 19·3	*an*
1849 III	248	15	27	54	87	28	214	12	−68	7	− 42·4	*a*
1850 I	205	45	83	33	68	56	273	23	−23	55	− 29·5	*nas*
1850 II	214	23	231	17	21	13	83	49	−11	47	+ 59·6	*na*
1851 II	291	58	32	26	13	36	324	58	−12	36	+ 37·3	*a*
1851 III	48	22	257	13	25	56	302	33	+19	5	− 32·2	*an*
1851 IV	310	35	42	14	91	10	43	36	−49	24	+ 36·7	*n**
1852 II	8	46	295	38	145	25	288	23	+ 4	58	+ 80·3	*n**
1852 IV	50	59	349	57	63	54	18	27	+44	14	− 0·1	*an*
1853 I	339	12	129	0	155	20	148	2	− 8	31	− 9·6	*a*
1853 II	222	10	56	0	137	59	202	3	−26	42	− 25·0	*a*
1853 III	191	25	127	44	44	58	315	52	− 8	2	− 25·3	*ansa*
1853 IV	262	45	214	56	100	17	340	25	−77	26	− 41·5:	*n**
1854 I	153	52	222	24	97	5	45	52	+25	55	− 59·1	*na*
1854 II	83	54	310	37	113	37	235	34	+65	39	+ 52·3:	*na*
1854 III	68	3	344	20	131	28	285	39	+44	1	+ 14·9	*n**
1854 IV	114	38	334	16	61	15	107	54	+52	50	+ 75·9	*n**
1854 V	200	30	322	11	19	48	161	34	− 6	49	+ 78·1	*a*
1855 I	319	6	187	52	105	24	200	50	−39	8	+ 62·2	*a*
1855 II	339	40	222	12	144	50	239	3	−11	33	− 7·8	*n**
1855 IV	70	9	154	32	161	12	85	25	+17	39	+ 24·4	*a*

Komet	T	q	π—☊	☊	i	Perihelpunkt l_0	Perihelpunkt b_0
1857 I	März 21	0·77	121° 35'	313° 9'	87° 56'	129° 48'	+58° 21'
1857 III	Juli 17	0·37	134 3	23 42	121 1	231 44	+38 [illegible]
1857 IV	Aug. 24	0·75	180 58	200 49	32 46	21 38	— 0 31
1857 V	Sept. 30	0·56	124 50	14 58	123 57	233 42	+42 55
1857 VI	Nov. 19	1·01	95 5	139 19	142 11	42 53	+37 39
1858 III ( )	Mai 2	1·15	25 42	175 4	19 30	199 28	+ 8 20
1858 IV	Juni 5	0·54	98 52	324 58	99 57	192 54	+76 42
1858 VI	Sept. 29	0·58	129 7	165 19	116 58	14 28	+43 45
1858 VII	Oct. 12	1·43	155 34	159 46	158 43	2 43	+ 8 38
1859	Mai 29	0·20	282 0	357 21	95 28	21 29	—76 50
1860 I	Febr. 16	1·20	209 46	324 4	79 40	149 55	—29 14
1860 II	März 5	1·31	41 13	8 53	48 13	39 8	+29 25
1860 III	Juni 16	0·29	76 52	84 41	79 19	123 7	+73 8
1860 IV	Sept. 22	0·68	311 57	44 51	32 12	1 35	—23 21
1861 I	Juni 3	0·92	213 26	29 56	79 46	216 38	—32 50
1861 II	Juni 11	0·82	330 6	278 59	85 26	276 22	—29 48
1861 III	Dec. 7	0·84	331 35	145 6	138 1	167 1	—18 34
1862 II	Juni 22	0·98	27 12	326 33	172 6	299 34	+ 3 36
1862 III ( )	Aug. 22	0·96	152 45	137 27	113 34	329 5	+24 48
1862 IV	Dec. 28	0·80	230 55	355 46	137 31	133 52	—31 27
1863 I	Febr. 3	0·79	74 27	116 56	85 22	133 7	+73 47
1863 II	April 4	1·07	4 0	251 16	112 38	249 43	+ 3 42
1863 III	April 20	0·63	55 37	250 11	85 29	256 44	+55 20
1863 IV	Nov. 9	0·71	357 13	97 29	78 5	96 54	— 2 43
1863 V	Dec. 27	0·77	115 41	304 43	64 29	82 52	+54 25
1863 VI	Dec. 29	1·31	78 6	105 1	83 19	133 56	+76 23
1864 I	Juli 27	0·63	346 6	174 59	135 0	184 54	— 9 47
1864 II	Aug. 15	0·91	151 3	95 15	178 8	304 11	+ 0 54
1864 III	Oct. 11	0·93	232 27	31 45	109 42	188 5	—48 17
1864 IV	Dec. 22	0·77	118 28	203 13	48 53	332 43	+41 28

Komet	$\pi' - \Omega'$	Ω'	i'	Perihelpunkt α_0	Perihelpunkt δ_0	$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$	H
1857 I	104° 11'	311° 20'	103° 50'	174° 45'	+70° 18'	− 6°3 :	*n**
1857 III	149 1	33 47	141 44	239 1	+18 35	− 58·7	*n**
1857 IV	143 22	236 4	13 25	20 11	+ 7 57	+ 46·9	*na*
1857 V	135 29	22 40	146 14	241 55	+22 56	−125·5	*n**
1857 VI	113 3	151 39	122 39	23 24	+50 47	− 31·5	*n**
1858 III	178 52	22 15	4 21	201 7	+ 0 5	− 19·1	*a*
1858 IV	83 46	319 53	118 40	242 42	+60 44	− 10·7 :	*n**
1858 VI	134 55	166 55	94 11	351 5	+44 56	− 15·3	*nas*
1858 VII	166 59	169 36	135 59	359 2	+ 9 0	− 19·1	*a*
1859	280 48	356 59	118 54	65 27	−59 19	+179·5 :	*n**
1860 I	196 6	324 15	98 46	141 44	−15 54	− 8·2	*as*
1860 II	44 55	6 58	71 28	24 34	+42 2	−142·3	*n**
1860 III	100 26	80 52	82 19	224 54	+77 4	− 40·2 :	*nas*
1860 IV	333 3	28 48	51 15	11 9	−20 42	+ 11·2	*an*
1861 I	225 5	29 55	100 10	199 53	−44 11	− 51·9	*na*
1861 II	306 57	280 3	89 22	279 12	−53 3	+ 19·1	*san*
1861 III	346 29	154 25	117 37	160 46	−11 57	+ 86·4	*an*
1862 II	254 28	194 42	162 37	300 56	−16 44	+ 30·1	*n**
1862 III	168 27	141 29	95 37	322 38	+11 30	− 9·4	*nas*
1862 IV	225 26	351 16	160 51	127 27	−13 31	+ 30·1	*a*
1863 I	95 59	113 15	75 18	225 41	+74 9	+ 88·5 :	*an*
1863 II	341 11	244 4	103 35	248 38	−18 16	+ 54·7	*an*
1863 III	33 7	253 27	78 4	261 7	+32 18	+ 52·5	*an*
1863 IV	21 12	92 2	76 6	97 22	+20 33	+ 52·7	*an*
1863 V	96 13	310 55	79 1	70 40	+77 24	− 25·9	*na*
1863 VI	101 15	101 12	77 56	234 46	+73 33	+136·6 :	*ana*
1864 I	348 14	176 11	111 37	180 34	−10 55	−127·2	*n**
1864 II	231 33	175 22	156 18	306 17	−18 21	− 19·5	*a*
1864 III	248 4	39 33	128 54	162 12	−46 13	+144·8	*asa*
1864 IV	99 15	218 30	28 29	319 1	+28 5	−132·5	*a*

Komet	T	q	$\pi - ☊$	☊	i	Perihelpunkt l_0	b_0
1864 V	Dec. 27	1·11	178° 31'	340° 54'	162° 53'	162° 19'	+ 0° 26'
1865 I	Jan. 14	0·03	111 44	252 56	92 30	79 11	+68 8
1866 I ( )	Jan. 11	0·98	170 58	231 26	162 42	60 4	+ 2 41
1867 I ( )	Jan. 20	1·58	357 31	78 28	18 13	76 6	− 0 46
1867 II (T_1)	Mai 23	1·56	134 51	101 12	6 24	236 14	+ 4 32
1867 III	Nov. 6	0·33	148 37	64 59	96 34	248 59	+31 9
1868 II	Juni 26	0·58	126 37	52 15	131 33	273 59	+36 54
1869 II	Oct. 9	1·23	188 13	311 30	111 40	128 27	− 7 38
1869 III $(T_3\text{-}S)$	Nov. 18	1·06	106 14	296 44	5 24	43 2	+ 5 11
1870 I	Juli 14	1·01	198 13	141 45	121 48	311 55	−15 24
1870 II	Sept. 2	1·82	354 57	12 56	99 21	13 45	− 4 59
1870 IV	Dec. 19	0·39	90 36	94 45	147 16	4 2	+32 44
1871 I	Juni 10	0·65	222 31	279 19	87 36	101 31	−42 28
1871 II	Juli 27	1·08	96 20	211 54	101 59	93 47	+76 28
1871 IV	Dec. 20	0·69	242 53	147 6	98 20	311 19	−61 43
1873 II (T_2)	Juni 25	1·34	185 9	120 57	12 45	305 58	− 1 8
1873 IV	Sept. 10	0·79	193 47	230 35	95 59	49 7	−13 42
1873 V	Oct. 1	0·38	233 45	176 43	121 29	321 15	−43 27
1873 VII ( )	Dec. 1	0·73	195 23	250 20	30 1	83 44	− 7 37
1874 I	März 9	0·04	269 30	30 18	58 53	299 20	−58 53
1874 II	März 13	0·89	331 45	274 7	148 25	298 43	−14 22
1874 III	Juli 8	0·68	152 22	118 44	66 21	286 53	+25 8
1874 IV	Juli 17	1·69	149 36	215 51	34 8	9 57	+16 30
1874 V	Aug. 26	0·98	92 38	251 30	41 50	345 2	+41 48
1874 VI	Oct. 18	0·51	16 17	281 58	99 13	279 17	+16 4
1877 I	Jan. 19	0·81	347 10	187 15	152 55	198 43	− 5 48
1877 II	April 17	0·95	63 8	316 37	121 9	271 2	+49 46
1877 III	April 26	1·01	116 47	346 4	77 10	142 19	+60 30
1877 V	Juni 27	1·07	103 15	184 17	115 45	65 49	+61 15
1877 VI	Sept. 11	1·58	143 13	251 0	102 14	80 0	+35 49

Komet	$\pi'-\Omega'$		Ω'		i'		Perihelpunkt α_0		Perihelpunkt δ_0		$\alpha_0-A_0\pm180°$	H
1864 V	54°	3'	217°	34'	170°	55'	163°	53'	+ 7°	21'	+ 66°5	*a*
1865 I	89	18	253	19	85	36	334	14	+85	33	—142·5:	*s**
1866 I	139	34	202	55	143	20	57	16	+22	48	— 55·7	*na*
1867 I	44	38	35	7	32	10	75	0	+21	58	— 47·4	*a*
1867 II	221	8	16	13	23	2	235	1	—14	55	— 5·5	*a*
1867 III	170	38	69	19	105	48	251	53	+ 9	0	—150·2	*n**
1868 II	157	34	75	13	142	16	273	17	+13	30	— 2·7	*n**
1869 II	166	40	300	59	125	43	128	52	+10	47	+113·1	*a*
1869 III	52	54	349	4	26	18	38	55	+20	42	— 15·8	*a*
1870 I	212	51	147	22	102	34	319	22	—31	58	+ 25·7	*a*
1870 II	0	59	15	7	122	8	14	36	+ 0	50	+ 33·1	*a*
1870 IV	127	44	124	54	138	56	349	9	+31	18	— 99·0	*a*
1871 I	199	23	279	30	91	29	98	59	—19	23	—159·8	*ns**
1871 II	84	4	211	28	81	57	264	52	+80	1	— 41·4:	*n**
1871 IV	255	38	146	45	78	35	4	26	—71	43	— 84·1:	*as*
1873 II	274	40	33	41	19	58	308	39	—19	54	+ 34·2	*a*
1873 IV	175	39	231	4	81	2	50	23	+ 4	18	+ 60·9	*a*
1873 V	235	4	177	11	98	3	345	50	—54	16	— 22·5	*n**
1873 VII	147	51	291	58	30	32	83	33	+15	41	+ 15·6	*n**
1874 I	281	17	26	3	79	38	343	59	—74	44	+173·4:	*n**
1874 II	290	43	239	46	142	47	304	21	—34	27	+130·1	*a*
1874 III	176	56	106	56	57	6	285	15	+ 2	35	— 3·1	*ns**
1874 IV	106	21	255	2	19	53	2	22	+19	3	+ 65·1	*a*
1874 V	56	32	279	12	39	51	328	29	+32	19	— 7·3	*n**
1874 VI	352	42	277	19	103	12	278	59	— 7	6	—105·0	*n**
1877 I	343	26	184	17	129	34	195	0	—12	42	+ 73·0	*an*
1877 II	39	51	301	50	136	13	270	45	+26	19	+ 64·6	*n**
1877 III	111	12	346	13	99	57	190	14	+66	41	— 24·5:	*n**
1877 V	101	33	183	52	92	21	15	11	+78	13	+ 98·7:	*na*
1877 VI	121	4	247	51	93	53	74	15	+58	43	+ 84·3	*na*

Komet	T	q	π—☊	☊	i	Perihelpunkt l_0	Perihelpunkt b_0
1878 I	Juli 20	1·39	177° 34'	102° 16'	78° 11'	281° 46'	+ 2° 23'
1879 II	April 27	0·90	3 44	45 46	107 2	44 40	+ 3 34
1879 IV	Aug. 29	0·99	84 15	32 26	107 45	320 42	+71 22
1879 V	Oct. 4	0·99	115 26	87 11	77 8	242 6	+61 41
1880 I	Jan. 27	0·01	86 18	6 10	144 40	280 42	+35 15
1880 II	Juli 1	1·82	145 12	257 15	123 4	98 1	+28 35
1880 III	Sept. 6	0·35	323 7	45 19	141 54	75 53	− 21 45
1880...	Nov. 8	0·39	73 33	257 36	129 12	193	+48
1880 V	Nov. 9	0·66	11 41	249 23	60 42	255 10	+10 10
1881 II	Mai 20	0·59	173 48	126 24	77 58	305 6	+ 6 4
1881 III	Juni 16	0·73	354 15	270 58	63 26	268 23	— 5 9
1881 IV	Aug. 22	0·63	122 7	97 3	140 14	327 49	+32 49
1881 V ( )	Sept. 13	0·73	312 44	65 52	6 50	18 48	— 5 1
1881 VI	Sept. 14	0·45	6 18	274 10	112 49	271 43	+ 5 48
1881 VIII	Nov. 19	1·93	117 55	181 21	144 48	58 24	+30 37
1882 I	Juni 10	0·06	209 0	204 56	73 49	33 43	− 27 45
1882 II	Sept. 17	0·01	69 36	346 1	142 0	281 17	+35 15
1882 III	Nov. 12	0·96	254 19	249 7	96 9	48 14	—73 11
1883 I	Febr. 18	0·76	110 55	278 8	78 3	69 42	+66 3
1883 II	Dec. 25	0·31	138 39	264 25	114 59	104 48	+36 47
1884 II ( )	Aug. 16	1·28	301 2	5 9	5 28	306 18	— 4 41
1884 III (Wo	Nov. 17	1·57	172 43	206 19	25 16	19 42	+ 3 6
1885 II	Aug. 5	2·51	178 30	92 18	80 38	272 3	+ 1 29
1885 III	Aug. 10	0·75	43 26	204 29	59 20	230 15	+36 15
1885 V	Nov. 25	1·08	35 37	262 12	42 27	290 4	+23 8
1886 I	April 5	0·64	126 36	36 22	82 36	206 32	+52 46
1886 II	Mai 3	0·48	119 36	68 19	84 26	238 38	+59 55
1886 III	Mai 4	0·84	38 34	287 46	100 12	279 44	+37 50
1886 IV ( )	Juni 6	1·33	176 48	53 29	12 43	230 22	+ 0 42
1886 V	Juni 7	0·27	201 6	192 48	87 45	13 40	—21 4

Komet	$\pi'-\Omega'$		Ω'		i'		Perihelpunkt α_0		Perihelpunkt δ_0		$\alpha_0-A_0\pm180°$	H
1878 I	201°	24'	96°	31'	74°	18'	282°	34'	−20°	34'	− 17°8	*a*
1879 II	23	27	54	8	122	18	41	5	+19	40	−173·8	*n**
1879 IV	99	43	39	39	126	51	293	43	+52	4	− 44·1	*n**
1879 V	139	18	82	15	79	19	253	12	+39	51	−117·4	*n**
1880 I	97	57	17	3	167	45	278	56	+12	8	+148·9	*a*
1880 II	119	47	244	41	115	16	101	24	+51	43	+179·8	*n**
1880 III	2	24	79	4	153	28	76	54	+ 1	5	+ 90·6	*na*
1880...	46	37	241	54	120	54	213		+39		+168 ?	*a*
1880 V	344	42	263	55	55	10	255	2	−12	30	−150·4	*n**
1881 II	194	29	119	44	65	2	305	57	−13	6	+ 68·1	*a*
1881 III	328	28	282	6	66	9	268	10	−28	35	+ 2·7	*sn**
1881 IV	154	27	120	46	132	22	318	38	+18	35	− 13·2	*nas*
1881 V	6	2	13	53	26	56	19	15	+ 2	44	+ 27·3	*a*
1881 VI	340	52	264	14	112	29	271	47	−17	38	− 81·0	*an*
1881 VIII	117	17	180	55	121	21	46	10	+49	22	− 9·6	*na*
1882 I	196	51	210	29	52	58	40	50	−13	23	+141·8	*na*
1882 II	49	21	327	37	163	53	279	25	+12	10	− 75·7	*a*
1882 III	232	28	248	24	87	33	71	35	−52	23	+ 23·0	*as*
1883 I	87	29	282	12	82	15	354	7	+81	52	−158·4:	*n**
1883 II	113	36	254	34	110	38	113	27	+59	2	+ 19·4	*a*
1884 II	305	16	1	1	28	54	309	57	−23	14	− 16·8	*a*
1884 III	104	1	272	44	10	55	17	0	+10	35	− 37·1	*a*
1885 II	202	17	88	20	80	30	272	13	−21	58	− 44·1	*a*
1885 III	28	10	214	41	38	48	237	20	+17	12	− 83·5	*a*
1885 V	1	22	287	25	44	29	288	23	+ 0	57	−133·6	*an*
1886 I	140	32	36	53	101	31	226	13	+38	31	+ 31·0	*anas*
1886 II	141	21	67	53	93	17	250	30	+38	34	+ 29·7	*ans*
1886 III	15	17	282	20	106	23	277	55	+14	39	+ 56·1	*an*
1886 IV	213	15	19	12	32	35	228	7	−17	10	− 27·0	*a*
1886 V	195	30	194	9	64	55	20	51	−14	1	+125·0	*ns**

Komet	T		q	π—☊		☊		i		Perihelpunkt			
										l_0		b_0	
1886 VII *(Fi)*	Nov.	22	1·00	315°	6'	52°	29'	3°	2'	7°	37'	— 2°	8'
1886 VIII	Nov.	28	1·48	51	53	258	12	85	35	260	57	+31	47
1886 IX	Dec.	16	0·66	86	20	137	23	101	38	65	0	+77	49
1887 I	Jan.	11	0·01	65	22	339	38	137	37	281	27	+37	47
1887 II	März	17	1·63	159	25	279	56	104	16	105	13	+19	55
1887 III	März	28	1·01	36	32	135	27	139	47	105	56	+22	36
1887 IV	Juni	16	1·39	15	8	245	13	17	33	259	41	+ 4	31
1888 I	März	17	0·70	359	56	245	23	42	15	245	19	— 0	4
1888 III	Juli	31	0·90	59	12	101	30	74	12	126	4	+55	45
1888 V	Sept.	13	1·53	291	1	137	35	56	25	82	22	—51	3
1889 I	Jan.	13	1·81	340	28	357	25	166	22	16	27	— 4	31
1889 II	Juni	10	2·26	236	5	310	42	163	50	75	42	—13	21
1889 III (	Juni	20	1·10	60	8	270	58	31	13	327	5	+26	43
1889 IV	Juli	19	1·04	345	52	286	10	65	59	280	19	—12	53
1889 V *(Bs)*	Sept.	30	1·95	343	36	17	59	6	4	1	40	— 1	43
1889 VI	Nov.	29	1·35	69	39	330	36	10	15	39	57	+ 9	36
1890 I	Jan.	26	0·27	199	55	8	23	56	44	199	37	—16	33
1890 II	Juni	1	1·91	68	56	320	21	120	33	267	30	+53	28
1890 III	Juli	8	0·76	85	40	14	18	63	20	94	43	+63	1
1890 IV	Aug.	7	2·05	331	22	85	23	154	19	111	35	—11	59
1890 VI	Sept.	24	1·26	163	2	100	7	98	56	282	50	+16	45
1890 VII ( )	Oct.	26	1·82	13	19	45	5	12	50	58	5	+ 2	56
1891 I	April	27	0·40	178	45	193	56	120	31	14	34	+ 1	4
1891 IV	Nov.	12	0·98	268	33	217	39	77	43	120	52	—77	38
1892 I	April	6	1·03	24	30	240	55	38	42	260	30	+15	2
1892 II	Mai	11	1·97	129	20	253	26	89	42	73	4	+50	40
1892 III ( )	Juni	13	2·14	14	17	331	39	20	47	345	2	+ 6	1
1892 V ( )	Dec.	10	1·43	170	0	206	31	31	16	17	57	+ 5	10
1892 VI	Dec.	28	0·98	252	43	264	30	24	48	155	34	+23	36
1893 I	Jan.	6	1·20	85	13	185	38	143	52	101	33	+35	59

Komet	$\pi'-☊'$	$☊'$	i'	Perihelpunkt α_0	Perihelpunkt δ_0	$\alpha_0-A_0\pm180°$	H
1886 VII	2° 28'	5° 36'	25° 24'	7° 50'	+ 1° 4'	— 50°6	*a*
1886 VIII	8 40	260 54	81 16	262 13	+ 8 34	—162·5	*n**
1886 IX	102 4	138 11	84 9	292 40	+76 37	—151·9:	*ns**
1887 I	43 22	320 37	158 18	279 21	+14 42	+166·3	*s**
1887 II	135 13	273 19	107 1	109 31	+42 21	— 67·7	*n**
1887 III	55 35	148 3	121 10	110 59	+44 54	— 76·3	*a*
1887 IV	303 10	313 54	22 20	259 9	—18 33	— 6·1	*a*
1888 I	323 43	273 31	37 46	243 23	—21 15	+ 65·8	*a*
1888 III	83 34	94 6	70 58	165 2	+69 57	—146·2:	*n**
1888 V	315 4	121 28	41 13	84 34	—27 44	+ 92·8	*a*
1889 I	166 28	183 33	170 9	16 54	+ 2 18	—117·6	*a*
1889 II	147 13	224 21	162 26	75 54	+ 9 24	+176·3	*a*
1889 III	20 33	303 55	38 38	320 14	+12 39	+ 50·2	*a*
1889 IV	322 27	294 15	74 12	282 26	—35 54	— 16·8	*a*
1889 V	358 9	3 50	29 17	2 13	— 0 54	— 5·0	*a*
1889 VI	48 29	350 43	32 45	34 14	+23 54	— 32·0	*a*
1890 I	203 17	7 7	79 59	191 24	—22 55	+ 62·0	*n**
1890 II	47 7	306 27	136 54	268 17	+30 2	+ 18·4	*ana*
1890 III	91 19	12 47	86 9	121 43	+85 56	—166·4:	*n**
1890 IV	18 28	127 6	147 13	111 25	+ 9 52	+153·9	*a*
1890 VI	186 10	102 49	94 13	282 21	— 6 9	— 79·4	*na*
1890 VII	43 51	16 28	33 42	55 7	+22 36	+ 23·8	*a*
1891 I	173 12	192 5	97 39	12 59	+ 6 44	+157·9	*ns**
1891 IV	252 12	223 41	59 47	101 9	—55 22	+ 52·8	*as*
1892 I	345 4	273 20	33 11	260 44	— 8 7	+ 64·3	*a*
1892 II	106 44	254 51	83 12	53 22	+71 58	—175·6:	*n**
1892 III	358 8	345 39	42 50	344 17	— 1 16	+ 81·7	*a*
1892 V	124 3	249 39	14 18	14 33	+11 49	— 64·2	*a*
1892 VI	204 10	307 51	31 55	148 42	—12 30	+ 50·7	*a*
1893 I	82 37	183 51	120 29	108 11	+58 43	— 0·2	*n**

Komet	T		q	π—☊		☊		i		Perihelpunkt l_0		Perihelpunkt b_0	
1893 II	Juli	7	0·67	47°	8'	337°	20'	159°	58'	292°	0'	+14°	32
1893 IV	Sept.	19	0·82	347	44	174	56	129	49	182	52	— 9	24
1894 I ( )	Febr.	9	1·15	46	16	84	22	5	32	130	30	+ 4	[illegible]
1894 II	April	13	0·98	324	17	206	21	87	4	204	15	—35	39
1894 IV ( )	Oct.	12	1·39	296	35	48	45	2	58	345	21	— 2	[illegible]
1895 II ( )	Aug.	20	1·30	167	47	170	16	3	0	338	4	+ 0	[illegible]
1895 III	Oct.	21	0·84	298	46	83	5	76	15	59	40	—58	22
1895 IV	Dec.	18	0·19	272	40	320	31	141	37	47	6	—38	[illegible]
1896 I	Jan.	31	0·59	358	20	208	50	155	45	210	21	— 0	41
1896 III	April	17	0·57	1	44	178	15	55	34	179	14	+ 1	[illegible]
1896 IV	Juli	10	1·14	41	2	151	2	88	26	152	24	+41	[illegible]
1896 V ( )	Oct.	27	1·46	140	23	193	16	11	23	334	12	+ 7	14
1896 VII ( )	Nov.	24	1·11	163	53	246	35	13	40	50	54	+ 3	46
1897 I	Febr.	8	1·06	172	18	86	29	146	9	272	53	+ 4	[illegible]
1897 III	Dec.	8	1·36	65	57	32	3	69	37	70	1	+58	[illegible]
1898 I	März	17	1·09	47	15	262	25	72	33	280	23	+44	28
1898 V	Juli	25	1·50	22	25	278	17	166	51	256	24	+ 4	53
1898 VI	Aug.	16	0·63	205	36	259	6	70	2	88	24	—23	58
1898 VII	Sept.	14	1·70	233	18	73	59	69	55	278	44	—48	[illegible]
1898 VIII	Sept.	20	2·28	4	38	95	52	22	30	100	8	+ 1	46
1898 IX	Oct.	20	0·42	162	20	34	54	28	51	199	19	+ 8	[illegible]
1898 X	Nov.	23	0·76	123	34	96	20	140	21	325	35	+32	7
1899 I	April	12	0·33	8	40	24	59	146	16	17	45	+ 4	48
1899 V	Sept.	13	1·78	10	10	272	16	77	3	274	34	+ 9	54
1900 I	April	28	1·33	24	21	40	22	146	27	19	42	+13	[illegible]

Komet	$\pi'-\Omega'$	Ω'	i'	Perihelpunkt α_0	Perihelpunkt δ_0	$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$	H
1893 II	305° 47'	237° 33'	171° 0'	291° 26'	— 7° 17'	+ 4°3	*n**
1893 IV	349 50	175 57	106 26	178 51	— 9 45	-178·5	*n**
1894 I	118 27	13 21	24 35	134 8	+21 27	— 9·5	*a*
1894 II	313 9	208 58	66 13	185 42	—41 53	— 16·5	*sa*
1894 IV	340 35	5 11	25 30	347 33	— 8 13	— 30·3	*a*
1895 II	336 42	1 27	20 30	339 29	— 7 58	+ 9·3	*a*
1895 III	322 25	78 10	80 7	70 39	—36 56	+ 44·7	*an*
1895 IV	235 6	287 55	155 29	55 24	—19 54	— 31·0	*a*
1896 I	342 53	195 57	133 53	208 0	—12 15	+ 73·6	*an*
1896 III	3 2	177 18	32 8	179 52	+ 1 37	— 26·7	*an*
1896 IV	53 2	148 33	68 5	174 55	+47 50	—116·2	*na*
1896 V	345 4	348 3	12 38	333 28	— 3 14	— 59·6	*a*
1896 VII	83 42	324 11	21 45	47 24	+21 37	— 13·9	*a*
1897 I	211 17	118 17	140 51	273 3	—19 8	+130·5	*nas*
1897 III	78 8	29 50	89 48	30 47	+78 8	— 45·5:	*n**
1898 I	22 36	270 14	71 1	277 56	+21 18	+100·7	*an*
1898 V	313 37	212 12	155 1	255 46	—17 48	— 49·5	*a*
1898 VI	180 34	268 19	67 25	88 32	— 0 31	+122·4	*n**
1898 VII	256 21	67 29	77 46	288 35	—71 44	- 63·8	*as*
1898 VIII	56 15	48 55	30 20	101 10	+24 50	+103·3	*a*
1898 IX	179 42	21 12	49 46	201 0	+ 0 14	+175·3	*an*
1898 X	156 8	120 20	132 42	317 2	+17 18	—102·3	*na*
1899 I	47 25	60 51	164 26	14 30	+11 24	+172·9	*a*
1899 V	346 17	277 17	79 2	274 37	—13 28	— 77·4	*a*
1900 I	69 44	81 19	158 46	12 56	+19 52	+156·7	*a*

Die Tage der Perihelzeit T sind wie üblich bis zum Kometen 1582 nach dem Julianischen, vom Kometen 1585 an nach dem Gregorianischen Kalender angesetzt. Bei jenen Kometen der früheren Zeit, bei denen durch die Reduction auf den neuen Stil die Perihelzeit in den nächstfolgenden Monat rückt, ist diese Verschiebung durch das Zeichen [angedeutet.

Von den zwei letzten Columnen werde ich hier zunächst die mit $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$ überschriebene abhandeln, während die mit H überschriebene später erklärt werden wird.

Da die als Perihelregel bezeichnete Beziehung zwischen den Perihellängen l_0 und den Perihelzeiten T in der Untersuchung der Vertheilung der Perihelpunkte eine bedeutende Rolle spielt, so habe ich die durch die Übertragung der Perihelpunkte auf den Äquator gebotene Gelegenheit dazu benützt, sie auch in Bezug auf die Rectascensionen zu untersuchen, und zu diesem Zwecke ist analog der in der Abhandlung V enthaltenen Columne $l_0 - L_0 \pm 180°$ die Columne $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$ angelegt worden, wo A_0 die zur Zeit des Periheldurchganges T gehörende Rectascension der Sonne bedeutet. Diese hier nicht direct angesetzten Werte von A_0 sind meistens aus den in der Abhandlung V enthaltenen Sonnenlängen L_0 abgeleitet, wo übrigens auch die zu einer genaueren Bestimmung von L_0, beziehungsweise A_0 nöthigen ersten Decimalstellen des Tages mitgetheilt sind, während ich hier der Raumersparnis wegen bei T nur ganze Tage angesetzt habe. Das Vorzeichen von 180° ist stets so gewählt, dass der numerische Wert der Winkeldifferenz kleiner als 180° wird.

Um die Untersuchung der Perihelregel ganz einheitlich gestalten zu können, habe ich die in der Abhandlung V versuchte Abgrenzung zwischen Kometen mit kleinen und größeren Periheldistanzen ($q \lesseqgtr 0 \cdot 3$) hier ganz aufgegeben und ausschließlich die Differenzen $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$, aber nicht $\alpha_0 - A_0$ angesetzt. Durch dieses Fallenlassen der Grenze wird allerdings die Zahl der Ausnahmen von der Regel, d. h. die Zahl jener Werte von $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$, die näher an 180° als an 0° liegen, eine größere, doch wird dafür jede Willkür, mit welcher die Wahl einer Grenze zwischen Kometen mit kleinen und größeren Periheldistanzen behaftet ist, vermieden. Eine wesentliche Umgestal-

tung ist übrigens nicht zu befürchten, weil die Zahl der Kometen mit $q < 0\cdot 3$ ohnehin nicht viel mehr als den zehnten Theil sämmtlicher Kometen beträgt.

Zur Vergleichung stelle ich der Vertheilung der Werte von $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$ auch die von $l_0 - L_0 \pm 180°$ an die Seite, muss aber zu diesem Zwecke vorerst noch die in der Abhandlung V enthaltene Kometenliste, welche dort nur bis zum Kometen 1890 II reicht, bis zum Jahre 1900 fortsetzen.

Komet	T (mittl. Z. Paris)	L_0	l_0	b_0	$l_0 - L_0 \pm 180°$
1890 III	Juli 8·55	106°7	94°7	+63°0	+168°0
IV	Aug. 7·16	135·0	111·6	—12·0	+156·6
VI	Sept. 24·51	181·9	282·8	+16·7	— 79·1
VII	Oct. 26·53	213·6	58·1	+ 2·9	+ 24·5
1891 I	April 27·53	37·4	14·6	+ 1·1	+157·2
IV	Nov. 12·91	230·8	120·9	—77·6	+ 70·1
1892 I	April 6·65	17·8	260·5	+15·0	+ 62·7
II	Mai 11·23	51·4	73·1	+50·7	—158·3
III	Juni 13·35	83·2	345·0	+ 5·0	+ 81·8
V	Dec. 10·68	259·6	17·9	+ 5·2	— 61·7
VI	Dec. 28·10	277·4	155·6	+23·6	+ 58·2
1893 I	Jan. 6·50	287·0	101·6	+36·0	— 5·4
II	Juli 7·28	105·8	292·0	+14·5	+ 6·2
IV	Sept. 19·33	177·1	182·9	— 9·4	—174·2
1894 I	Febr. 9·47	321·2	130·5	+ 4·0	— 10·7
II	April 13·52	24·0	204·2	—36·0	+ 0·2
IV	Oct. 12·19	199·3	345·3	— 2·6	— 34·0
1895 II	Aug. 20·85	148·0	338·1	+ 0·6	+ 10·1
III	Oct. 21·06	207·9	59·7	—58·4	+ 31·8
IV	Dec. 18·33	266·7	47·1	—38·3	— 39·6
1896 I	Jan. 31·78	311·9	210·3	— 0·7	+ 78·4
III	April 17·65	28·6	179 2	+ 1·4	— 29·3
IV	Juli 10·95	109·5	152·4	+41·0	—137·1
V	Oct. 27·78	215·3	334·2	+ 7·2	— 61·1
VII	Nov. 24·62	243·4	50·9	+ 3·8	— 12·5
1897 I	Febr. 8·09	320·1	272·9	+ 4·3	+132·8
III	Dec. 8·70	257·4	70·0	+58·9	— 7·4
1898 I	März 17·08	357·0	280·4	+44·5	+103·4
V	Juli 25·52	123·0	256·4	+ 5·0	— 46·6
VI	Aug. 16·21	143·8	88·4	—24·0	+124·6
VII	Sept. 14·11	171·7	278·7	—48·8	— 73·0
VIII	Sept. 20·16	177·7	100·1	+ 1·8	+102·4
IX	Oct. 20·55	207·6	199·3	+ 8·4	+171·7
X	Nov. 23·16	241·4	325·6	+32·1	— 95·8
1899 I	April 12·98	23·3	17·7	+ 4·8	+174·4
V	Sept. 13·89	171·3	274·6	+ 9·9	— 76·7
1900 I	April 28·91	38·6	19·7	+13·2	+161·1

Man sieht, dass sich hier zwischen 0° und ±90° 23, zwischen ±90° und ±180° nur 14 Werte von $l_0 - L_0 \pm 180°$ befinden, dass also die Beziehung zwischen Perihellänge und Perihelzeit auch schon in diesen zehn Jahren zu erkennen ist, allerdings nicht so auffallend wie in der Gesammtheit der Kometen, ein Umstand, über dessen muthmaßlichen Grund S. 1075 eine Andeutung gemacht werden wird.

Bezeichnet man die Werte von $l_0 - L_0 \pm 180°$ und $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$ gemeinschaftlich als Perihel-Commutationen, so kann die Perihelregel kurz in folgender Weise ausgesprochen werden:

Die Kometen sind umso häufiger, je kleiner ihre Perihel-Commutationen sind.

In welchem Grade diese Regel von der Gesammtheit der Kometen bestätigt wird, zeigt die folgende Vertheilung:

	$l_0 - L_0 \pm 180°$	$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$
0° bis 30°	121	107
30 » 60	62	85
60 » 90	62	55
90 » 120	37	41
120 » 150	36	32
150 » 180	37	35

Wird das Intervall von 30° auf 60° vergrößert, so können die dadurch entstehenden drei Gruppen ziemlich sicher durch die folgenden Bemerkungen unterschieden werden:

	$l_0 - L_0 \pm 180°$	$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$	Komet im Perihel	Genäherte Distanz von der Erde Δ	Verhältnis zur Perihelregel
0° bis 60°	183	192	diesseits der ☉	$1-q$, $q-1$	Bestätigungen
60 » 120	99	96	seitlich	1	indifferent
120 » 180	73	67	jenseits der ☉	$q+1$	Ausnahmen

Ich habe nun auch hier ganz so wie in der II. Abhandlung, S. 21, ein Periheltableau angelegt, und zwar sowohl für die Längen l_0 als auch für die Rectascensionen α_0. M ist wieder die Anzahl der die Relation $l_0 = L_0 \pm 180°$, beziehungsweise

$\frac{T}{l_0}$	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	S	$\frac{S}{4}$	M	$M - \frac{S}{4}$
10— 40°	3	2	2	4	1	2	.	3	5	1	4	1	28	7	10	+ 3
40— 70	4	1	2	2	.	1	1	.	1	5	11	4	32	8	20	+12
70—100	9	1	2	.	3	2	3	1	7	3	5	4	40	10	18	+ 8
100—130	5	2	3	3	1	2	3	1	2	5	1	5	33	$8\frac{1}{4}$	12	+ $3\frac{3}{4}$
130—160	1	7	1	3	1	.	1	.	.	2	.	5	21	$5\frac{1}{4}$	9	+ $3\frac{3}{4}$
160—190	2	1	1	2	1	2	3	1	1	2	1	3	20	5	4	— 1
190—220	3	3	3	4	4	3	.	.	.	1	2	.	23	$5\frac{3}{4}$	11	+ $5\frac{1}{4}$
220—250	.	1	3	3	4	4	3	2	4	1	3	.	28	7	11	+ 4
250—280	.	1	2	5	4	10	5	1	7	3	6	2	46	$11\frac{1}{2}$	19	+ $7\frac{1}{2}$
280—310	3	1	3	1	3	4	6	2	2	1	2	2	30	$7\frac{1}{2}$	12	+ $4\frac{1}{2}$
310—340	1	.	1	.	.	2	2	9	2	2	1	4	24	6	13	+ 7
340—10	.	1	.	2	1	3	1	4	8	4	4	2	30	$7\frac{1}{2}$	16	+ $8\frac{1}{2}$
Summe....	31	21	23	29	23	35	28	24	39	30	40	32	355	$88\frac{3}{4}$	155	+ $66\frac{1}{4}$

$\frac{T}{\alpha_0}$	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	S	$\frac{S}{4}$	M	$M - \frac{S}{4}$
10— 40°	3	1	1	4	.	2	.	3	4	1	8	3	30	$7\frac{1}{2}$	13	+ $5\frac{1}{2}$
40— 70	4	.	3	2	2	1	1	.	4	4	6	3	30	$7\frac{1}{2}$	13	+ $5\frac{1}{2}$
70—100	8	1	1	.	2	3	.	1	6	4	5	3	34	$8\frac{1}{2}$	16	+ $7\frac{1}{2}$
100—130	5	2	2	3	.	.	2	1	1	5	5	4	30	$7\frac{1}{2}$	11	+ $3\frac{1}{2}$
130—160	1	5	1	1	.	.	1	.	1	2	.	3	15	$3\frac{3}{4}$	7	+ $3\frac{1}{4}$
160—190	.	3	1	4	1	2	5	1	1	2	.	5	25	$6\frac{1}{4}$	8	+ $1\frac{3}{4}$
190—220	4	2	2	3	4	3	1	.	1	1	2	.	23	$5\frac{3}{4}$	9	+ $3\frac{1}{4}$
220—250	1	1	6	4	5	6	3	1	4	.	1	1	33	$8\frac{1}{4}$	15	+ $6\frac{3}{4}$
250—280	3	3	3	5	5	9	6	2	6	4	5	2	53	$13\frac{1}{4}$	20	+ $6\frac{3}{4}$
280—310	.	.	1	1	3	4	6	4	2	.	3	3	27	$6\frac{3}{4}$	14	+ $7\frac{1}{4}$
310—340	2	1	.	2	1	3	2	9	5	1	2	3	31	$7\frac{3}{4}$	16	+ $8\frac{1}{4}$
340—10	.	2	2	.	.	2	1	2	4	6	3	2	24	6	12	+ 6
Summe....	31	21	23	29	23	35	28	24	39	30	40	32	355	$88\frac{3}{4}$	154	+ $65\frac{1}{4}$

$\alpha_0 = A_0 \pm 180°$ ganz oder fast ganz bestätigenden Kometen, also die Summe der jeweiligen drei fettgedruckten Zahlen. Es muss hier als Richtigstellung zur II. Abhandlung bemerkt werden, dass das Periheltableau allein für die terrestrische Ursache der Perihelanhäufungen bei 90° und 270° nichts beweist, indem es nur zeigt, dass die Perihelregel in allen Monaten des Jahres, den März etwa ausgenommen, bestätigt wird. Auch soll hier als Ergänzung einer schon in der V. Abhandlung mitgetheilten Berichtigung erwähnt werden, dass in der II. Abhandlung, weil dort die beiden Aufgaben — die Erklärung der vom Standpunkte der Kometenentdecker abhängigen ungleichmäßigen Vertheilung der Perihellängen und die Begründung der an keine Hemisphäre gebundenen, sondern für die Erde überhaupt geltenden Perihelregel — nicht hinreichend getrennt worden sind und weil mir schon damals eine Untersuchung wie die gegenwärtige vorschwebte, eine Verwechselung des Gegensatzes zwischen den Relationen $l_0 = L_0 \pm 180°$ und $l_0 = L_0$ mit dem Gegensatze zwischen Nord- und Südhemisphäre stattgefunden hat und dass die Bemerkung S. 23/24, es sei bei der Anlegung des Periheltableau nur der Standpunkt der Nordhemisphäre, aber nicht der der Südhemisphäre in Betracht gezogen worden, zu ersetzen ist durch die Bemerkung, dass bei Ermittelung der Zahlen M nur die Relation $l_0 = L_0 \pm 180°$, aber nicht $l_0 = L_0$ in Betracht gezogen worden ist. Übrigens kann diese letztere Relation auch in demselben Periheltableau zum Ausdrucke kommen, und zwar dadurch, dass die Zahlen bei jenen Monaten, die von dem betreffenden Perihelmonate um ein halbes Jahr abstehen, ein secundäres Maximum zeigen; dasselbe ist jedoch nur an wenigen Stellen und auch da nur in einem geringen Grade zu bemerken. (S. 1078.)

Nachdem nun die Giltigkeit der Perihelregel sowohl bezüglich der Perihellängen, als auch bezüglich der Perihelrectascensionen erwiesen ist, möchte ich auch eine nähere Untersuchung der Ausnahmen mittheilen, weil sie zeigt, dass selbst die Ausnahmen, d. h. sehr große Werte von $l_0 - L_0 \pm 180°$, beziehungsweise $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$, wenn auch gegen die Perihelregel, so doch wenigstens nicht gegen das Princip sprechen, welches ihr zugrunde liegt, nämlich, dass die Kometen desto leichter

gefunden werden, je günstiger die Umstände sind, unter denen wir sie sehen können.

Die Ausnahmen können in zwei Gruppen geschieden werden. Die einen bemerkt man stets dort, wo b_0 oder δ_0 sehr groß, beispielsweise schon über 60° ist. Bei diesen Kometen haben Ausnahmen nur wenig oder gar nichts zu bedeuten, weil l_0 und α_0 umso unsicherer wird, je mehr b_0, beziehungsweise δ_0 gegen 90° rückt. Das sind also eigentlich keine Ausnahmen, sondern nur Unbestimmtheiten. Anderseits können aber unter solchen Umständen auch Bestätigungen der Regel nicht schwer ins Gewicht fallen, ja es kann sogar vorkommen, dass durch den Übergang von der Ekliptik auf den Äquator so große Verschiedenheiten zwischen l_0 und α_0 entstehen, dass aus einer Bestätigung der Regel eine Nichtbestätigung wird und umgekehrt, ohne dass deshalb die Bestätigungen schwerer oder leichter ins Gewicht fallen würden, als die Nichtbestätigungen. Beispiele dafür bieten die Kometen 1677, 1683, 1763, 1780 II, 1826 V, 1847 VI, 1860 III, 1863 VI, 1865 I, 1871 II, 1886 IX.

Es sprechen daher die zu großen Werten von b_0 und δ_0 gehörenden Perihelcommutationen eigentlich nicht für und nicht gegen die Regel, und um diese Unsicherheit besonders hervorzuheben, habe ich allen jenen Differenzen $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$, welche zu großen Werten von b_0 und δ_0 gehören, das Zeichen : beigesetzt.

Von größerer Bedeutung ist die andere Gruppe von Ausnahmen, die ihren Grund darin hat, dass die betreffenden Kometen nicht in der Nähe des Perihels, sondern weit vom Perihel in die Erdnähe gekommen und beobachtet worden sind, was bekanntlich am häufigsten bei Kometen mit kleinen Periheldistanzen geschehen kann. In welcher Menge diese

Periheldistanz q	$l_0 - L_0 \pm 180°$	$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$
	zwischen 120° und 180°	
von 0·00 bis 0·33	24	22
» 0·34 » 0·66	22	19
» 0·67 » 0·99	12	12
» 1·00 » 1·33	8	6
über 1·33	7	8

Kometen unter den Kometen mit großen Perihelcommutationen vorkommen, zeigt das hier eingefügte Zahlentableau.

Dass hier die Kometen mit kleinen Periheldistanzen so zahlreich sind, hat seinen Grund natürlich darin, dass diese Kometen eben nicht anders als weit vom Perihel in die Erdnähe kommen können. Aber auch andere Kometen können unter diesen Umständen zur Beobachtung gelangen, wenn sie so erscheinen, dass sie zur Zeit des Perihels jenseits der Sonne sind. Während die Kometen mit kleinen Perihelcommutationen, also die weitaus meisten Kometen, im Perihel diesseits der Sonne sind und hier in die Erdnähe gelangen, ist ein Komet mit großer Perihelcommutation, bei dem also nicht $l_0-L_0 \pm 180°$ oder $\alpha_0-A_0 \pm 180°$, sondern l_0-L_0, beziehungsweise α_0-A_0 klein ist, im Perihel jenseits der Sonne, also $\Delta > 1$. Es kann dabei trotzdem noch zu einer bedeutenden Annäherung an die Erde kommen, aber nur auf einer vom Perihel verhältnismäßig weit entfernten Strecke. So sind die Kometen von 1472, 1665, 1764 vor dem Perihel, 1593, 1797 nach dem Perihel, 1680 und 1899 I sogar vor und nach dem Perihel nahezu symmetrisch in eine bedeutende Erdnähe gekommen, andere dagegen unserer Erde während der ganzen Erscheinung so ferne geblieben, dass selbst die kleinste Distanz von der Erde immer noch so groß blieb, dass sie nur um einen verhältnismäßig geringen Betrag kleiner war als $q+1$. Solche Kometen waren: 1860 II, 1880 V, 1885 V, 1886 VIII, 1888 III, 1890 III, 1892 II, 1898 VI, 1898 IX.

Diese Kometen waren nicht nur während des Perihels, sondern auch vor und nach dem Perihel jenseits der Sonne, eine Stellung, deren längeres Andauern durch eine kleine Neigung und directe Bewegung begünstigt wird und deren Extrem, nämlich die gänzliche Unsichtbarkeit eines Kometen, in der I. Abhandlung in dem Abschnitte: »Komet im Perihel jenseits der Sonne« untersucht ist. Wegen der großen Distanzen von der Erde können solche Kometen für uns nur verhältnismäßig geringe Helligkeiten erreichen, und das ist wohl der Grund davon, dass die zuletzt genannten Kometen alle der neueren Zeit angehören und ihre Auffindung nur durch das Fernrohr ermöglicht worden ist.

Dass unter den Kometen, welche nicht im Perihel, sondern weit vom Perihel beobachtet worden sind, nebst den Kometen mit kleinen Periheldistanzen auch verhältnismäßig viele mit sehr großen Periheldistanzen vorkommen (z. B. 1747, 1860 II, 1886 VIII), wird leicht erklärlich, wenn man bedenkt, dass diese letzteren Kometen infolge der wesentlich geringeren Verschiedenheit zwischen den Radienvectoren, also auch zwischen den Helligkeiten, schon verhältnismäßig weit vom Perihel fast so hell erscheinen, also auch fast so leicht sichtbar werden können, wie in der Nähe des Perihels.

Während die Kometen, die im Perihel jenseits der Sonne sind, im allgemeinen nicht im Perihel, sondern nur vor und nach dem Perihel beobachtet werden können (unter welchen die Kometen 1880 II, 1889 II, 1890 IV wegen ihrer nahezu symmetrischen Lage gegen die Erde besonders erwähnt werden sollen), gibt es unter ihnen doch einige, die nicht nur vor und nach dem Perihel, sondern auch im Perihel, also continuierlich beobachtet werden konnten, und zwar darum, weil sie für mittlere und höhere geographische Breiten in der Circumpolargegend des Himmels zu sehen waren (z. B. 1739, 1811 I, 1879 II, 1879 V, 1892 II). Diese Kometen sind für die spätere Untersuchung, nämlich bei der Betrachtung der für den Äquator unsichtbaren Kometen, insoferne von Wichtigkeit, als sie zeigen, dass wir in der Circumpolargegend des Himmels nicht nur von jenen Kometen mehr sehen können, welche die Perihelregel bestätigen, sondern auch von denjenigen, welche Ausnahmen von der Regel sind.

Es ist also bei allen diesen Ausnahmen der zweiten Gruppe, d. h. bei den Kometen, die im Perihel jenseits der Sonne standen und daher von der Begünstigung, während des Perihels in die Erdnähe zu kommen, ausgeschlossen waren, die Auffindbarkeit durch andere, wenn auch minder hervorragende Umstände erleichtert worden, so entweder durch eine bedeutende, wenn auch weit vom Perihel befindliche Erdnähe oder durch eine Begünstigung der Beobachter, sei es durch bessere Teleskope oder durch einen besseren Standpunkt auf der Erdoberfläche, und wir sehen somit auch hier dasselbe Princip zum Vorscheine kommen, welches der Perihelregel

zugrunde liegt, nämlich, dass die Kometen desto leichter gefunden werden, je günstiger die Umstände sind, unter welchen wir sie wahrnehmen können. Trotz dieser Begründung der Ausnahmen blickt aber doch überall die Thatsache durch, dass eine Annäherung an die Erde zur Zeit des Perihels — und das ist eben die Perihelregel — vor allen anderen Begünstigungen den Vorrang behauptet, und wir können somit sagen, dass durch diese Betrachtung der Ausnahmen die Perihelregel von ihrer Giltigkeit nichts verloren hat, sondern im Gegentheile noch fester begründet erscheint.

Wenn man nun, um die Versicherung zu erhalten, dass durch die hier besprochenen Eigenthümlichkeiten wirklich die Gesammtheit der Ausnahmen von der Perihelregel erschöpft ist, in dem Hauptverzeichnisse jene Kometen betrachtet, bei denen die Werte von $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$ sehr groß sind, so findet man thatsächlich, dass diese Kometen fast durchgehends eines der folgenden Merkmale zeigen: Entweder ist b_0 und δ_0 sehr groß, oder q sehr klein, in einigen Fällen sehr groß, oder der Komet ist in der letzten Columne *H*, die gleich auf den nächsten Seiten erklärt werden wird, mit *n* oder *s*, aber nicht mit *a* bezeichnet.

Ich glaube diese Betrachtung der Ausnahmen von der Perihelregel nicht besser schließen zu können, als mit den drei photographisch entdeckten Kometen 1892 V, 1898 VII und 1898 VIII. Bei diesen sind die numerischen Werte von $l_0 - L_0 \pm 180°$ der Reihe nach: 62°, 73°, 102°, die von $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$: 64°, 64°, 103°; sie gehören also nicht zu den kleineren, sondern schon zu den mittleren, bestätigen somit die Perihelregel nur wenig oder gar nicht. Der Grund davon ist offenbar der, dass bei photographischen Aufnahmen kleine Höhen, also geringe Elongationen von der Sonne, meistens vermieden und größere Höhen bevorzugt werden, in denen man natürlich im allgemeinen minder helle, gegen die Perihelregel indifferente Kometen findet. Da durch diesen Umstand die großen Perihelcommutationen dieser drei Kometen in ungezwungener Weise erklärt werden können und im allgemeinen wohl kaum ein Grund gegen die Behauptung vorzubringen ist, dass auch bei photographischen Aufnahmen von Kometen die

auffallendsten leichter entdeckt werden als die minder auffallenden, so können wir auch nach der Betrachtung der photographisch entdeckten Kometen an dem Ergebnisse festhalten, dass alle Kometen, mögen sie im Perihel, weit vom Perihel oder gar nicht in eine bedeutende Erdnähe kommen, mit einander das gemeinsam haben, dass unter ihnen stets die hellsten oder überhaupt die unter den günstigsten Verhältnissen erscheinenden am leichtesten entdeckt, also gewissermaßen die hervorragendsten bevorzugt und ausgelesen werden. Eine solche Auslese, und zwar im allgemeinen eine optische, bei den photographisch entdeckten Kometen eine photochemische, macht das Auge, das Fernrohr und die photographische Platte.

Die früher erwähnten Kometen, die trotz großer Distanzen von der Erde nicht nur vor und nach dem Perihel, sondern infolge unserer Begünstigung durch eine Circumpolargegend auch um die Zeit des Perihels beobachtet werden konnten. vermitteln schon den Übergang zu jenen Kometen, die am Äquator wesentlich schwerer als unter höheren Breiten oder gar nicht zu sehen waren, also zu dem eigentlichen Gegenstande der vorliegenden Abhandlung.

Ein unter höheren geographischen Breiten sichtbarer Komet kann für die Äquatorgegenden der Erde zunächst dann unsichtbar bleiben, wenn er sich in sehr hohen Declinationen bewegt, also für den Äquator stets in geringen Höhen bleibt, außerdem aber insbesondere auch dann, wenn seine geocentrische Bewegung eine derartige ist, dass er während des ganzen Verlaufes oder wenigstens während des größten Theiles seiner Erscheinung und insbesondere während seiner größten Helligkeit nahezu dieselbe Rectascension hat wie die Sonne, so dass er also nahe gleichzeitig mit der Sonne auf- und untergeht, am Tage über und in der Nacht unter dem Horizonte ist und höchstens in der Dämmerung tief am Horizonte gesehen werden könnte. Als zulässigen Spielraum wird man wohl das Intervall vom kosmischen bis zum heliakischen Auf- oder Untergange annehmen können. Es ist also, wenn α und δ die Rectascension und Declination des Kometen, A und D die der Sonne ist, das Augenmerk zu richten auf jene Kometen, bei denen die Differenz $\alpha - A$ klein, und (wegen der Forderung, dass der Komet

gleichzeitig unter höheren geographischen Breiten sichtbar sein soll) $\delta > D$ ist.

Die Höhe h, welche der Komet am Äquator im Momente des Auf- und Unterganges der Sonne hat, ergibt sich aus

$$\sin h = \sin(\alpha - A) \cos \delta,$$

aus welcher Formel auch zugleich zu ersehen ist, dass diese Höhe nicht nur dann klein ist, wenn $\alpha - A$ klein, sondern auch, wenn δ groß ist.

Das Ziel der Untersuchung sind also jene Kometen, für welche sich kleine Werte von h ergeben. Um diese Kometen ausfindig zu machen, mussten die Beobachtungsregister durchgesehen werden, weil man zur Erkennung solcher Kometen mit der Betrachtung der Bahnelemente nicht ausreicht, sondern den geocentrischen Lauf jedes Kometen verfolgen und mit den gleichzeitigen Positionen der Sonne vergleichen muss. Diese langwierige und besonders bei den Kometen der früheren Jahrhunderte zum Theil recht umständliche Arbeit ist mir übrigens bei diesen Kometen insoferne erleichtert worden, als ich dabei meine Untersuchungen über die Helligkeiten und Schweife der Kometen benützen konnte.

Ich habe nun von diesem Gesichtspunkte den geocentrischen Lauf sämmtlicher 355 Kometen des obigen Verzeichnisses untersucht und die Resultate in der letzten Columne H angedeutet, welcher Buchstabe Halbkugel oder Hemisphäre bedeuten soll.

Ergeben sich bei dieser Untersuchung für einen Kometen durchgehends so kleine Höhen h, dass er für die Äquatorgegenden als unsichtbar gelten kann, so ist er mit n oder s bezeichnet, je nachdem er auf der nördlichen oder auf der südlichen Erdhemisphäre zu sehen war.

Hat sich ein Komet ähnlich wie die Mehrzahl der Planeten von der Ekliptik oder dem Himmelsäquator so wenig entfernt, dass er während seiner ganzen Erscheinung für die Äquatorgegenden der Erde in der Nacht hinreichend hoch stand, um beobachtet werden zu können, aber infolge dessen auch auf jeder der beiden Erdhemisphären wenigstens bis in die mittleren Breiten und somit allgemein oder fast so gut wie allgemein zu sehen war, so ist er mit a bezeichnet.

Ist ein Komet während seiner Erscheinung durch mehrere dieser Sichtbarkeitsphasen gegangen, so sind dieselben durch Nebeneinanderstellung der betreffenden Buchstaben angedeutet. Hier können verschiedene Combinationen vorkommen. Die Bezeichnung *an* bedeutet, dass ein Komet in der ersten Partie seiner Erscheinung fast allgemein, also insbesondere auch am Äquator, in der zweiten nur unter höheren nördlichen Breiten zu sehen war, *na* dagegen, dass er anfangs nur unter nördlichen Breiten, gegen das Ende aber auch am Äquator zu sehen war. Die Bezeichnung *nas* will sagen, dass der betreffende Komet am Anfange seiner Erscheinung nur auf der nördlichen Halbkugel, später auch am Äquator, also nahezu allgemein, und gegen das Ende seiner Erscheinung nur auf der südlichen Halbkugel zu sehen war; ist ein Komet in analoger Weise von Süd nach Nord gegangen, so ist er mit *san* bezeichnet. War ein Komet, der in der ersten Partie seiner Erscheinung der nördlichen, in der letzten der südlichen Hemisphäre angehört hat, beim Übergange aus der einen Hemisphäre in die andere in den Sonnenstrahlen, also für die Erde überhaupt nicht zu sehen (z. B. 1871 I), so ist er nur mit *ns*, im Falle der entgegengesetzten Richtung seines Laufes (1881 III) mit *sn* bezeichnet.

Ich habe also im ganzen drei Grade der Sichtbarkeit, beziehungsweise Unsichtbarkeit unterschieden, nämlich:

1. Kometen, welche nur unter höheren Breiten, aber nicht am Äquator zu sehen waren; bezeichnet mit *n* oder *s*, aber nicht mit *a*. Diese Kometen bilden das Beweismaterial der vorliegenden Untersuchung und ihre Sichtbarkeitsverhältnisse sind weiter unten besonders dargelegt, auf welche Darlegungen in der Columne *H* durch ein den Buchstaben *n* oder *s* beigefügtes Sternchen (*) verwiesen ist.

2. Kometen, welche nur einige Zeit für den Äquator unsichtbar waren; bezeichnet mit *n* oder *s* in Verbindung mit *a*.

3. Kometen, die während der ganzen Erscheinung für den Äquator sichtbar waren; bezeichnet mit *a*.

Selbstverständlich kann die Grenze zwischen diesen drei Gruppen nicht überall streng gezogen werden und es ist in manchen Fällen nothwendig, auch noch auf andere Umstände Rücksicht zu nehmen. Ein solcher ist die Zeit der Erdnähe oder

der größten Helligkeit. Stand ein Komet, der während seiner größten Helligkeit für den Äquator unsichtbar war, vor oder nach dieser Zeit für den Äquator günstig, aber bei wesentlich geringerer Helligkeit, so habe ich den Buchstaben *a* nur dann beigesetzt, wenn Aussicht vorhanden gewesen wäre, dass der Komet mit denselben optischen Mitteln, welche den thatsächlichen Beobachtern zur Verfügung gestanden sind, am Äquator so weit hätte beobachtet werden können, dass die Beobachtungen zu einer Bahnbestimmung ausgereicht hätten. Aus diesem Grunde musste dem Kometen 1825 I, der mit Rücksicht auf die europäischen Beobachtungen nur den Buchstaben *n* bekommen hätte, auch noch *a* beigesetzt werden, weil er am Ende seiner Erscheinung nicht nur in Europa, sondern auch zu Stargard in Neuholland so ausreichend beobachtet worden ist, dass aus diesen letzteren Beobachtungen thatsächlich eine Bahn berechnet werden konnte.

Da es mir bei dieser Untersuchung nicht so sehr darum zu thun war, ob ein Komet auf beiden Erdhemisphären sichtbar gewesen ist, sondern hauptsächlich nur darum, ob er für den Äquator sichtbar war oder nicht, so habe ich auf jene Fälle, in denen ein auf der Nordhemisphäre entdeckter und beobachteter Komet der Rechnung zufolge später auch auf der Südhemisphäre unter ebenso günstigen oder vielleicht noch besseren Verhältnissen zu beobachten gewesen wäre, nicht Rücksicht genommen und den Buchstaben *s* nur dann beigefügt, wenn der Komet auf der südlichen Hemisphäre auch thatsächlich beobachtet worden ist. Aus diesem Grunde ist dem Kometen 1871 I nebst dem Buchstaben *n* auch noch *s* beigefügt worden, dem Kometen 1840 III aber nicht.

Besonders maßgebend für die Einreihung in die erste Gruppe war mir auch der gar nicht seltene Umstand, dass ein Komet, z. B. 1506, 1881 III, 1893 I, während des Beobachtungszeitraumes seine Conjunction mit der Sonne gehabt hat, also die Differenz $\alpha - A$ durch Null gegangen ist; in diesem Falle ist nämlich die Sichtbarkeit des Kometen für den Äquator jedenfalls durch längere Zeit, und zwar meistens sogar während der größten Helligkeit unterbrochen und in zwei wesentlich verkürzte Partien getrennt worden.

Trotz dieser Rücksichtnahme auf verschiedene Nebenumstände bleiben doch noch immer Kometen übrig, die fast mit demselben Rechte in eine andere Gruppe eingereiht werden könnten, als in der Columne *H* angegeben ist; z. B. 1748 I: *n* oder *an*; 1780 I: *n* oder *a*; 1784: *a* oder *asan*; 1787: *a* oder *asa*; 1788 II: *n* oder *an*; 1846 VII: *n* oder *an*; 1862 II: *n* oder *na*; 1880 I: *a* oder *sa*; 1892 II: *n* oder *na*.

Es darf auch nicht vergessen werden, was immerhin möglich ist, dass einige besonders helle Kometen, so z. B. 1847 I, 1865 I, 1874 III, 1887 I, die ich auf Grund ihres geocentrischen Laufes in die erste Gruppe eingereiht habe, in den Tropengegenden trotz geringer Elongation von der Sonne in der Dämmerung durch den Schweif oder durch die große Helligkeit des Kernes aufgefallen sein können.

Zum Glück ist es für das Resultat der vorliegenden Untersuchung so gut wie ganz gleichgiltig, ob ein Komet in die erste oder in die zweite Gruppe eingereiht wird, weil das Charakteristikum der für den Äquator unsichtbaren Kometen, nämlich die Steilheit der Neigungen, aus der einen dieser beiden Gruppen ebenso auffallend hervorgeht, wie aus der anderen, und anderseits eine Gleichmäßigkeit in der Vertheilung der Perihellängen durch die Ausscheidung der ersten Gruppe ebensowenig zu erreichen ist, wie durch die Vereinigung der ersten und zweiten Gruppe.

Um deutlich erkennen zu lassen, wie weit die Unsichtbarkeit für den Äquator erreicht werden kann, theile ich hier in abgekürzter Form die Sichtbarkeitsverhältnisse jener 97 Kometen mit, welche ich in die erste Gruppe eingereiht habe, die also in der Columne *H* mit *n* oder *s*, aber nicht mit *a* bezeichnet und durch das beigesetzte Sternchen (*) noch besonders kenntlich gemacht sind.

Die positiven Rectascensionsdifferenzen $\alpha - A$ geben, in Zeitmaß verwandelt, an, um welche Zeitdifferenz der Komet für den Äquator am Abend später untergegangen ist als die Sonne, die negativen, um wie viel er am Morgen früher aufgegangen ist als die Sonne.

Die daraus abgeleiteten Werte von h haben zwar dasselbe Vorzeichen wie $\alpha - A$, sind jedoch der Kürze halber ohne

Zeichen gelassen; sie geben daher, so wie sie angesetzt sind, wenn $\alpha—A$ positiv ist, die Höhe des Kometen am Äquator für den Moment des Sonnenunterganges, und, wenn $\alpha—A$ negativ ist, für den Moment des Sonnenaufganges. In jenen Fällen, in denen $\alpha—A$ größer als 90° ist, also im zweiten Quadranten liegt, ist für h nur die aus der Differenz $90°—\delta$ sich ergebende Maximalhöhe angesetzt.

Eigentlich sind die zu verschiedenen Declinationen gehörenden Höhen insoferne nicht gleichwertig, als ein Gestirn trotz gleicher Höhe verschieden lang über dem Horizonte verweilen kann, wenn es sich in verschieden hohen Declinationen befindet, und zwar in höheren Declinationen, dem größeren $\alpha—A$ entsprechend, länger, in niedrigeren kürzer, so dass also die Möglichkeit seiner Auffindung in jenem Falle größer ist als in diesem. Trotzdem geben aber kleine Höhen, zu welchen Declinationen sie auch gehören mögen, ein Maß für die geringe Sichtbarkeit eines Gestirnes, weil es bei kleinen Höhen nicht nur der tiefe Stand allein ist, der die Sichtbarkeit beeinträchtigt, sondern auch die bedeutende Extinction durch die Atmosphäre und bei Kometen noch insbesondere der Umstand, dass ein Komet, wenn er nicht einen fixsternähnlich glänzenden Kern besitzt, durch Schwächung seines Lichtes von seiner Auffälligkeit weit mehr verliert, als ein Fixstern von anscheinend gleicher Helligkeit.

Die Darlegungen der Sichtbarkeitsverhältnisse enthalten nebst bemerkenswerten Wendepunkten des geocentrischen Laufes (Conjunction mit der Sonne, Maximum von δ oder $\alpha—A$) stets den ersten und letzten Beobachtungstag. Zeigt eine weitere Untersuchung, dass es fraglich erscheint ob der betreffende Komet mit Recht in die Reihe der für den Äquator unsichtbaren Kometen aufgenommen worden ist, so ist meistens eine entsprechende Bemerkung beigefügt.

Dass bei einigen Kometen die ausgewählten Beobachtungen durch eine horizontale Punktreihe unterbrochen sind, soll andeuten dass der betreffende Komet in dieser Zwischenzeit in eine so geringe Elongation von der Sonne gekommen ist, dass er nirgends auf der Erde zu sehen war.

1433.

				α	δ	α—A	h
1433,	Sept. 15	China	....	210°	+55°	+29°	16°
	Oct. 5	Florenz	....	231	+27	31	27
	» 31	»	....	244	—14	+20	19

1506.

				α	δ	α—A	h
1506,	Juli 31	China	....	74°	+66°	—65°	22°
	Aug. 8	Polen	....	138	57	— 9	5
	» 14	»	....	167	+30	+15	13

1558.

Einigermaßen verlässlich sind nur die von Olbers (Berliner Jahrbuch 1817, S. 182) reducierten vier Ortsangaben von August 17 bis 23; wo der Komet vor und nach diesem Zeitraume gestanden, ist ungewiss.

			α	δ	α—A	h
1558,	Aug. 17	....	176°	+31°	+21°	18°
	» 23	....	194	+33	+33	27

1582.

Erste und letzte Beobachtung von Tycho Brahe auf Hveen:

			α	δ	α—A	h
1582,	Mai 12	....	67°	+35°	+ 8°	7°
	» 18	....	78	+44	+13	9

1590.

Erste und letzte Beobachtung von Tycho Brahe:

			α	δ	α—A	h
1590,	März 5	....	9°	24°	+23°	21°
	» 16	....	56	41	+60	41

1593.

			α	δ	$\alpha-A$	k
1593,	Juli 30	Zerbst in Anhalt..	115°	+45°	— 15°	11°
	Aug. 23	» » » ..	11	75	—142	15
	Sept. 2	» » » ..	325	+49	+163	41

1596.

			α	δ	$\alpha-A$	k
1596,	Juli 24	Kopenhagen	147°	+47°	+23°	15°
	Aug. 3	Hveen	166	+35	+32	26°

1618 I.

			α	δ	$\alpha-A$	k
1618,	Aug. 25	Kaschau	147°	+32°	— 7°	6°
	Sept. 1	Linz	139	38	21	16
	» 25	»	128	+43	—54	36

1672.

			α	δ	$\alpha-A$	k
1672,	März 2	Danzig	341°	+31°	— 3°	2°
	» 26	Paris	47	32	+40	33
	April 21	Danzig	80	+15	+50	48

1677.

Hauptsächlich beobachtet zu Danzig, Paris, Greenwich.

		α	δ	$\alpha-A$	k
1677,	April 26................	21°	+28°	—13°	12°
	Mai 2................	36	33	— 5	4
	» 8................	46	+30	0	0

1683.

Dieser zu Danzig, Verona und Greenwich beobachtete Komet stand zwar gegen das Ende seiner Erscheinung für den Äquator wesentlich günstiger, war aber schon viel lichtschwächer als am Anfange.

		α	δ	$\alpha - A$	h
1683,	Juli 23	109°	+52°	— 14°	9°
	Aug. 14	81	+47	64	37
	Sept. 5	30	— 5	—135	85

1718.

			Δ	α	δ	$\alpha - A$	h
1718,	Jan. 18	Berlin....	0·11	209°	+81°	—92°	9°
	» 23	»	0·26	18	51	+72	37
	Febr. 5	»	0·75	19	+35	+60	45

1739.

Beobachtet zu Bologna; gegen das Ende seiner Erscheinung wesentlich schwächer als in der ersten Hälfte.

		α	δ	$\alpha - A$	h
1739,	Mai 27	101°	+51°	+36°	22°
	Juli 3	80	37	—22	17
	Aug. 17	68	+ 7	—79	77

1743 II.

			α	δ	$\alpha - A$	h
1743,	Aug. 18	Haarlem	134°	+76°	—14°	3°
	» 24	»	187	57	+34	18
	Sept. 1	»	198	33	38	31
	» 13	»	200	+15	+29	28

1748 I.

Beobachtet zu Peking, Paris, Greenwich; für den Äquator nur am Anfange des Beobachtungszeitraumes günstig.

		α	δ	$\alpha - A$	h
1748,	April 25	338°	+22°	—55°	50°
	Mai 1	346	50	53	31
	» 9	5	70	—42	13
	Juni 4	86	76	+13	3
	» 30	108	+72	+ 8	2

1762.

			α	δ	α—A	h
1762, Mai	17	Haag..........	52°	+65°	— 3°	1°
Juni	12	Paris..........	125	49	+44	27
Juli	5	»	144	26	39	34
»	12	»	147	+21	+35	32

1764.

			α	δ	α—A	h
1764, Jan.	3	Paris..........	236°	+59°	—48°	23°
»	10	»	306	44	+14	10
»	20	»	324	26	21	19
Febr.	11	»	330	+ 9	+ 5	5

1766 I.

			α	δ	α—A	h
1766, März	8	Paris..........	18°	+15°	+28°	27°
»	11	»	21	14	29	28
»	15	»	24	+12	+28	28

1780 I.

			α	δ	α—A	h
1780, Oct.	26	Paris..........	174°	+14°	—38°	37°
Nov.	21	»	169	36	69	49
Dec.	3	»	163	+48	—88	42

1781 I.

			α	δ	α—A	h
1781, Juni	28	Paris..........	147°	+63°	+49°	20°
Juli	8	»	163	39	55	39
»	17	»	170	+10	+53	52

1785 II.

			α	δ	α—A	h
1785, März	11	Paris.........	7°	+27°	+15°	13°
»	22	»	3	28	+ 1	1
April	16	»	359	+12	—27	26

1788 I.

		α	δ	$\alpha - A$	h
1788, Nov. 25	Paris	167°	+47°	− 76°	41°
Dec. 2	»	16	85	+125	5
» 14	»	351	27	88	63
» 30	»	352	+12	+ 71	68

In der zweiten Hälfte seiner Erscheinung war der Komet schon wesentlich schwächer als in der ersten.

1788 II.

		α	δ	$\alpha - A$	h
1788, Dec. 21	Slough	279°	+32°	+ 8°	7°
» 28	Greenwich	278	38	− 1	1
1789, Jan. 7	Gr., Paris	276	45	14	10
» 20	Greenwich	273	54	30	17
Febr. 4	»	265	+67	−55	19

Diesen Zahlen zufolge hat der Komet die Bezeichnung *n* erhalten; da er aber, wie eine zu diesem Zwecke angestellte Rechnung zeigt, vor der Entdeckung für den Äquator günstig stand und noch dazu viel heller war, sollte er eigentlich mit *an* bezeichnet werden.

1790 III.

		α	δ	$\alpha - A$	h
1790, April 17	Slough	1°	+32°	−25°	21°
Mai 20	Conj., δ Max.,	19	63	−39	17
Juni 2	gr. Helligkeit	121	68	+50	17
» 29	Paris	160	+ 8	+61	60

1792 II.

	α	δ	$\alpha - A$	h
1793, Jan. 8	241°	+51°	−49°	28°
» 10	264	65	−29	12
» 12	338	+68	+44	15

Der Komet ist mit bloßen Augen entdeckt worden und stand zu dieser Zeit, wie diese drei Angaben zeigen, für den Äquator ungünstig; gegen das Ende seiner Erscheinung (letzte Beobachtung am 19. Februar) stand er zwar schon in der Nähe des Himmelsäquators in bedeutender Elongation von der Sonne, war aber bereits weit lichtschwächer als zur Zeit seiner Entdeckung.

1793 II.

			α	δ	α—A	h
1793,	Sept. 24	Paris	28°	+59°	—154°	31°
	Oct. 22	δ Max.	319	79	+111	11
	Dec. 8	Paris	261	+65	+ 5	2

1797.

		α	δ	α—A	h
1797,	Aug. 15	104°	+73°	— 42°	11°
	» 31	264	+11	+104	79

Dieser Komet ist ähnlich wie 1792 II bei beträchtlicher Erdnähe in hohen Declinationen mit bloßen Augen entdeckt worden (August 14 bis 17) und war zwei Wochen später zwar nahe am Äquator, aber selbst im Fernrohre lichtschwach.

1798 I.

			α	δ	α—A	h
1798,	April 12	Paris	50°	+24°	+28°	26°
	Mai 24	»	151	+68	+90	22

1799 I.

			α	δ	α—A	h
1799,	Aug. 6	Paris	108°	+43°	—29°	21°
	Sept. 3	Conj. u. δ Max...	162	+60	0	0
	Oct. 25	Paris	255	—13	+45	43

1801.

			α	δ	α—A	h
1801,	Juli 12	Marseille	110°	+70°	— 2°	1°
	» 23	Paris	152	+29	+29	25

1808 I.

			α	δ	α—A	h
1808, März	25	Marseille......	146°	+82°	+141°	8°
»	29	Petersburg....	96	74	88	16
April	2	»	83	+63	+ 71	26

1808 II.

			α	δ	α—A	h
1808, Juni	24	Marseille.....	54°	+59°	—39°	19°
»	29/30	δ Max., Conj...	99	63	0	0
Juli	3	Marseille.....	122	+58	+19	10

1810.

			α	δ	α—A	h
1810, Aug.	22	Marseille......	214°	+83°	+63°	6°
Sept.	21	»	181	54	+ 3	2
Oct.	8	»	179	+41	—15	11

1813 I.

			α	δ	α—A	h
1813, Febr.	5	Marseille......	340°	+45°	+21°	15°
»	17	(α—A) Max....	10	20	39	36
März	11	Marseille......	16	+ 6	+24	24

1816.

			α	δ	α—A	h
1816, Jan.	22	Marseille.......	241°	+86°	—63°	4°
Febr.	1	Paris..........	340	+60	+25	12

1819 II.

			α	δ	α—A	h
1819, Juli	1	Berlin.........	101°	+40°	+ 1°	1°
»	22	δ Max.	118	52	— 3	2
Aug.	31	δ Min..........	131	50	27	17
Oct.	15	Dorpat, Mailand.	133	+53	—69	34

1822 I.

			α	δ	α—A	k
1822,	Mai 13	Marseille	80°	+30°	+30°	26°
	» 16	(α—A) Max......	86	34	33	27
	Juni 22	Prag	97	+52	+ 6	4

1826 V.

			α	δ	α—A	k
1826,	Oct. 23	Florenz	215°	+44°	+ 8°	6°
	Nov. 12	Padua	231	+ 1	+ 3	3
...	...	...	...	...	...	...
	Nov. 29	Abo	247	+ 2	+ 2	2
1827,	Jan. 5	»	276	+30	—11	9

1827 I.

			α	δ	α—A	k
1826,	Dec. 27	Florenz	250°	+21°	—26°	24°
1827,	Jan. 19	Conj.	301	15	0	0
	» 26	Kremsmünster ..	315	+ 9	+ 7	7

1827 II.

			α	δ	α—A	k
1827,	Juni 20	Florenz, Marseille	30°	+66°	—58°	20°
	Juli 21	Florenz.........	186	+40	+66	45

Gegen das Ende seiner Erscheinung war der Komet schon viel lichtschwächer als am Anfange.

1827 III.

			α	δ	α—A	k
1827,	Aug. 2	Florenz	77°	+62°	—55°	22°
	» 29	Speier	153	+36	— 4	3
...	...	...	...	...	...	...
	Oct. 16	Mannheim	175	+22	—26	24

1840 II.

			α	δ	α—A	h
1840, Jan.	25	Berlin	304°	+63°	— 3°	1°
Febr.	25	(α—A) Max.....	15	38	+37	28
April	1	Kremsmünster ..	35	+16	+24	23

1840 III.

			α	δ	α—A	h
1840, März	6	Berlin...........	323°	+29°	—25°	22°
»	26	Pulkowa, Kremsmünster......	352	+22	—14	13

Nach einer Bemerkung von Encke (Astr. Nachr. 17, 233) hätte der Komet nach dem Perihel auf der Südhalbkugel beobachtet werden können.

1845 III.

			α	δ	α—A	h
1845, Juni	2	Parma..........	51°	+36°	—20°	16°
»	9	δ Max...........	85	45	+ 7	5
»	25	(α—A) Max.....	128	30	34	29
Juli	1	Washington	133	+24	+32	29

1846 VIII.

			α	δ	α—A	h
1846, Sept.	23	Rom	128°	+64°	—52°	20°
Oct.	15	Königsberg	188	45	13	9
»	25	Hamburg......	196	+34	—14	11

1847 I.

			α	δ	α—A	h
1847, Febr.	6	London	317°	+71°	—3°	1°
März	2	(α—A) Max.	352	52	+9	5
»	24	Kremsmünster, Cambridge Mass.	6	+19	+3	3
......	...	....	...	...	...	...
April	22	Berlin	35	+31	+5	4
»	24	Berlin, Markree.	36	+32	+5	4

1848 I.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1848, Aug.	7	Altona	94°	+41°	—44°	31°
»	26	Kremsmünster..	127	+13	—29	28

1851 IV.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1851, Oct.	22	Senftenberg	205°	+33°	—2°	2°
»	28	Conj...........	212	37	0	0
Nov.	21	Wien..........	237	+46	+1/2	0

1852 II.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1852, Mai	15	Marseille	338°	+66°	—74°	23°
»	24	δ Max..........	275	89	—47	1
Juni	14	Cambridge Mass.	164	+56	+81	33

1853 IV.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1853, Sept.	11	Berlin.........	127°	+45°	—43°	29°
Oct.	5	»	175	+ 4	—16	16
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Nov.	27	Berlin.........	225	+11	—19	19
Dec.	11	Olmütz	230	+18	—30	28

1854 III.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1854, Juni	4	Göttingen	30°	+32°	—42°	35°
»	25	Conj. und δ Max...	94	61	0	0
Juli	14	(α—A) Max......	149	41	+35	26
»	30	Kremsmünster ...	160	+26	+30	27

1854 IV.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1854, Sept.	11	Göttingen......	112°	+75°	—58°	13°
Oct.	2	(α—A) Min.	170	53	19	11
Nov.	14	Berlin.........	190	+ 4	—40	40

Mit Rücksicht auf die letzte Beobachtung sollte der Komet die Bezeichnung *na* erhalten; er ist jedoch in die erste Gruppe aufgenommen worden, weil er sich im November von der Erde schon wesentlich entfernt hatte.

1855 II.

			α	δ	α—A	h
1855, Juni	3	Florenz	100°	+36°	+29°	23°
»	14	(α—A) Max.....	125	34	42	34
»	30	Berlin	133	+31	+34	29

1857 I.

			α	δ	α—A	h
1857, Febr.	22	Leipzig	321°	+22°	—16°	15°
März	20	Conj.	0	44	0	0
»	27	δ Max.	22	47	+16	11
April	26	(α—A) Max.....	85	22	51	46
Mai	2	Florenz, Genf...	90	+17	+50	47

1857 III.

			α	δ	α—A	h
1857, Juni	22	Göttingen	52°	+40°	—40°	29°
Juli	5	δ Max.	90	50	—15	10
»	9	Conj.	109	48	0	0
»	19	Genf	141	+27	+22	19

1857 V.

			α	δ	α—A	h
1857, Aug.	20	Göttingen	80°	+77°	—70°	12°
»	23	δ Max.	122	81	—30	4
»	25	Conj.	154	79	0	0
Sept.	4	(α—A) Max. ...	202	48	+39	25
Oct.	3	Christiania	205	+ 5	+15	15

1857 VI.

			α	δ	α—A	h
1857, Nov.	10	Florenz	232°	+56°	+ 6°	3°
Dec.	1	(α—A) Max......	299	19	51	47
»	19	Berlin	311	+ 2	+43	43

1858 IV.

			α	δ	α—A	h
1858,	Mai 21	Berlin..........	24°	+40°	—34°	26°
	Juni 3	Conj. und δ Max..	72	52	0	0
	» 20	Padua..........	114	+37	+25	20

1859.

			α	δ	α—A	h
1859,	April 2	Venedig........	217°	+71°	—154°	19°
	» 10	Wien..........	166	77	+147	13
	» 23	Ann Arbor Mich.	105	61	74	28
	Mai 17	Florenz........	83	+21	+ 29	27
	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	Juni 26	Cambridge Mass.	49	+49	— 46	28
	» 30	» »	48	+54	— 51	27

1860 II.

			α	δ	α—A	h
1860,	April 17	Hamburg.......	42°	+48°	+15°	10°
	Mai 19	δ Max..........	86	56	30	16
	Juni 11	Cambridge Mass..	117	+53	+36	21

1862 II.

			α	δ	α—A	h
1862,	Juli 2	Athen, Marseille..	359°	+57°	—103°	33°
	» 4	δ Max. u. Erdnähe	288	78	—175	12
	» 30	Clinton.........	199	+ 1	+ 69	69

1864 I.

			α	δ	α—A	h
1864,	Sept. 9	Florenz........	156°	+35°	—13°	11°
	Oct. 10	Leipzig........	162	+54	—35	20

1865 I.

			α	δ	α—A	h
1865,	Jan. 20	Melbourne......	311°	—37°	+ 9°	7°
	März 17	(α—A) u. δ Max..	22	57	25	13
	Mai 2	Capstadt.......	59	—57	+19	10

1867 III.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1867,	Sept. 26	Nauen	145°	+51°	−38°	23°
	Oct. 15	Conj.	200	35	0	0
	» 31	Helsingfors	226	+ 3	+10	10

1868 II.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1868,	Juni 13	Karlsruhe	47°	+47°	−36°	24°
	» 24/25	δ Max. u. Conj.	93	56	0	0
	Juli 17	Athen	160	+ 7	+43	43

1871 I.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1871,	April 7	Karlsruhe	37°	+54°	+21°	12°
	» 24	$(\alpha-A)$ Max.	55	44	23	16
	Mai 16	Athen	72	+29	+19	17
	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	Aug. 5	Capstadt	153	−54	+18	10

1871 II.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1871,	Juni 14	Mailand	157°	+57°	+74°	31°
	Aug. 2	Conj.	132	60	0	0
	Sept. 10	δ Max.	105	61	−64	26
	» 20	Hamburg	91	+60	−87	30

1873 V.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1873,	Aug. 23	Paris	112°	+60°	−41°	19°
	Sept. 16	Wien	170	+19	− 5	5
	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	Nov. 28	Pola	205	−17	−40	38
	Dec. 17	»	205	−13	−61	58

Als der Komet nach seinem am 1. October erfolgten Periheldurchgange wieder aus den Sonnenstrahlen heraus-

getreten war, stand er zwar für den Äquator günstiger, war aber schon viel lichtschwächer als im August und September.

1873 VII.

			α	δ	α—A	h
1873, Nov.	10	Marseille	246°	+27°	+20°	18°
»	16	Straßburg	233	+10	+ 1	1

Die rasche geocentrische Bewegung des Kometen lässt die Möglichkeit zu, dass derselbe vor seiner Entdeckung durch einige Zeit auch am Äquator zu beobachten gewesen wäre.

1874 I.

			α	δ	α—A	h
1874, Febr.	20	Straßburg	309°	+26°	—25°	22°
»	25	Pola, Wien	320	+18	—19	18

1874 III.

			α	δ	α—A	h
1874, April	17	Marseille	97°	+70°	+ 71°	19°
Juni	8	δ 2. Max.	104	69	+ 27	9
Juli	17	Christiania	117	+34	0	0
......	...	....	.....	.....	.....	...
Juli	27	Melbourne.....	119	—14	— 8	8
Oct.	18	Cordoba Arg. ..	110	—78	—104	12

1874 V.

			α	δ	α—A	h
1874, Juli	25	Marseille	238°	+60°	+113°	30°
Aug.	31	δ Max.	177	74	+ 17	5
Sept.	6	Conj.	164	74	0	0
Oct.	20	Hamburg......	105	+56	—101	34

1874 VI.

			α	δ	α—A	h
1874, Dec.	6	Marseille	240°	+36°	—14°	11°
1875, Jan.	7	Leipzig	253	+69	—36	12

1877 II.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1877,	April 5	Straßburg......	332°	+15°	—43°	41°
	» 27	(α—A) Max. ...	341	51	—54	31
	Mai 13	Conj. u. δ Max...	51	80	0	0
	» 30	(α—A) Max.....	131	62	+63	25
	Juli 13	Athen.........	147	+33	+34	28

1877 III.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1877,	April 10	Odessa........	9°	+52°	—10°	6°
	» 19	Conj...........	28	58	0	0
	» 28	δ Max..........	55	62	+19	9
	Mai 28	(α—A) Max.....	121	38	55	40
	Juni 4	Oxford.........	127	+31	+54	44

1879 II.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1879,	Juni 16	Rochester N.-Y. ..	37°	+58°	—48°	23°
	Juli 15	δ Max............	...	90	...	0
	Aug. 23	Cambr. Mass.....	233	+53	+80	36

1879 IV.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1879,	Aug. 24	Straßburg.....	185°	+61°	+31°	14°
	Sept. 18	Königsberg ...	212	+27	+36	32

1879 V.

			α	δ	$\alpha-A$	h
1879,	Aug. 21	Pola.........	151°	+49°	0°	0°
	Oct. 12	(α—A) Max....	225	13	+27	26
	» 22	Rom..........	233	+ 3	+26	26

1880 II.

		α	δ	α—A	k
1880, April 6	Ann Arbor Mich..	110°	+84°	+94°	6°
Juni 8	Nicolajew	98	+49	+21	14
....	....	....	....	....	....
Sept. 3	Orwell Park Obs..	104	+23	—59	52
» 10 } » 11 }	Paris	104	+21	—66	59

1880 V.

		α	δ	α—A	k
1880, Dec. 16	Kopenhagen.....	282°	+11°	+17°	17°
1881, Jan. 8	(α—A) Max......	308	23	18	17
März 31	Paris	14	+40	+ 3	2

1881 III.

		α	δ	α—A	k
1881, Mai 22	Windsor N. S. W...	74°	—36°	+15°	12°
Juni 8	Conj.	77	17	0	0
» 12	Melbourne	78	— 7	— 3	3
....	....	....	....	....	....
Juni 22	Kiel.............	83	+40	— 9	7
Juli 5	Conj.............	105	76	0	0
» 18	δ Max.	159	82	+41	5
Nov. 2	(α—A) Max.......	290	68	72	21
1882, Febr. 14	Cambr. Mass......	4	+55	+35	19

1883 I.

		α	δ	α—A	k
1883, Febr. 23	Phelps und Rochester N.-Y...	342°	+28°	+ 6°	5°
März 4	δ Max............	5	32	20	17
April 8	(α—A) Max.......	61	18	44	41
» 24	Athen (nur gesehen)	73	+12	+41	40

1886 V.

			α	δ	α—A	h
1886,	April 27	Phelps N.-Y.	4°	+62°	—31°	14°
	Mai 28	Wien	50	+34	—16	13
....						
	Juli 3	Windsor N.S.W..	122	— 8	+20	20
	» 30	Capstadt	155	—12	+25	24

1886 VIII.

			α	δ	α—A	h
1887,	Jan. 23	Nashville Tenn....	287	+25°	—19°	17°
	März 2	(α—A) Max.	317	48	27	18
	Mai 22	Wien	46	+67	—14	5

1886 IX.

			α	δ	α—A	h
1886,	Oct. 4	Nashville Tenn. ...	159°	+ 1°	—32°	32°
	Nov. 3	(α—A) Max.	179	7	40	40
	Dec. 4	δ Max.	236	18	—15	14
	» 13	Conj.	261	+16	0	0
1887,	Jan. 13	Mailand	305	— 3	+10	10
....						
	April 29	Capstadt	346	—28	—51	43
	Juni 16	» » » »	350	—44	—95	46

In der letzten Beobachtungsperiode war der Komet schon viel lichtschwächer als in der ersten.

1887 I.

			α	δ	α—A	h
1887,	Jan. 21	Adelaide	316°	—43°	+13°	9°
	» 29	Capstadt	0	—49	+48	29

1887 II.

			α	δ	α—A	h
1887, Jan.	22	Phelps N.-Y.....	270°	+71°	—35°	11°
Febr.	4	δ Max..........	335	80	+17	3
»	28	(α—A) Max.....	50	57	69	31
April	23	Orwell Park Obs..	75	+20	+44	41

1888 III.

			α	δ	α—A	h
1888, Aug.	7	Geneva N.-Y.....	151°	+44°	+13°	9°
»	10	δ Max..........	157	45	16	11
Sept.	26	(α—A) Max.	229	+18	45	42
Oct.	30	Wien	252	0	+37	37

1890 I.

			α	δ	α—A	h
1889, Dec.	12	Marseille	272°	+49°	+11°	7°
»	26	Conj............	276	+33	0	0
1890, Jan.	16	Ann Arbor	282	— 2	—16	16

1890 III.

			α	δ	α—A	h
1890, Juli	18	Marseille	132°	+45°	+14°	10°
Aug.	13	Mt. Hamilton ...	166	+23	+23	21

1891 I.

			α	δ	α—A	h
1891, März	29	Mt. Hamilton ...	15°	+45°	+ 7°	5°
April	13	Pulkowa	24	+29	+ 2	2
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Mai	19	Windsor N.S.W..	45	—16	—11	11
Juni	4	Conj...........	73	37	0	0
»	24	δ Max..........	122	48	+29	19
Juli	9	Cordoba Arg. ...	148	—46	+39	26

1892 II.

Dieser von März 1892 bis Jänner 1893 beobachtete Komet stand zwar in der zweiten Hälfte seiner Erscheinung für den Äquator ganz günstig, war aber schon lichtschwächer und befand sich in den ersten Monaten, wie man aus den folgenden Zahlen ersieht, mit der Sonne so nahe in Conjunction, dass er für den Äquator gewiss nicht zu beobachten gewesen wäre.

			α	δ	α—A	h
1892, März	18	Bristol........	340°	+59°	—18°	9°
April	21	Conj..........	30	59	0	0
Mai	5	(α—A) Max....	45	56	+ 2	1
»	20	Conj..........	58	52	0	0
Juni	22	....	77	43	— 15	11
Juli	16	....	86	+37	—30	24

1893 I.

			α	δ	α—A	h
1892, Nov.	19	Geneva N.-Y.....	194°	+13°	—42°	41°
Dec.	17	(α—A) Max.	210	35	—56	43
1893, Jan.	6	Conj. u. δ Max....	288	66	0	0
»	25	(α—A) Max.......	353	41	+44	31
März	11	Bordeaux	12	+20	+20	19

Dieser und der folgende Komet wären zwar am Anfange und am Ende der Erscheinung für den Äquator zu sehen gewesen, sind aber unter die mit *u* bezeichneten Kometen aufgenommen worden, weil der Beobachtungszeitraum für den Äquator durch die mit der größten Helligkeit zusammentreffende Conjunction mit der Sonne gerade um die günstigste Partie verkürzt worden ist. Daran kann auch der Umstand, dass der zweite Komet nach seiner zweiten Conjunction mit der Sonne im November 1893 noch einigemale in einer auch für den Äquator günstigen Stellung beobachtet worden ist, nichts mehr ändern, weil die Helligkeit zu dieser Zeit schon beträchtlich kleiner war, als während der Haupterscheinung.

1893 II.

		α	δ	α—A	h
1893, Juni 19	Randolph Ohio....	41°	+17°	—48°	45°
Juli 8	Conj. und δ Max....	108	49	0	0
» 24	(α—A) Max.......	175	22	+51	46
Aug. 16	Bordeaux, Capstadt	184	+10	+37	36

1893 IV.

		α	δ	α—A	h
1893, Oct. 16	Geneva N.-Y.	185°	+13°	—17°	17°
Dec. 1	(α—A) Max......	210	53	—37	21
» 26	Conj............	276	75	0	0
» 29	δ Max...........	289	76	+10	2
1894, Jan. 8	Straßburg	325	+73	+35	10

1897 III.

		α	δ	α—A	h
1897, Oct. 16	Mt. Hamilton....	54°	+67°	—148°	23°
» 30	δ Max..........	345	82	+130	8
Nov. 27	Univ. of Virginia .	274	+58	+ 30	15

1898 VI.

		α	δ	α—A	h
1898, Juni 14	Mt. Hamilton....	52°	+59°	—32°	16°
Juli 22	(α—A) Min......	100	38	22	17
Aug. 10	Mt. Hamilton	119	+16	—22	21

Nach dem Perihel war der Komet für die Südhalbkugel sichtbar, aber für den Äquator noch weniger zu sehen, als während des hier untersuchten Beobachtungszeitraumes vor dem Perihel.

Diese hier vorgeführten Kometen sind also diejenigen, welche am Erdäquator entweder gar nicht oder nur so wenig sichtbar waren, dass sie, wenn wir auf Beobachtungen in den Äquatorgegenden angewiesen wären, wohl kaum zu unserer Kenntnis gelangt wären. Ihre Zahl ist, wie schon bemerkt wurde, 97, während die Zahl der bloß auf der Nordhemisphäre

beobachteten, also der bloß mit *n*, aber nicht mit *s* bezeichneten Kometen 89, somit ungefähr den vierten Theil der uns bekannten Kometen beträgt. Es werden sich zwar auch unter diesen Kometen noch mehrere finden, die außer auf der nördlichen auch noch auf der südlichen Erdhemisphäre zu beobachten gewesen wären, doch ist die Zahl derselben voraussichtlich keine bedeutende, und wir können demnach erwarten, dass auch nach Abzug dieser Kometen für diejenigen, welche weder für den Äquator, noch für die Südhalbkugel, sondern ausschließlich auf der Nordhalbkugel zu sehen waren, immer noch eine große Zahl, vielleicht der fünfte oder sechste Theil sämmtlicher Kometen, übrig bleibt. Da wir nun für die Südhalbkugel dieselben Verhältnisse voraussetzen dürfen, wie sie auf der Nordhalbkugel stattfinden, so dürfen wir annehmen, dass ungefähr ebenso viele Kometen erschienen sind, die nicht am Äquator und nicht unter nördlichen Breiten, wohl aber auf der Südhalbkugel zu beobachten waren, von denen aber bis jetzt nur zwei, nämlich die mit *s* bezeichneten Kometen 1865 I und 1887 I zu unserer Kenntnis gelangt sind, während alle anderen für uns verloren gegangen sind.

Wir werden nun nachsehen, wie die Ausscheidung der für den Äquator unsichtbaren Kometen auf die Vertheilung der Perihellängen und der Perihel-Rectascensionen wirkt. Ist die Anzahl dieser Kometen k, die der gesammten Kometen K, so ergibt sich die folgende Vertheilung:

l_0	K	k	$K-k$
0° — 30°	36	9	27
30 — 60	34	4	30
60 — 90	34	12	22
90 —120	39	14	25
120 —150	22	6	16
150 —180	19	2	17
180 —210	22	6	16
210 —240	26	7	19
240 —270	38	15	23
270 —300	43	15	28
300 —330	27	4	23
330 —360	15	3	12

α_0	K	k	K—k
0°— 30°	28	4	24
30 — 60	33	6	27
60 — 90	29	8	21
90 —120	33	10	23
120 —150	20	3	17
150 —180	22	6	16
180 —210	23	6	17
210 —240	28	5	23
240 —270	40	20	20
270 —300	41	14	27
300 —330	29	4	25
330 —360	29	11	18

Theilt man, den vier Jahreszeiten entsprechend, die Peripherie in nur vier gleiche Theile, so findet man:

l_0	K	k	K—k
315°— 45°	81	19	62
45 —135	107	30	77
135 —225	60	11	49
225 —315	107	37	70

α_0	K	k	K—k
315°— 45°	91	21	70
45 —135	87	22	65
135 —225	67	14	53
225 —315	110	40	70

Was zunächst die Vertheilung überhaupt betrifft, so zeigen die Columnen *K*, dass die Maxima und Minima bei den Perihellängen l_0 sehr bestimmt hervortreten, während sie bei den Perihel-Rectascensionen α_0 schon einigermaßen verwischt sind. Es erscheint daher die Untersuchung der Perihellängen im allgemeinen lehrreicher, als die der Rectascensionen. Was die Wirkung der Ausscheidung der für den Äquator unsichtbaren Kometen betrifft, so zeigt sich, dass durch die Ausscheidung die Perihelansammlungen in der Nähe von 90° und 270° allerdings bedeutend vermindert werden, dass jedoch auch an

anderen Stellen Perihelpunkte wegfallen und so insbesondere die Minima um 0° und 180° immer noch bestehen bleiben. Eine gleichmäßige Vertheilung ist also durch diese Ausscheidung gewiss nicht erreicht worden.

Um zu sehen, ob vielleicht eine noch tiefer eingreifende Ausscheidung zu einem wesentlich anderen Resultate führt, habe ich versucht, auch noch jene 105 Kometen auszuscheiden, welche nur theilweise für den Äquator unsichtbar gewesen sind, also diejenigen, welchen in der Columne *H* nebst *n* oder *s* auch noch der Buchstabe *a* beigesetzt ist. Diese Kometen des zweiten Grades der Unsichtbarkeit sind jedoch, wie die folgenden Zahlen zeigen, bezüglich ihrer Perihellängen und -Rectascensionen so gleichmäßig vertheilt, dass durch ihre Ausscheidung an der Vertheilung der Perihelpunkte so gut wie gar nichts mehr geändert wird.

	l_0	α_0
315°— 45°	24	28
45 —135	28	22
135 —225	25	25
225 —215	28	30
	105	105

Man braucht daher diese Kometen gar nicht mehr auszuscheiden, indem schon die Kometen des ersten Grades der Unsichtbarkeit alles erkennen lassen, was durch die Ausscheidung erreicht werden kann; was dieses ist, wird sofort dargelegt werden.

Dass die Ausscheidung der für den Äquator unsichtbaren Kometen auch solche Kometen treffen kann, deren Perihellängen oder -Rectascensionen nicht in der Nähe der Maxima liegen, ist zwar von vorneherein selbstverständlich, weil der Umstand, dass wir in der Circumpolargegend des Himmels solche Kometen sehen können, die am Äquator unsichtbar sind, in jeder Jahreszeit und bei jedem Sonnenstande eintreten kann, doch ist es eigentlich auch gar nicht nothwendig, dass alle für den Äquator unsichtbaren Kometen zur Entstehung von Perihelanhäufungen Veranlassung geben, sondern es behält das Princip der Ausscheidung auch dann seine Bedeutung, wenn

nur eine beschränkte, aber bestimmt hervortretende Partie dieser Kometen zur Bildung eines Maximums beiträgt. Das ist nun thatsächlich der Fall, indem die für den Äquator unsichtbar gewesenen Kometen eine Beziehung zwischen unseren Sommerkometen und dem Maximum der Perihellängen bei 270° enthalten, die man aber erst dann erkennt, wenn man untersucht, in welche Monate die Periheldurchgänge der für den Äquator auszuschließenden Kometen fallen. Man findet die folgende Vertheilung, zu welcher noch bemerkt werden soll, dass in die Wintermonate eigentlich 18 Kometen fallen, hier aber für die Nordhemisphäre nur 16 in Betracht kommen können, weil die zwei anderen, nämlich 1865 I und 1887 I, der Südhemisphäre zugezählt werden müssen.

T	k
Februar, März, April	23
Mai, Juni, Juli..................	34
August, September, October	22
November, December, Jänner	16

Man sieht, dass unter diesen Kometen die Sommerkometen am häufigsten, die Winterkometen am seltensten sind, so zwar, dass die ersteren ungefähr das Doppelte der letzteren betragen, und da somit gezeigt ist, dass es unter den verschiedenen Jahreszeiten besonders der Sommer ist, in welchem wir in unseren Breiten Kometen sehen können, die am Äquator unsichtbar sind, so ergibt sich auf Grund der Perihelregel, dass das Maximum der Perihellängen bei 270° wenigstens zum Theile durch solche Kometen entsteht, die unter höheren Breiten, aber nicht am Äquator zu sehen sind.

Ganz anders verhält es sich mit dem Maximum bei 90°. Während wir zu dem Maximum bei 270° solche Kometen beitragen sehen, die am Äquator unsichtbar sind, in unserem Sommer in geringen Elongationen von der Sonne beobachtet werden können und, wie schon in der II. Abhandlung bemerkt worden ist, im allgemeinen mäßige Periheldistanzen, nämlich im Mittel $q = 0 \cdot 6$, besitzen, wird man bezüglich des Maximums bei 90° zu solchen Kometen geführt, die bei uns im Winter in großen Elongationen von der Sonne, ja sogar in der Opposition

beobachtet werden können, was natürlich am leichtesten bei jenen Kometen möglich ist, welche große Periheldistanzen, nämlich gegen 1 und darüber hinaus, besitzen (eine Verschiedenheit, die auf eine Beziehung zwischen der Größe der Periheldistanzen q und den Perihellängen l_0, wenigstens bei $l_0 = 90°$ und 270° deutet), und daraus ergibt sich von selbst, dass diese letzteren Kometen nicht zu denjenigen gehören können, die für den Äquator unsichtbar sind, sondern dass sie im Gegentheile am Äquator im allgemeinen so gut wie unter höheren Breiten zu sehen sind. Dass sie aber trotzdem bei uns zu einem Maximum beitragen können, wird erklärlich, wenn man ihre Periheldistanzen mit denen der Gesammtheit der Kometen vergleicht.

Der Mittelwert der Periheldistanzen sämmtlicher Kometen liegt zwischen 0·8 und 0·9, ist somit nur wenig kleiner als 1. Er ist zwar, der zunehmenden Stärke der optischen Hilfsmittel entsprechend, von den früheren Jahrhunderten bis auf die Gegenwart allmählich größer geworden, indem sich für die Kometen bis zum Ende des 18. Jahrhunderts als Mittelwert der Periheldistanzen 0·7, für das 19. Jahrhundert bis zu den Siebzigerjahren 0·8 bis 0·9 und von da bis zum Ende des Jahrhunderts 1·0 ergibt, liegt aber doch noch immer in der Nähe von 1, und dieser Wert erscheint auch ganz naturgemäß, weil durch ihn die Auffindung von Kometen, die während der Sonnennähe auch in die Erdnähe kommen, wesentlich begünstigt wird.

Es ist jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass solche Kometen unter höheren Breiten auch thatsächlich gefunden werden, nicht in allen Jahreszeiten dieselbe. Am größten ist sie im Winter, am kleinsten im Sommer. Am größten natürlich dann, wenn die mit der Sonne in Opposition stehende Partie des Himmels in der Nacht ihren höchsten Stand erreicht, und das ist bei uns im Winter der Fall. Hier können wir am leichtesten Kometen in großen Elongationen und sogar in der Opposition beobachten und daher nicht nur solche Kometen, deren Periheldistanzen dem Mittelwerte gleichkommen, sondern auch noch solche, deren Periheldistanzen über diesen Mittelwert hinausgehen, und dadurch ergibt sich von selbst eine größere Menge von

Kometen, deren Perihellängen bei 90° liegen. Im Sommer liegt die der Sonne gegenüberstehende Partie des Himmels bei uns zu tief und daher können uns hier Kometen, die in größere Elongationen und in die Opposition kommen, ganz entgehen, doch können wir dafür im Sommer, wie schon dargelegt wurde, Kometen in der Circumpolargegend des Himmels in geringen Elongationen von der Sonne sehen, und zwar insbesondere solche, die sich zwischen der Erde und der Sonne befinden und daher im allgemeinen Periheldistanzen von mäßiger Größe haben.

Wie groß diese sein mögen, geht aus der folgenden Betrachtung hervor, die dadurch veranlasst worden ist, dass die oben bemerkte Beziehung zwischen l_0 und q auf Grund der vollkommen erwiesenen Beziehung zwischen l_0 und T, nämlich der Perihelregel, auch eine Beziehung zwischen T und q erwarten lässt. Untersucht man, um diese Beziehung nachzuweisen, wie sich die Periheldistanzen bezüglich ihrer Größe auf die Perihelmonate vertheilen, so ist von derselben in der Gesammtheit der Kometen nicht viel zu bemerken, auch dann nicht, wenn statt der Perihelmonate die Entdeckungsmonate in Betracht gezogen werden. Wählt man das Intervall zwischen den Periheldistanzen zu groß, so können sich die maßgebenden Differenzen gegenseitig verwischen, wählt man es zu klein, so haben Zufälligkeiten zu großen Einfluss auf die Vertheilung. Relativ am besten ist die Beziehung zu erkennen, wenn man die Periheldistanzen so zusammenfasst, dass das Intervall für q ungefähr $\frac{1}{3}$ beträgt; es zeigt sich dann, dass im Sommerhalbjahre die Periheldistanzen bei 0·5, im Winterhalbjahre die bei 0·8 etwas häufiger sind; das Übergewicht ist aber nur gering. Ganz bestimmt tritt jedoch die Beziehung zwischen T und q hervor, wenn man nicht die gesammten, sondern nur die für den Äquator unsichtbaren Kometen betrachtet. Diese Verschiedenheit darf nicht überraschen, denn wenn schon die Beziehung zwischen l_0 und q nur bei gewissen Kometen zu bemerken ist, nämlich bei denjenigen, welche die Perihelregel bestätigen, so ist auch die Beziehung zwischen T und q nur bei einer beschränkten Zahl von Kometen zu erwarten. Untersucht

man nun, wie sich die Periheldistanzen der für den Äquator unsichtbaren Kometen auf die Perihelmonate vertheilen, so findet man:

$\frac{T}{q}$	Februar, März, April	Mai, Juni, Juli	August, September, October	November, December, Jänner
0·00—0·24	3	3	4	3
0·25—0·49	4	6	4	3
0·50—0·74	6	15	6	3
0·75—0·99	6	6	8	2
1·00—1·24	2	2	.	4
$>$1·24	2	2	.	3
	23	34	22	18

Hier tritt die in der Gesammtheit der Kometen bloß angedeutete Beziehung zwischen T und q bestimmt dadurch hervor, dass die Periheldistanzen der Sommerkometen ein Maximum zeigen. Dieses liegt, wie aus einer noch mehr specialisierten Untersuchung hervorgeht, in der Nähe von $q = 0·6$, und das dürfte auch ungefähr die Stelle sein, wo wir am leichtesten Kometen mit verhältnismäßig kleinen Periheldistanzen zugleich bei kleinen Radienvectoren r und kleinen Distanzen von der Erde Δ beobachten können. In den angrenzenden Jahreszeiten, im Frühling und Herbst, ist bei diesen Kometen von einem Maximum der Häufigkeit gewisser Periheldistanzen schon viel weniger und im Winter gar nichts zu bemerken. Es lassen demnach die für den Äquator unsichtbaren Kometen im Sommer eine Beziehung zwischen T und q erkennen, in den anderen Jahreszeiten, insbesondere im Winter, aber nicht.

Diese Betrachtungen haben also deutlich gezeigt, dass die Perihelansammlung bei 90°, wenigstens soweit sie hier untersucht worden ist, in anderer Weise zustande kommt, als die bei 270°. Während zu der bei 270° solche Kometen beitragen, die am Äquator unsichtbar sind, bei uns im Sommer infolge unserer Begünstigung durch eine Circumpolargegend gesehen werden können und mäßige Periheldistanzen haben (q in der Nähe von 0·6), kommt bei 90° ein Maximum, wenigstens theilweise, darum zum Vorscheine, weil hier im Winter der Umstand,

dass der durchschnittliche Wert der Periheldistanzen sämmtlicher Kometen bei 0·8 und 0·9 liegt, nicht nur vollständig, sondern auch noch darüber hinaus zum Durchbruche kommen kann (q gegen 1 und noch größer).

Zu den Kometen, die wir in größeren Elongationen und sogar in der Opposition mit der Sonne beobachten können, gehören auch die kurzperiodischen Kometen, insbesondere die mit $q > 1$, welche in dieser Hinsicht eine Ähnlichkeit mit den kleinen Planeten zeigen. Da diese Kometen fast durchgehends sehr lichtschwach sind, so ist es zu ihrer Auffindung besonders nothwendig, dass sie der Erde recht nahe kommen, und dies wird am leichtesten ermöglicht, wenn die Opposition mit dem Perihel zusammentrifft. Das ist nun bei diesen Kometen auch thatsächlich der Fall gewesen, indem sie in der Entdeckungserscheinung die Perihelregel bestätigt haben, und dadurch ist auch schon die Lage ihrer Perihelpunkte gegeben. Infolge dieser Positionen tragen die kurzperiodischen Kometen jedenfalls zu einem Übergewichte der nördlichen Perihelpunkte bei. Dasselbe ist aber nicht groß, indem sich, wenn man sämmtliche in dem Verzeichnisse als periodisch bezeichnete 43 Kometen berücksichtigt, zwischen $l_0 = 180°$ und $360°$ 18, zwischen $0°$ und $180°$ 25 Perihelpunkte, also hier nur um 7 mehr befinden, und überdies kommt zu beachten, dass diese 43 Perihelpunkte ihr Maximum nicht bei 90°, sondern schon in früheren Längen, nämlich ungefähr zwischen 305° und 80° haben (hier 30 Perihelpunkte), so dass also diese 30 Kometen nicht so sehr dem Winter, als vielmehr dem Herbste angehören, ein Umstand, an dem möglicherweise die Klarheit unserer Herbstzeit mitwirkt.

Zu den Perihellängen um 90° herum tragen übrigens auch einige Kometen des Sommerhalbjahres bei, nämlich solche, die nicht im Perihel, sondern wie die Kometen mit kleinen Periheldistanzen, weit vom Perihel beobachtet worden sind, für welche also nicht $l_0 - L_0 \pm 180°$ oder $\alpha_0 - A_0 \pm 180°$, sondern $l_0 - L_0$, beziehungsweise $\alpha_0 - A_0$ klein ist; solche sind: 1808 I, 1846 V, 1871 I, 1880 II, 1889 II, 1890 III. Zu einer ausreichenden Erklärung eines Maximums bei 90° sind zwar auch diese Kometen zu wenig, doch ist es wenigstens für das Wesen der Erklärung

von Bedeutung, dass sie fast alle für den Äquator unsichtbar waren. Und das ist die dritte und letzte Partie von Kometen, die man zur Erklärung des Maximums bei 90° vorführen kann.

Die Ausscheidung der für den Äquator unsichtbaren Kometen hat also bis jetzt gezeigt, dass unter diesen Kometen nur die unseres Sommers zu den Perihelansammlungen in einer leicht erkennbaren und erklärbaren Beziehung stehen, und zwar die im Perihel beobachteten zu den Längen bei 270°, die weit vom Perihel beobachteten, in weit geringerer Zahl vorhandenen, zu den Längen bei 90°. Zu einer vollständigen Erklärung der Maxima sind diese und die anderen hier citierten Kometen zu wenig.

Und doch kann an einer terrestrischen Ursache dieser Maxima schon von vorneherein nicht gezweifelt werden, denn abgesehen davon, dass dieselben im Falle eines kosmischen Grundes, also z. B. in dem Falle eines Zusammenhanges mit der Eigenbewegung unserer Sonne, nicht an zwei einander diametral gegenüberliegenden Stellen auftreten könnten, sondern nur an einer einzigen, ist es auch noch von Wichtigkeit, dass sich das Überwiegen der Perihellängen bei 90° und 270° über die bei 0° und 180° nicht in allen Zeitaltern der Kometenentdeckungen zeigt, indem es z. B. von 1840 bis 1864 fast gar nicht, von 1880 bis 1890 aber ganz besonders zu bemerken ist. Aus diesen Schwankungen lässt sich entnehmen, dass diese Maxima sehr von Zufälligkeiten beeinflusst werden, jedenfalls mehr als die Perihelregel. Wollte man aber trotzdem an eine kosmische Ursache denken, so müsste man ein zeitweiliges Aufhören und dann wieder Stärkerwerden derselben annehmen, was nicht zulässig ist.

Es bleibt daher, wenn an der terrestrischen Ursache der ungleichmäßigen Vertheilung der Perihelpunkte festgehalten werden soll und die Betrachtung der Maxima zu keinem befriedigenden Resultate führt, nichts übrig, als auch die Minima zu betrachten, also nicht nur nachzusehen, welche Kometen zur Häufung der Perihellängen bei 90° und 270° beitragen können, sondern auch, ob eine Verminderung der Perihellängen bei 0° und 180° wahrscheinlich gemacht werden kann, und zu diesem Zwecke setzen wir die Untersuchung des Einflusses der für den

Äquator unsichtbaren Kometen auf die Vertheilung der Bahnbestimmungsstücke fort, bis wir zu den Neigungen gelangen.

Ich werde zunächst die Perihelbreiten b_0 betrachten, wobei es nothwendig erscheint, zuerst noch die allgemeine Vertheilung derselben darzulegen und dabei insbesondere die Frage zu erledigen, ob auch die Periheldeclinationen δ_0 der theoretischen Forderung, dass zwischen 0° und 30° ebensoviele Perihelpunkte liegen sollen, wie zwischen 30° und 90°, in demselben Grade entsprechen, wie die Perihelbreiten b_0. Man findet:

	b_0	δ_0
Zwischen +90° und +30°	103	98
» +30 » 0	115	112
» 0 » —30	94	95
» —30 » —90	43	50
	355	355

Hier fällt sofort auf, dass die Perihel-Declinationen fast genau so vertheilt sind, wie die Perihelbreiten. Auch darin herrscht Übereinstimmung, dass sich der nördliche Standpunkt der meisten Kometenentdecker durch die auffallend geringe Zahl der südlichsten Perihelpunkte bemerkbar macht, indem sich zwischen —30° und —90° kaum halb so viel Perihelpunkte befinden, als auf Grund der nördlichen Periheipunkte zu erwarten wäre. Übrigens würde auch diese Menge noch wesentlich geringer sein, wenn nicht die Sichtbarkeit mehrerer dieser Kometen (z. B. 1506, 1780 I, 1827 III, 1847 I, 1853 IV) dadurch ermöglicht worden wäre, dass sie kleine Periheldistanzen besitzen. Wir können nämlich auf der Nordhemisphäre von den Kometen mit sehr südlichen Perihelpunkten hauptsächlich nur diejenigen sehen, welche den größten Theil ihrer Bahn auf der Nordhemisphäre haben und nicht so sehr im Perihel, als vielmehr weit vom Perihel zur Beobachtung gelangen können, und diese Begünstigung der höheren Breiten ermöglichen eben ganz besonders die Kometen mit kleiner Periheldistanz.

Es erscheint noch von Wichtigkeit, nachzusehen, ob dieses Zahlenverhältnis auch dann zu bemerken ist, wenn bei der Betrachtung der Perihelbreiten und Perihel-Declinationen auch auf die Perihellängen, beziehungsweise Perihel-Rectascensionen

wenigstens angenähert Rücksicht genommen wird. Ich habe zu diesem Zwecke die Peripherie in vier gleiche Theile getheilt.

l_0 / b_0	0°	90°	180°	270°
	315°—45°	45°—135°	135°—225°	225°—315°
+90° bis +30°	22	34	15	32
+30 » 0	32	31	12	40
0 » —30	19	29	28	18
—30 » —90	8	13	5	17
	81	107	60	107

α_0 / δ_0	0°	90°	180°	270°
	315°—45°	45°—135°	135°—225°	225°—315°
+90° bis +30°	29	28	18	23
+30 » 0	33	35	14	30
0 » —30	19	13	23	40
—30 » —90	10	11	12	17
	91	87	67	110

Wesentlich neue Zahlenverhältnisse sind durch diese Vertheilung nicht entstanden. In der zweiten und dritten Reihe, nämlich bei +30° bis 0° und 0° bis —30° sind zwar kleine Verschiebungen zu bemerken, doch können dieselben in den Columnen 0° und 180° wohl kaum begründet werden, und die großen Zahlen in den Columnen 270° würden sich wesentlich vermindern, wenn die Kometen mit kleiner Periheldistanz, die eigentlich ganz abgesondert betrachtet werden sollten, ausgeschlossen werden würden. Auffallend erscheint nur der Umstand, dass durch den Übergang von der Ekliptik zum Äquator von den Zahlen der beiden Reihen +30° bis 0° und 0° bis —30° in der Columne 90° die erste größer, die zweite kleiner, in der Columne 270° die erste kleiner, die zweite größer geworden ist. Diese Verschiebung lässt sich aber leicht

erklären. Sie hat nämlich ihren Grund darin, dass in der Strecke von 0° bis 180°, also insbesondere bei 90°, der Äquator südlich von der Ekliptik, dagegen in der Strecke von 180° bis 360°, also insbesondere bei 270°, der Äquator nördlich von der Ekliptik liegt und dass daher durch den Übergang von der Ekliptik zum Äquator bei 90° die Menge der nördlichen Perihelpunkte um die Anzahl der zwischen der Ekliptik und dem Äquator befindlichen Perihelpunkte vergrößert und die der südlichen verkleinert wird, dagegen bei 270° die Menge der nördlichen Perihelpunkte um die Anzahl der zwischen dem Äquator und der Ekliptik liegenden Perihelpunkte verkleinert und die der südlichen vergrößert wird.

Übrigens steht der besonders auffallende Umstand, dass südlich von der Ekliptik bei 270° 35, bei 90° 42, also ungefähr ebensoviele Perihelpunkte, dagegen südlich vom Äquator bei 270° 57, bei 90° nur 24, also wesentlich weniger Perihelpunkte liegen, in Übereinstimmung mit dem für die vorliegende Untersuchung sehr wichtigen Satze, dass die größten Helligkeiten der Kometen an die Ekliptik, nicht an den Äquator gebunden erscheinen.

Untersuchen wir nun, wie die Perihelbreiten b_0 und Perihel-declinationen δ_0 der für den Äquator unsichtbaren Kometen vertheilt sind, so findet man:

	b_0	δ_0
Zwischen +90° und +30°	42	38
» +30 » 0	26	23
» 0 » —30	14	20
» —30 » —90	15	16
	97	97

Hier sind die Perihelpunkte auf die verschiedenen Breiten, beziehungsweise Declinationen nicht in demselben Verhältnisse vertheilt, wie in der Gesammtheit der Kometen und insbesondere treten die nördlichsten auffallend hervor. Während sich dort zwischen +90° und +30° nahe so viele Perihelpunkte befinden, wie zwischen +30° und 0° oder zwischen 0° und —30°, sind hier in der nördlichsten Gruppe ungefähr so viele Perihelpunkte, wie in den zwei mittleren zusammengenommen. Der Grund dieser Häufigkeit wird sofort klar, wenn man

bemerkt, dass die Perihelpunkte der nördlichsten Gruppe meistens mit größeren Periheldistanzen verbunden vorkommen, denn durch diese Combination wird es am leichtesten ermöglicht, die am Äquator unsichtbaren Kometen unter nördlichen geographischen Breiten in der Nähe des Perihels zu beobachten.

Auch die südlichsten, nämlich die zwischen —30° und —90° befindlichen Perihelpunkte treten hier mehr hervor, als in der Gesammtheit, indem sie hier fast so zahlreich sind, wie die zwischen 0° und —30° befindlichen. Auch dieses Hervortreten findet seine Erklärung in den Periheldistanzen, mit denen diese Perihelbreiten, beziehungsweise -Declinationen meistens verbunden sind, und zwar in der Kleinheit derselben. Es kann nämlich der schon früher erwähnte Umstand, dass wir auf der Nordhemisphäre von den Kometen mit sehr südlichen Perihelpunkten hauptsächlich diejenigen sehen können, welche kleine Periheldistanzen haben, besonders bei jenen Kometen hervortreten, die von der Sonne aus einen fast direct nach Norden gerichteteten Lauf haben und demnach längere Zeit mit der Sonne in nahezu derselben Rectascension bleiben können, und solche Kometen gehören eben zu denjenigen, die zwar unter höheren Breiten, aber nicht am Äquator zu sehen sind.

Nachdem nun gezeigt ist, wie die Ausscheidung der für den Äquator unsichtbaren Kometen auf die Vertheilung von l_0 und α_0, T und q, b_0 und δ_0 wirkt, untersuchen wir noch den Einfluss auf die Vertheilung der Knotenlängen und Neigungen. Es erscheint auch hier sehr zweckmäßig, sowohl die eklipticalen als auch die äquatorialen Elemente in Betracht zu ziehen, weil sich durch Vergleichung der Vertheilung von ☊ und ☊$'$, i und i' leicht entscheiden lässt, ob hier und da auftretende größere oder geringere Ansammlungen reell oder nur zufällig sind. Es ist nämlich der Unterschied zwischen den auf die Ekliptik und den auf den Äquator reducierten Knotenlängen, wenn auch bei kleinen Neigungen sehr bedeutend, im allgemeinen und so insbesondere bei großen Neigungen doch zu gering, als dass man beim Übergange von der einen dieser Fundamentalebenen auf die andere eine wesentlich andere Vertheilung der Knotenlängen erwarten dürfte, und was die Differenz zwischen den Neigungen i und i' betrifft, so ist dieselbe höchstens so groß

wie die Schiefe der Ekliptik. Wir dürfen demnach behaupten, dass ein bei der einen Fundamentalebene bemerktes Maximum oder Minimum der Häufigkeit von ☊ oder i nur dann einen Anspruch auf Reellität machen kann, wenn es auch bei der anderen vorhanden oder wenigstens angedeutet ist.

Die Untersuchung der Vertheilung der Knotenlängen führt zu keinem nennenswerten Resultate, wohl aber die der Neigungen. Die Knotenlängen vertheilen sich in folgender Weise:

☊	*K*	*k*	*K—k*	☊′	*K*	*k*	*K—k*
0°— 30°	26	10	16	0°— 30°	45	10	35
30 — 60	34	8	26	30 — 60	26	6	20
60 — 90	33	5	28	60 — 90	23	5	18
90 —120	33	4	29	90 —120	27	6	21
120 —150	28	8	20	120 —150	29	6	23
150 —180	23	8	15	150 —180	27	10	17
180 —210	36	6	30	180 —210	26	7	19
210 —240	25	8	17	210 —240	33	11	22
240 —270	39	10	29	240 —270	24	7	17
270 —300	25	9	16	270 —300	35	12	23
300 —330	28	11	17	300 —330	31	10	21
330 —360	25	10	15	330 —360	29	7	22

Einigermaßen auffallend ist hier nur die große Häufigkeit der äquatorialen Knotenlängen zwischen 0° und 30°, die auch nach Ausscheidung der für den Äquator unsichtbaren Kometen immer noch bestehen bleibt. Eine Nothwendigkeit scheint aber dieses Maximum nicht zu sein, weil es ganz vereinzelt dasteht und in den eklipticalen Knotenlängen gar nicht zu bemerken ist. Überhaupt erscheinen zu einem Urtheile über die wahre Vertheilung die auf die Ekliptik bezogenen Bahnelemente im allgemeinen mehr maßgebend, als die auf den Äquator

reducierten. Man braucht also das in der IV. Abhandlung gefundene Ergebnis, dass in der Vertheilung der Knotenlängen ,die Abweichungen vom Mittel als bloße Zufälligkeiten angesehen werden dürfen, auch nach dieser neuen Untersuchung nicht zu ändern.

Die Neigungen vertheilen sich in folgender Weise:

i	K	k	$K-k$	i'	K	k	$K-k$
0°— 10°	22	.	22	0°— 10°	3	.	3
10 — 20	21	.	21	10 — 20	19	.	19
20 — 30	13	1	12	20 — 30	30	.	30
30 — 40	19	1	18	30 — 40	27	4	23
40 — 50	22	7	15	40 — 50	15	.	15
50 — 60	17	3	14	50 — 60	15	3	12
60 — 70	22	7	15	60 — 70	24	6	18
70 — 80	25	7	18	70 — 80	28	13	15
80 — 90	25	10	15	80 — 90	30	13	17
90 —100	18	10	8	90 —100	20	6	14
100 —110	28	10	18	100 —110	23	14	9
110 —120	18	3	15	110 —120	20	7	13
120 —130	27	16	11	120 —130	26	8	18
130 —140	23	11	12	130 —140	19	5	14
140 —150	23	4	19	140 —150	21	8	13
150 —160	17	5	12	150 —160	20	6	14
160 —170	10	1	9	160 —170	12	3	9
170 —180	5	1	4	170 —180	3	1	2

oder, wenn man, um kleine Zufälligkeiten mehr zu verwischen, das Intervall von 10° auf 30° erhöht:

i	K	k	$K-k$	i'	K	k	$K-k$
0°— 30°	56	1	55	0°— 30°	52	.	52
30 — 60	58	11	47	30 — 60	57	7	50
60 — 90	72	24	48	60 — 90	82	32	50
90 —120	64	23	41	90 —120	63	27	36
120 —150	73	31	42	120 —150	66	21	45
150 —180	32	7	25	150 —180	35	10	25

Hier liegt nun in den Zahlen *k*, sowohl bei *i* als bei *i'*, das wichtigste Resultat dieser Untersuchung, nämlich der Umstand, dass die für den Äquator unsichtbaren Kometen fast durchgehends Neigungen besitzen, die näher an 90° als an 0° oder 180° liegen. Diese Größe der Neigungen war übrigens schon beim Beginne der Untersuchung sehr bald zu bemerken, und zwar in einem so auffallenden Grade, dass sie bei jedem dieser Kometen schon von vorneherein zu erwarten und auch ihr Grund leicht zu erkennen war. Es ist nämlich, wenn die geocentrische Bewegung eines Kometen, sei es von Nord nach Süd, oder von Süd nach Nord, nahe in dem durch die Sonne gehenden Declinationskreis stattfindet, zu erwarten, dass auch die heliocentrische Bewegung von dieser Richtung nicht wesentlich abweichen und dass somit die Neigung in den meisten Fällen näher an 90°, als an 0° oder 180° liegen wird.

Es darf aus diesem Grunde auch gar nicht überraschen, dass sich dieselbe Häufigkeit von großen Neigungen, wie die folgende Vertheilung lehrt, auch bei den 105 Kometen zeigt, die nur zum Theil für den Äquator unsichtbar gewesen sind; diese Kometen sind nämlich im allgemeinen ebenso wie die für den Äquator ganz unsichtbaren Kometen von Nord nach Süd oder von Süd nach Nord gelaufen, nur mit dem wesentlichen Unterschiede, dass ihre Rectascensionen nicht während der ganzen Erscheinung, sondern nur während eines Theiles derselben so groß waren, wie die der Sonne.

	i	*i'*
0°— 30°	4	5
30 — 60	18	20
60 — 90	29	26
90 —120	26	26
120 —150	16	24
150 —180	12	4

Da nun die Häufigkeit von großen Neigungen bei den für den Äquator ganz oder theilweise unsichtbaren Kometen nicht zufällig, sondern fest begründet ist, so dürfen die wenigen Fälle, in denen sich unter diesen Kometen auch solche mit kleinen Neigungen befinden, z. B. 1556, 1830 I, 1873 VII, schon von

vorneherein als Ausnahmen bezeichnet werden, die neben den anderen gar nicht in Betracht kommen können, weil es meistens nur das Eintreten von seltenen Umständen, so namentlich eine ansehnliche Erdnähe war, durch welche eine große geocentrische Verschiebung und infolge dessen eine solche Ausnahmsstellung des Kometen entstanden ist, dass derselbe für den Äquator — wenigstens für einige Zeit — unsichtbar wurde.

Die Differenzen $K—k$ lassen erkennen, wie sich die Vertheilung der Neigungen nach der Ausscheidung der für den Äquator unsichtbaren Kometen gestaltet. Es sind, wie man sieht, die großen Anhäufungen soweit vermindert worden, dass bis zu etwa 150° eine beinahe gleichförmige Vertheilung der Neigungen entstanden ist. Scheidet man auch noch die periodischen Kometen (), durch welche die Menge der Neigungen in der Nähe von 0° übermäßig vergrößert wird, aus, so erhält man die folgende Vertheilung:

i	$K-k$	()	$K-k-()$	i'	$K-k$	()	$K-k-()$
0°— 30°	55	29	26	0°— 30°	52	23	29
30 — 60	47	9	38	30 — 60	50	13	37
60 — 90	48	2	46	60 — 90	50	3	47
90 —120	41	1	40	90 —120	36	2	34
120 —150	42	.	42	120 —150	45	1	44
150 —180	25	2	23	150 —180	25	1	24

Hier zeigt sich in der letzten Columne, $K—k—()$, sowohl bei i als bei i', dass die kleinen Neigungen nicht nur in der Nähe von 180°, sondern auch in der Nähe von 0° seltener sind als die großen, wenn auch die Zahlen bei i' von 0° über 90° bis 180° weniger regelmäßig verlaufen als bei i. Es zeigt sich also nicht nur in der Gesammtheit der Kometen, sondern auch bei jenen Kometen, die nach Ausschluss der für den Äquator unsichtbaren Kometen übrig bleiben, die somit für den Äquator sichtbar gewesen sind, das bestätigt, was schon Lambert[1]

[1] Cosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues. Augsburg, 1761. Sechzehnter Brief, am Ende.

bemerkt, aber erst Cournot[1] genauer untersucht hat, nämlich dass bei einer zufälligen Vertheilung der Ebenen der Kometenbahnen die Neigungen gegen die Ekliptik nicht gleichmäßig vertheilt sein können, sondern die kleinen weniger wahrscheinlich sind als die großen.

Die großen Neigungen — sowohl der in die erste, als auch der in die zweite Gruppe der Unsichtbarkeit eingereihten 97 + 105 = 202 Kometen — sind es nun, die es selbstverständlich erscheinen lassen, dass Kometen am Äquator ganz unsichtbar bleiben oder höchstens in der Dämmerung tief am Horizont gesehen werden können, wenn ihr geocentrischer Lauf, mag er nun von Nord nach Süd oder von Süd nach Nord gerichtet sein, ein derartiger ist, dass er die Ekliptik in geringer Elongation von der Sonne durchschneidet; und das wird am leichtesten erreicht, wenn die Kometen die Perihelregel bestätigen.

Sehen wir nach, ob dieser letztere Umstand unter den für den Äquator unsichtbar gewesenen Kometen wirklich so häufig eingetreten ist, dass er als Regel gelten kann, d. h., untersuchen wir, wie sich diese 97 Kometen zur Perihelregel verhalten. Man findet:

	$l_0 - L_0 \pm 180°$	$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$
Zwischen 0° und 60°	39	45
» 60 » 120	26	22
» 120 » 180	32	30

Es sind also am häufigsten die kleinen, diesen zunächst die großen, und am wenigsten die mittleren Werte der Perihel-Commutationen vertreten. Dieses im ersten Augenblicke befremdende Verhältnis kann einigermaßen erklärlich gemacht werden, wenn man bedenkt, dass ein Komet, der am Äquator wegen großer Neigung und geringer Elongation von der Sonne unsichtbar bleibt, nicht nur diesseits, sondern auch jenseits der Sonne stehen, also nicht nur dann unsichtbar bleiben kann, wenn die Perihel-Commutation klein, sondern auch, wenn sie

[1] Traité d'astronomie, par Sir John F. W. Herschel, traduit et suivi d'une addition sur la distribution des orbites cométaires dans l'espace. Bruxelles, 1835.

groß, d. h. schon gegen 180° ist, am wenigsten aber dann, wenn sie nicht weit von 90° ist, weil der betreffende Komet in diesem Falle große Elongationen von der Sonne erreichen kann.

Dass uns soviele Kometen mit großen Perihel-Commutationen bekannt geworden sind, hat, wie schon früher bemerkt wurde, seinen Grund darin, dass wir in der Circumpolargegend des Himmels nicht nur eine größere Menge von Bestätigungen der Perihelregel, sondern im allgemeinen auch eine größere Menge von Nichtbestätigungen oder Ausnahmen von der Perihelregel beobachten können, und die letzteren insbesondere an solchen Kometen, bei welchen die großen Neigungen auch mit großen Werten von b_0 und δ_0 verbunden sind.

Daraus folgt auch, dass durch unsere für den Äquator unsichtbaren Kometen, also insbesondere auch durch Kometenentdeckungen in hohen geocentrischen Breiten oder Declinationen die Perihelregel nicht so bestimmt zum Ausdrucke kommen würde, wie durch die anderen, und diese Folgerung gibt einen Wink zur Erklärung des schon in der V. Abhandlung bemerkten Umstandes, dass sich in dem Zeitraume 1871 bis 1880 besonders viele Ausnahmen von der Perihelregel vorfinden. Diese Ausnahmen zeigen sich nämlich in einem ganz neuen Lichte, wenn man bemerkt, dass sich unter den Kometen dieses Zeitraumes ungewöhnlich viele für den Äquator unsichtbar gewesene Kometen befinden, nämlich unter 30 Kometen 16 oder mindestens 15 mit *n* bezeichnete, ein Verhältnis, das in keinem anderen Zeitraume vorkommt. Auch scheint es, dass in dieser Zeit, wenigstens soweit man nach den Entdeckungspositionen urtheilen kann, besonders eifrig in der nördlichen Partie des Himmels nach Kometen gesucht worden ist, und wenn das der Fall ist, so konnte es natürlich leicht gelingen, verhältnismäßig viele für den Äquator unsichtbare Kometen und unter diesen auch solche zu entdecken, welche die Perihelregel nicht bestätigen oder sich zu ihr indifferent verhalten. Auch in den Jahren 1890—1900 zeigen sich wieder verhältnismäßig viele Ausnahmen von der Perihelregel, unter denen die meisten mit ähnlichen Beobachtungsumständen verbunden sind, wie die Ausnahmen der Jahre 1871—1880.

Es darf übrigens nicht unerwähnt bleiben, dass das bei den für den Äquator unsichtbaren Kometen bemerkte Überwiegen der großen Perihel-Commutationen (120° bis 180°) über die mittleren (60° bis 120°) erst um das Jahr 1870 beginnt, und dieser Umstand muss in Verbindung mit den soeben besprochenen Ausnahmen von der Perihelregel zu dem Schlusse führen, dass dieses trotz der obigen Erklärung noch immer etwas befremdende Übergewicht doch nur als eine Ausnahme betrachtet werden darf.

Nachdem sich nun thatsächlich gezeigt hat, dass die Perihel-Commutationen der meisten unter den für den Äquator unsichtbaren Kometen entweder zu den kleinen (0° bis 60°) oder zu den großen (120° bis 180°), aber nicht zu den mittleren (60° bis 120°) gehören, ergibt sich von selbst, dass diese Kometen am leichtesten in geringen Elongationen von der Sonne durch die Ekliptik gehen, also am Äquator nahe gleichzeitig mit der Sonne auf- und untergehen und somit unsichtbar bleiben können.

Am meisten entscheidend für die hier dargelegten Folgerungen sind solche Kometen, die ihre Perihelpassage oder überhaupt ihre größte Helligkeit in der Nähe der Ekliptik gehabt haben, z. B. 1819 II, 1871 I, 1874 III, 1881 III, am wenigsten diejenigen, die zur Zeit der größten Helligkeit oder der Perihelpassage weit von der Ekliptik, z. B. in der Nähe eines der Himmelspole, gewesen sind. Von diesen beiden Fällen ist übrigens auch thatsächlich der erste häufiger als der zweite, indem die Kometen, wenn sie auch weit über die Ekliptik, bald nördlich, bald südlich hinausgehen können, ihre größte Helligkeit im allgemeinen doch nur in der Nähe der Ekliptik erreichen.

Und nun machen wir den Rückschluss vom Äquator auf unsere Breiten. Wenn am Äquator, wo die Ekliptik während des ganzen Jahres auf dem Horizonte nahezu senkrecht steht, Kometen unsichtbar bleiben können, welche große Neigungen haben und in geringen Elongationen von der Sonne durch die Ekliptik gehen, so können auch für die Horizonte höherer geographischer Breiten Kometen, welche diese beiden Bahneigenthümlichkeiten besitzen, unsichtbar bleiben, und zwar dann

wenn die Ekliptik auf dem Horizonte nahezu senkrecht steht. In diese Stellung kommt die Ekliptik allerdings an jedem Tage des Jahres, doch können hier natürlich nur die Stellungen zu jenen Tageszeiten in Betracht kommen, in denen ein in geringer Elongation von der Sonne befindlicher Komet noch am ehesten gesehen werden könnte, nämlich abends und morgens am Horizont. Am Abend erreicht bei uns die Ekliptik ihre steile Stellung im Frühling, am Morgen im Herbst, und daher ist in diesen beiden Jahreszeiten auch bei uns die Möglichkeit geboten, dass Kometen darum unsichtbar bleiben, weil sie große Neigungen haben und in geringen Elongationen von der Sonne durch die Ekliptik gehen, und zwar werden auf Grund der Perihelregel die im Frühlinge, also speciell im März, unsichtbar bleibenden Kometen hauptsächlich solche sein, deren Perihellängen bei 180° liegen, und die im Herbste, also speciell im September, unsichtbar bleibenden solche, deren Perihellängen bei 0° liegen.

Diese den mittleren und höheren geographischen Breiten entgehenden Kometen können am Äquator gesehen werden, weil dort der Horizont ein wesentlich anderer ist und die Kometen, sei es am Morgen oder am Abende, eine größere Höhe erreichen als unter höheren Breiten, und ebenso können die Kometen, welche am Äquator wegen tiefen Standes bei Sonnenauf- und Untergang unsichtbar bleiben, unter höheren Breiten darum gesehen werden, weil hier der Horizont ein wesentlich anderer ist, als am Äquator.

Durch den Standpunkt von Beobachtern auf der südlichen Hemisphäre der Erde entsteht dieselbe Wirkung auf die Vertheilung der Perihellängen, nur mit der entsprechenden Vertauschung der Jahreszeiten, indem dort die Ekliptik im März am Morgen und im September am Abend eine steile Stellung erreicht.

Mit dieser Erklärung der Perihellücken bei 0° und 180° steht unter anderen auch der folgende, zwar nur geringfügige, aber immerhin nennenswerte Umstand in Übereinstimmung, welcher darauf beruht, dass irgend eine bestimmte Gruppe von Perihellängen nicht nur durch solche Kometen bereichert wird, welche in der zugehörigen Jahreszeit im Perihel ($l_0 = L_0 \pm 180°$), sondern auch durch solche, welche in der entgegengesetzten

Jahreszeit weit vom Perihel beobachtet werden ($l_0 = L_0$), zu denen also insbesondere die Kometen mit kleinen Perihel-distanzen gehören.

Sowie nämlich zu dem Maximum der Perihellängen bei 90° nebst den Kometen, welche im Winter durch das Perihel gehen, auch noch solche Kometen beitragen, welche im Sommer weit vom Perihel beobachtet worden sind, und sowie zu dem Maximum bei 270° nebst den Kometen, welche im Sommer durch das Perihel gehen, auch noch solche beitragen, welche im Winter weit vom Perihel beobachtet worden sind, z. B. 1449, 1680, 1823, so ist zu erwarten, dass zu den Perihellängen bei 0° nebst den Herbst-Kometen auch noch die weit vom Perihel beobachteten Frühlings-Kometen und zu den Längen bei 180° nebst den Frühlings-Kometen auch noch die entsprechenden Herbst-Kometen beitragen. Allerdings kann dieser Beitrag nur ein sehr geringer sein, denn wenn in diesen beiden Jahreszeiten schon jene Kometen, welche die Perihelregel bestätigen, selten sind, so werden diejenigen, welche sie nicht bestätigen, voraussichtlich noch seltener sein, aber es kommt hier eben darauf an, zu zeigen, dass auch unter den Kometen, welche weit vom Perihel beobachtet worden sind, die vom Frühling und Herbst gegen die vom Sommer und Winter bedeutend zurückstehen. Wie weit dies der Fall ist, sieht man aus den folgenden Zahlen, welche dadurch entstanden sind, dass aus dem Periheltableau S. 1025 für jeden Monat die Anzahl jener Kometen entnommen wurde, für welche $l_0 = L_0$ ist und dabei, um Zufälligkeiten mehr zu verwischen, zu jeder Zahl auch noch die beiden benachbarten addiert wurden.

Februar	2		August	1	
März	3	12	September	4	8
April	7		October	3	
Mai	3		November	4	
Juni	8	17	December	8	18
Juli	6		Jänner	6	

Sucht man die entsprechenden Zahlen aus dem zweiten Periheltableau, welches sich auf die Perihel-Rectascensionen

bezieht, also die Bestätigungen der Relation $\alpha_0 = A_0$, so findet man für Februar 3, März 4, April 5, Mai 5, Juni 5, Juli 3, August 2, September 4, October 4, November 2, December 10, Jänner 3, in welcher Reihe das Zurückstehen der Frühlings- und Herbst-Kometen gegen die Sommer- und Winter-Kometen viel weniger hervortritt, was wohl wieder ein Beleg dafür ist, dass bei derartigen Untersuchungen die naturgemäße Fundamentalebene nicht der Äquator, sondern die Ekliptik ist.

Wir können also sagen: Während die ohnehin schon reichbesetzten Stellen bei 90° und 270° auch noch durch den gegenseitigen Verkehr bereichert werden, können die spärlich besetzten Stellen bei 0° und 180° auch durch diesen Verkehr nur wenig gewinnen, d. h. es haben die Perihellängen bei 0° von den Frühlings-Kometen und die bei 180° von den Herbst-Kometen keine wesentliche Bereicherung zu erwarten, und dieser Umstand wirkt sicherlich auch dabei mit, dass die Perihellängen bei 0° und 180° gegen die bei 90° und 270° zurückbleiben.

Gegen die hier dargelegte Erklärung der Perihellücken bei $l_0 = 0°$ und 180° können nun mehrere Bedenken vorgebracht werden, die hier einzeln erörtert werden sollen.

1. Ein wichtiges Glied in dieser Erklärung ist die Behauptung, dass die Perihelregel im Frühling und Herbst weniger bestätigt wird, als in den anderen Jahreszeiten. Diese Behauptung trifft jedoch, wie schon in der II. Abhandlung bemerkt worden ist, nur für den März, aber nicht für den September zu, indem sich hier ein der Perihelregel entsprechendes Übergewicht der zugehörigen Perihellängen zeigt. Dieses Übergewicht wird zwar einigermaßen abgeschwächt, wenn man beachtet, dass zu demselben einige Kometen mit sehr unsicheren Bahnen beitragen (1097, 1860 IV), gewinnt aber wieder an Bedeutung dadurch, dass es sich nicht nur bei den Längen l_0, sondern auch bei den Rectascensionen α_0 zeigt, indem es nicht nur im ersten, sondern auch im zweiten Kometentableau zu bemerken ist. Die Erklärung kann aber trotzdem aufrecht bleiben, nur muss man, wie es Herr L. Fabry[1] gethan hat,

[1] Étude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes. Marseille, 1893, p. 197.



nebst den Kometen, welche die Perihelregel sehr nahe bestätigen (Perihel-Commutation nicht weit von 0°), auch diejenigen ins Auge fassen, welche sie nur in einem entfernten Grade bestätigen (Perihel-Commutation weit von 0°). Es ergibt sich dadurch eine sehr bemerkenswerte Verschiedenheit zwischen der Häufigkeit der Frühlings- und Herbst-Kometen einerseits und der Sommer- und Winter-Kometen anderseits.

Theilt man die Kometen nach den Jahreszeiten der Periheldurchgänge in vier Gruppen, indem man die Monate Februar, März, April als Frühling (I), Mai, Juni, Juli als Sommer (II), August, September, October als Herbst (III) und November, December, Jänner als Winter (IV) zusammenfasst, so ergeben sich, wenn man auch die Perihel-Commutationen, so wie Herr Fabry, in vier Gruppen theilt, die folgenden zwei Übersichten:

$l_0 - L_0 \pm 180°$	I	II	III	IV
0°— 45°	24	42	40	45
45 — 90	24	17	24	29
90 —135	15	12	23	8
135 —180	10	15	6	21
	73	86	93	103

$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$	I	II	III	IV
0°— 45°	24	46	43	37
45 — 90	23	20	22	32
90 —135	13	8	21	14
135 —180	13	12	7	20
	73	86	93	103

Hier ist Folgendes zu bemerken. Während im Sommer und ebenso auch im Winter (II und IV) die erste Reihe über die zweite und die zweite über die dritte bedeutend überwiegt, ist beim Frühling und Herbst (I und III) dieses Überwiegen der ersten Zahl über die zweite und der zweiten über die dritte nicht vorhanden. Beim Frühling überwiegt nur die zweite über die dritte, während die erste und zweite als gleich groß angesehen werden können, beim Herbst überwiegt zwar die erste über die zweite, doch sind die zweite und dritte fast gleich.

Damit ist zwar schon der wesentliche Unterschied zwischen den für Sommer und Winter einerseits und für Frühling und Herbst anderseits gefundenen Zahlen dargelegt, doch erscheint es vortheilhaft, das Intervall für die Perihel-Commutationen so zu ändern, dass die für den Frühling und den Herbst gefundenen Zahlen bezüglich ihres Ganges untereinander besser übereinstimmen. Ich habe zunächst als Intervall 30° gewählt.

$l_0 - L_0 \pm 180°$	I	II	III	IV
0°— 30°	18	36	33	34
30 — 60	13	14	12	23
60 — 90	17	9	19	17
90 —120	8	6	16	7
120 —150	9	10	8	9
150 —180	8	11	5	13

$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$	I	II	III	IV
0°— 30°	15	36	28	28
30 — 60	18	20	20	27
60 — 90	14	10	17	14
90 —120	10	3	16	12
120 —150	6	8	7	11
150 —180	10	9	5	11

Besonders anschaulich werden die Verhältnisse, wenn man das Intervall von 30° auf 60° vergrößert:

$l_0 - L_0 \pm 180°$	I	II	III	IV
0°— 60°	31	50	45	57
60 —120	25	15	35	24
120 —180	17	21	13	22

$\alpha_0 - A_0 \pm 180°$	I	II	III	IV
0°— 60°	33	56	48	55
60 —120	24	13	33	26
120 —180	16	17	12	22

Hier zeigt sich nun recht auffallend, sowohl bei den Längen, als bei den Rectascensionen, dass das Übergewicht der kleinen Perihel-Commutationen (0°—60°) über die mittel-

großen (60°—120°) im Frühling und Herbst (I und III) viel geringer ist als im Sommer und Winter (II und IV), so zwar, dass im Frühling und Herbst die mittelgroßen im Vergleiche zu den kleinen noch eine recht ansehnliche Minorität bilden, und damit ist thatsächlich gezeigt, dass im Frühling und Herbst die genauere Bestätigung der Perihelregel nicht so oft vorkommt wie im Sommer und Winter, dass aber dafür die entfernteren Bestätigungen und indifferente Fälle häufiger sind.

2. Durch diese eigenthümliche Vertheilung lässt sich auch gleich der folgende Umstand erklären, der im ersten Augenblicke bedenklich erscheint. Wenn im Frühling und Herbst die Kometen mit kleinen Perihel-Commutationen, die also die Perihelregel bestätigen, seltener sind, so könnte man meinen, dass dann in diesen beiden Jahreszeiten die Kometen überhaupt seltener sein müssten als im Sommer und Winter; doch findet man beim thatsächlichen Nachsehen, dass von einem solchen Minus im Frühling nur wenig und im Herbst gar nichts zu bemerken ist. Wenn man aber jetzt weiß, dass im Frühling und Herbst die Kometen mit mittelgroßen Perihel-Commutationen sehr häufig sind, und zwar häufiger als im Sommer und Winter, so muss man zu dem Schlusse kommen, dass im Frühling und Herbst die Kometen in der Gesammtheit nicht seltener zu sein brauchen als in den anderen Jahreszeiten. Und gerade der Umstand, der im Frühling und Herbst das Sichtbarwerden von Kometen mit geringen Elongationen verhindert, nämlich der steile Stand der Ekliptik am Abend, beziehungsweise am Morgen, kann bei Kometen mit größeren Elongationen die Sichtbarkeit begünstigen, weil ein solcher Komet wegen der größeren Höhe über dem Horizont sowohl nördlich als südlich von der Ekliptik gesehen und verfolgt werden kann und daher die Wahrscheinlichkeit oder Möglichkeit seiner Auffindung eine größere ist. Daraus lässt sich aber auch wieder die Folgerung ziehen, dass diese Kometen, weil sie in größeren Elongationen von der Sonne durch die Ekliptik gehen, die Perihelregel nicht zu bestätigen brauchen und daher ihre Perihellängen auch nicht bei 0° oder 180° zu liegen brauchen. Man kann sich den geocentrischen Lauf dieser Kometen, sowohl derjenigen, die in kleinen, als auch derjenigen, die in

größeren Elongationen von der Sonne durch die Ekliptik gehen, leicht veranschaulichen, wenn man sich die Lage, welche die Mondsichel im Frühling am Abend und im Herbst am Morgen einnimmt, vor Augen hält und durch die beiden Hörnerspitzen derselben eine Gerade gezogen denkt.

3. Auch dem folgenden Einwande lässt sich durch diese Vertheilung entgegentreten. Wenn die bei uns im Frühling und Herbst unsichtbar bleibenden Kometen hauptsächlich solche mit großen Neigungen sind, so kann man leicht zu der Meinung veranlasst werden, dass unter den im Frühling und Herbst thatsächlich beobachteten Kometen nur wenige mit großen Neigungen vorkommen können, und doch findet man bei der Durchsicht der Kometen, dass auch diese Vermuthung nicht bestätigt wird, wenigstens nicht so weit, dass man sie als erwiesen bezeichnen darf. Dieser Widerspruch lässt sich nun auch wieder in derselben Weise beseitigen. Wenn man nämlich sieht, dass es im Frühling und Herbst nebst den Kometen, welche die Ekliptik in kleinen Elongationen von der Sonne durchkreuzen, auch solche, und zwar verhältnismäßig viele gibt, welche in größeren Elongationen von der Sonne durch die Ekliptik gehen, so darf man auch erwarten, dass durch diese letzteren Kometen die Lücken, welche durch das Unsichtbarbleiben der ersteren Kometen in der Reihe der großen Neigungen jedenfalls entstehen, größtentheils wieder ausgefüllt werden.

4. Die Zurückführung der Perihellücken bei den Längen 0° und 180° auf den Umstand, dass die in geringen Elongationen von der Sonne durch die Ekliptik gehenden Kometen besonders im Frühling und Herbst unsichtbar bleiben können. erinnert einigermaßen an das Problem der kürzesten Dämmerung, unterscheidet sich aber von demselben u. a. dadurch, dass in der Dauer der Dämmerung zwischen Morgen und Abend kein Unterschied besteht, während das Unsichtbarbleiben von Kometen wegen seiner Abhängigkeit von der Stellung der Ekliptik im Frühling an den Abend, im Herbst an den Morgen gebunden erscheint. Aus diesem Umstande könnte übrigens gefolgert werden, dass im Frühling weniger Kometen am Abend-, aber mehr am Morgenhimmel, im Herbst weniger am Morgen-, aber mehr am Abendhimmel sichtbar sein sollten.

Das wird nun allerdings durch die Statistik nicht bestätigt, wenigstens nicht so auffallend, dass es als Regel gelten könnte, doch muss beachtet werden, dass eine strenge Unterscheidung zwischen Morgen- und Abend-Kometen eigentlich nicht gemacht werden kann, indem manche Kometen ganz oder nahezu circumpolar sind, andere während ihrer Sichtbarkeit sogar vom Abend- zum Morgenhimmel oder umgekehrt übergehen, und dass gerade diese Fälle besonders häufig eintreten können, weil infolge der Perihelregel mehr Kometen in kleinen, als in großen Elongationen zu erwarten sind. Es würden daher selbst bei einer sorgfältigen Trennung die beiden Gruppen von Kometen ineinander verschwimmen und gerade die nahe an der Grenze befindlichen am häufigsten sein.

5. Man könnte auch einwenden, dass das Unsichtbarbleiben von Kometen in unserem Frühling oder Herbst nach der obigen Erklärung kein bedeutendes sein kann, da ja ein Komet, wenn er auch im Frühling am Abend bei steil stehender Ekliptik unsichtbar bleibt, dafür immerhin am Morgen bei tief liegender Ekliptik sichtbar sein kann, und ebenso ein Komet, der im Herbst am Morgen bei steil stehender Ekliptik unsichtbar bleibt, dafür am Abend bei tief liegender Ekliptik sichtbar werden kann. Darauf ist Folgendes zu bemerken. Es muss allerdings zugegeben werden, dass bei uns das Unsichtbarbleiben von Kometen nicht in dem Maße zu erwarten ist wie am Äquator, wo der steile Stand der Ekliptik sowohl am Abend als am Morgen stattfindet, doch darf auch schon von einer einmaligen steilen Stellung der Ekliptik eine wesentliche Beschränkung der Sichtbarkeit erwartet werden. Geht ein Komet z. B. im Frühling am Abend nahe gleichzeitig mit der Sonne unter und ist sein geocentrischer Lauf ein derartiger, dass er hier Tag für Tag längs des Horizontes hinzieht und daher am Abendhimmel während der ganzen Erscheinung nicht zu sehen ist, so ist seine Stellung am Morgenhimmel allerdings insofern günstiger, als hier seine Bewegung nicht dem Horizont parallel läuft, doch ist im allgemeinen zu erwarten, dass sich hier die Erscheinung in zwei Partien theilt, nämlich so, dass der Komet in der einen zwar vor der Sonne, also noch während der Nacht, in der anderen dagegen erst nach der Sonne aufgeht, also

wenigstens hier unsichtbar bleibt und somit jedenfalls eine Verkürzung seiner Sichtbarkeit erleidet.

6. Es kann die Frage aufgeworfen werden, warum hier immer nur die Stellung der Ekliptik als maßgebend angesehen wird und nicht auch die des Himmelsäquators, der doch von vorneherein hier ebenso zulässig erscheint, wie die Ekliptik, indem eine Bahn ebensogut auf den Äquator, wie auf die Ekliptik bezogen werden kann, und bezüglich der Neigung gegen diese beiden Fundamentalebenen hier insoferne kein wesentlicher Unterschied besteht, als eine Bahn, wenn sie auf der einen dieser beiden Ebenen nahe senkrecht steht, dann auch auf der anderen von der senkrechten Stellung nicht allzuviel abweichen kann. Auch hätte der Äquator vor der Ekliptik das voraus, dass er für den Horizont einer bestimmten geographischen Breite nicht schwankt, sondern stets eine constante Lage einnimmt. Darauf muss bemerkt werden, dass es sich hier darum handelt, ob ein Gestirn sowohl nördlich als südlich von der Fundamentalebene nahe gleichzeitig mit der Sonne auf- oder untergehen kann, und das ist für unsere Breiten beim Himmelsäquator so gut wie gar nicht der Fall, wohl aber bei der Ekliptik, und zwar dann, wenn dieselbe so wie am Erdäquator auf dem Horizonte nahezu senkrecht steht. Es ist also die Abhängigkeit von der Ekliptik hauptsächlich darin begründet, dass die Kometen bezüglich ihrer Sichtbarkeit oder größten Helligkeit trotz vielfacher Abweichungen im allgemeinen doch an die Nähe der Sonne gebunden sind und diese in der Ekliptik geht. Nur in den Tropengegenden könnte man statt der Ekliptik fast ebensogut auch den Himmelsäquator in Betracht ziehen, weil dort der geocentrische Lauf eines Kometen, ob er nun die Ekliptik oder den Himmelsäquator nahezu rechtwinkelig durchkreuzt, in jedem Falle dem Horizonte nahezu parallel ist.

Dieses Gebundensein an die Ekliptik, das sich in der vorliegenden Untersuchung schon mehrmals bemerkbar gemacht hat, so insbesondere S. 1068 bei den Perihelbreiten, S. 1070, wenn auch nur an einer Stelle, bei den Knotenlängen, S. 1073 bei den Neigungen, S. 1025 und 1079 dadurch, dass die Relationen $l_0 = L_0 \pm 180°$ und $l_0 = L_0$ etwas mehr den Jahreszeiten ent-

sprechend bestätigt werden als $\alpha_0 = A_0 \pm 180°$, beziehungsweise $\alpha_0 = A_0$, ist offenbar auch der Grund davon, dass die Maxima und Minima der Perihelanhäufungen, wie sich auf S. 1058 gezeigt hat, nur bei den Längen l_0 bestimmt hervortreten, während sie bei den Rectascensionen α_0 zum Theile verschoben sind, so zwar, dass um 0° herum ein Maximum und um 90° herum ein Minimum zu sein scheint.

Es lässt sich also jedem dieser Bedenken gegen die hier gegebene Erklärung der Lücken bei den Perihellängen 0° und 180° entgegentreten, und als einzige schwache Seite des Beweises könnte höchstens die angeführt werden, dass man diejenigen Kometen, mit denen die Richtigkeit der Erklärung direct bewiesen werden könnte, beziehungsweise sollte, durch welche also die Lücken bei 0° und 180° ausgefüllt werden würden, nicht zur Verfügung hat, eben weil sie fehlen, indem sie bei uns überhaupt unsichtbar geblieben sind und am Äquator, wo sie sichtbar gewesen wären, nicht beobachtet worden sind. Wir dürfen aber mit voller Berechtigung annehmen, dass es hauptsächlich diese Kometen sind, welche nach Ausscheidung der für den Äquator unsichtbaren Kometen zu den bekannten hinzutreten müssten, damit für den Äquator die sehr wahrscheinliche, aber durch die bekannten Kometen nicht erreichbare gleichmäßige Vertheilung der Perihellängen zustande kommt.

Hiermit erscheint das Zurückbleiben der Perihelansammlungen bei den Längen 0° und 180° gegen die bei 90° und 270° vollständig erklärt und die II. Abhandlung in der anfangs angedeuteten Richtung ergänzt. Es hat also zu dem Umstande, dass zu einem Maximum der Perihellängen bei $\left\{\begin{matrix}270°\\ 90\end{matrix}\right\}$ solche Kometen beitragen, die wir auf der Nordhemisphäre im $\left\{\begin{matrix}\text{Sommer}\\ \text{Winter}\end{matrix}\right\}$ in $\left\{\begin{matrix}\text{geringen}\\ \text{großen}\end{matrix}\right\}$ Elongationen von der Sonne beobachten können, auch noch der hinzuzutreten, dass uns im Herbst und Frühling Kometen entgehen, deren Perihellängen auf Grund der Beziehung zwischen der Perihellänge und der Perihelzeit bei 0°, beziehungsweise 180° liegen.

Um dieses Unsichtbarbleiben von Kometen wahrscheinlich zu machen, ist also zuerst gezeigt worden, dass auch am

Äquator Kometen unsichtbar bleiben können, die unter mittleren und höheren geographischen Breiten zu sehen sind, und zwar in jeder Jahreszeit. Diese Kometen bilden den Kern der Arbeit. Dass hier zuerst die Sichtbarkeit, beziehungsweise Unsichtbarkeit unserer Kometen für den Äquator untersucht und sodann vom Äquator wieder der Rückschluss auf unsere Breiten gemacht worden ist, erweist sich als ein ebenso sicherer, als naturgemäßer Vorgang, weil für den Äquator eine gleichmäßige Vertheilung der Perihellängen vorausgesetzt werden darf und auf diesem Wege am leichtesten ersichtlich gemacht werden kann, wie es kommt, dass dieselben Umstände, welche am Äquator einer gleichmäßigen Vertheilung der Perihellängen anscheinend nicht hinderlich sind (große Neigung, geringe Elongation von der Sonne, Bewegung der Sonne in der Ekliptik), unter höheren Breiten eine ungleichmäßige Vertheilung zur Folge haben können.

Am Äquator kann das Unsichtbarbleiben von Kometen, nämlich derjenigen, welche große Neigungen haben und in geringen Elongationen von der Sonne durch die Ekliptik gehen, in jeder Jahreszeit stattfinden, und es besteht kein Grund gegen die Annahme, dass diese am Äquator unsichtbar bleibenden Kometen bezüglich ihrer Perihellängen ebenso gleichmäßig über die Ekliptik vertheilt sind, wie die am Äquator thatsächlich sichtbaren Kometen. Die Ungleichmäßigkeit beginnt erst, wenn man auf irgend einer der beiden Erdhemisphären soweit in höhere Breiten kommt, dass zwischen den Stellungen, welche die Ekliptik gegen den Horizont am Abend, beziehungsweise Morgen im Laufe eines Jahres einnimmt, ein wesentlicher Unterschied auftritt.

Wenn schließlich noch gefragt werden sollte, wie sich die Vertheilung der Perihellängen gestalten würde, wenn Kometen ausschließlich unter sehr hohen Breiten, also insbesondere in den Polargegenden entdeckt werden würden, so wäre darauf zu antworten, dass am Nord- oder Südpol der Erde, abgesehen von der Unterbrechung durch den mehr als sechsmonatlichen Tag, alle während des Jahres nördlich, beziehungsweise südlich von der Sonne weit über die Ekliptik hinaustretenden Kometen, also insbesondere die mit großen Neigungen, entdeckt

werden könnten und dass somit ähnlich wie am Äquator eine gleichmäßige Vertheilung der Perihellängen zu erwarten wäre, wenn auch viele dieser Kometen andere sein würden, als die am Äquator sichtbaren, indem für den Horizont des Nord- oder Südpoles jene Kometen schwer oder gar nicht zu sehen wären, die in der Nähe des Himmelsäquators oder der Ekliptik verbleiben und somit kleine Neigungen, sei es bei 0° oder bei 180°, haben, dafür aber auch jene Kometen zu sehen wären, die infolge großer Neigungen und geringer Elongationen von der Sonne am Äquator während des ganzen Jahres und unter mittleren geographischen Breiten im Frühling und Herbst unsichtbar bleiben.

XX. SITZUNG VOM 18. OCTOBER 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte: Bd. 109, Abth. II. b, Heft V und VI (Mai und Juni 1900).

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. und k. Hoheit des Durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserlichen Akademie, durch die Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übersendete Druckwerk »Die Insel Giglio« vor.

Ferner legt der Secretär eine von Herrn E. Oekinghaus in Königsberg i. Pr. übersendete Abhandlung vor, welche den Titel führt: »Das ballistische Problem auf Grundlage der Versuche und der Integrabilität. (Innere Ballistik.)« (Schluss.)

Das w. M. Herr Director Prof. R. v. Wettstein legt eine Arbeit von Herrn Director Dr. F. W. Dafert aus der k. k. landwirtschaftlich-chemischen Versuchsanstalt in Wien vor, betitelt: »Über die Quecksilbervergiftung grüner Gewächse«.

XXI. SITZUNG VOM 25. OCTOBER 1900.

Der Secretär, Herr Hofrath v. V. Lang, verliest ein Abschiedschreiben des in die Reihe der correspondierenden Mitglieder im Auslande tretenden w. M. der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe, Herrn Hofrathes Prof. Dr. Ludwig Boltzmann, anlässlich seiner Übersiedlung nach Leipzig.

Ferner verliest der Secretär eine Zuschrift des Herrn Prof. Dr. H. Schenkl in Graz, worin derselbe für die Theilnahme, durch welche die kaiserliche Akademie das Andenken seines Vaters, ihres w. M. Hofrathes Karl Schenkl, geehrt hat, in seinem und im Namen seiner Mutter dankt.

Herr Hofrath Prof. Johann Edler v. Radinger in Wien dankt für seine Wahl zum correspondierenden Mitgliede dieser Classe im Inlande.

Der Secretär legt eine von Herrn Karl Zulkowski, Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag, übersendete Arbeit vor, welche den Titel führt: »Über die Constitution des Andalusits und des Disthens«.

Herr E. J. Kugler in Pressburg übersendet ein von ihm ersonnenes Rieseneinmaleins der Zahlen von 11 bis 99.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. J. v. Radinger hält einen Vortrag über seine in der Sitzung vom 11. October d. J. vorgelegte Arbeit: »Der Äther und die Geschwindigkeit des Lichtes«.

Das w. M. Herr Hofrath Director E. Weiß überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. L. Grabowski unter dem Titel: »Theorie des harmonischen Analysators«.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXII. SITZUNG VOM 8. NOVEMBER 1900.

Herr Wilhelm v. Bisics in Karlsruhe übersendet ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: 1. »Über einen Zusammenhang zwischen den Elasticitätsconstanten, specifischen Gewichten, specifischen Wärmen und linearen Ausdehnungscoefficienten einiger fester Körper«, und im Zusammenhange damit 2. »Über eine constante Beziehung zwischen dem specifischen Gewichte und Atomgewichte der Elemente«.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Victor Uhlig in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Über die Cephalopodenfauna der Teschener und Grodischter Schichten«.

Das w. M. Herr Director R. v. Wettstein überreicht eine im botanischen Museum der k. k. Universität Wien ausgeführte Arbeit von Fräulein stud. phil. Emma Ott: »Untersuchungen über den Chromatophorenbau der Süßwasser-Diatomaceen und dessen Beziehungen zur Systematik«.

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak legt eine Arbeit von Herrn Prof. A. Pelikan in Prag vor, welche betitelt ist: »Petrographische Untersuchung von Gesteinen der Inseln Sokotra, Abd el-Kuri und Semha«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

I. »Über Einwirkung von Aldol und von Crotonaldehyd auf Phenylhydrazin«, von Herrn G. B. Trener.

II. »Über einige Condensationsversuche von Isobutyraldehyd mit aromatischen *o*-Aldehyden«, von Herren O. Herzog und O. Kruh.

Das w. M. Herr Hofrath E. Weiß legt eine Mittheilung von Herrn Dr. Egon v. Oppolzer vor, betitelt: »Ein neues Messungsprincip in der Photometrie der Gestirne«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Lloyd J. U. und C. G., Bulletin No 1 of the Lloyd Library of Botany, Pharmacy and Materia medica. Cincinnati, 1900. 8°.

Lueger K., Dr., Bürgermeister von Wien: Die Gemeindeverwaltung der Stadt Wien im Jahre 1897. Wien. 1900, 8°.

Statistisches Departement des Wiener Magistrates. Statistisches Jahrbuch der Stadt Wien für das Jahr 1897. 15. Jahrgang, bearbeitet von Dr. Stephan Sedlaczek, Dr. Wilhelm Löwy und Dr. Wilhelm Hecke. Wien, 1899, 8°.

Universität in Basel, Akademische Schriften pro 1900.

Universität in Zürich, Akademische Schriften pro 1900.

XXIII. SITZUNG VOM 16. NOVEMBER 1900.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. E. Weiß übersendet als Leiter der in Tirol vorgenommenen Beobachtungen bezüglich der Leoniden folgendes Telegramm de dato Bozen, 16. November:

»In den Morgenstunden des 14. und 15. einzelne versprengte Leoniden gesehen. Heute früh Schnee«.

Das c. M. Herr Prof. G. Haberlandt übersendet eine Arbeit aus dem botanischen Institute der k. k. Universität in Graz von Herrn Josef Müller, welche den Titel führt: »Über die Anatomie der Assimilationswurzeln von *Taeniophyllum Zollingeri*«.

Das w. M. Herr Director Prof. R. v. Wettstein legt eine Abhandlung des Herrn Dr. A. v. Hayek vor, betitelt: »Die Centaurea-Arten der österreichisch-ungarischen Monarchie«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht drei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

I. »Über die Condensation des Isobutyraldehydes mit Propionaldehyd«, von Herrn Dr. Moriz Kohn.

II. »Über die Condensation von Isovaleraldehyd mit Acetaldehyd«, von Herrn Alfred Wogrinz.

III. »Über die Condensation von Isobutyraldehyd mit Crotonaldehyd«, von Herrn Richard Plattensteiner.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erdmann H., Dr., Lehrbuch der anorganischen Chemie. 2. Auflage. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1900. 8.

Haeckel E., Kunstformen der Natur. 5. Lieferung. Leipzig und Wien. 4°.

Němec B., Dr., Studie o dráždivosti rostlinné plasmy. Prag, 1900. 8°.

Studnička F. J., Dr., Prager Tychoniana. Prag, 1900. 8.

XXIV. SITZUNG VOM 22. NOVEMBER 1900.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXI, Heft 8 (August 1900).

Herr Dr. Franz Schaffer legt eine Abhandlung vor, welche den Titel führt: »Geologische Studien im südöstlichen Kleinasien und in Nordsyrien«. (Ausgeführt auf einer Reise im Herbste 1900.)

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Adolf Franke: »Über die Einwirkung von Natronlauge auf α-Oxyisobutyraldehyd«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Zuckerkandl überreicht eine Arbeit, betitelt: »Zur Morphologie des Musculus ischiocaudalis«.

Herr Dr. Karl Linsbauer, Assistent am pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität, legt eine im genannten Institute ausgeführte Abhandlung vor, betitelt: »Zur Anatomie von *Cassiope tetragona* Don.«

Das w. M. Herr Hofrath E. Weiß erstattet einen vorläufigen Bericht über den Erfolg der Expeditionen zur Beobachtung der Leoniden.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Astronomical Laboratory at Groningen, Publications, Nos 1, 2, 3. Groningen, Hoitsema brothers, 1900. 4°.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerolds Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. X. HEFT.

JAHRGANG 1900. — DECEMBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 2 TAFELN UND 1 TEXTFIGUR.)



WIEN, 1900.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 10. Heftes December 1900 des CIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 4 K = 4 Mk.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIX. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXV. SITZUNG VOM 6. DECEMBER 1900.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 109, Abth. II a, Heft VI und VII (Juni und Juli 1900). — Abth. II b, Heft VII (Juli 1900).

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, theilt mit, dass Seine kaiserliche Hoheit, der durchlauchtigste Herr Curator Erzherzog Rainer, der Verlegung der feierlichen Sitzung auf den 1. Juni 1901 um 4 Uhr nachmittags Seine Genehmigung ertheilt hat.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt den X. Band des im Wege des k. und k. Ministeriums des Äußern eingelangten, von dem Ministerio della Istruzione Pubblica in Rom gespendeten Druckwerkes: Le opere di Galileo Galilei.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

I. »System der Sensitometrie photographischer Platten« (2. Abhandlung), von Herrn Hofrath J. M. Eder in Wien;

II. »Über die photographische Vergleichung der Helligkeit verschiedenfarbiger Sterne«, von Herrn Dr. K. Schwarzschild in München.

Herr H. Schindler in Wien übersendet eine Mittheilung, betreffend die Vertheilung der Druckkräfte der flüssigen Materie auf der Oberfläche einer in Rotation befindlichen Kugel.

Herr Dr. Robert Clauser überreicht eine Arbeit, betitelt: »Zur Kenntnis der Eugenolglycolsäure«.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Zur Kenntnis der Morphologie und Anatomie von *Meleagrina*«.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben überreicht eine Mittheilung von Herrn Dr. Franz Werner, betitelt: »Beschreibung einer bisher noch unbekannten Eidechse aus Kleinasien: *Lacerta anatolica*«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht drei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

I. »Über die Einwirkung von Kali auf 2-Dimethyl-3-Oxypropionaldehyd«, von Herrn Leo Wessely.

II. »Über ein Aldol und Glycol aus Benzaldehyd und Propionaldehyd«, von Herrn Theodor Hackhofer.

III. »Über die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf Methyläthylacroleïn«, von Herrn Fritz Demmer.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Über die „Kittlinien" der Herzmuskelfasern«.

Herr Dr. Siegmund v. Schumacher, Assistent an der II. anatomischen Lehrkanzel der Wiener Universität, legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Die Rückbildung des Dotterorganes von *Salmo fario*«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Dufet H., Recueil de données numériques, publié par la Société française de Physique. Troisième fascicule. Paris, 1900. 8°.

Stiatessi R., Spoglio delle osservazioni sismiche dal 1° Novembre 1899 al 31 Ottobre 1900. Mugello, 1900. 8°.

Universität in Basel, Akademische Schriften für das Jahr 1897/98.

Universität in Helsingfors, Akademische Schriften für 1895 bis 1898.

System der Sensitometrie photographischer Platten

(II. Abhandlung)

von

J. M. Eder in Wien.

Aus dem photochemischen Laboratorium der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. December 1900.)

In meiner ersten Abhandlung über ein »System der Sensitometrie«[1] bildeten die photographischen Veränderungen der Bromsilberplatten nach der Einwirkung einer constanten Lichtquelle den hauptsächlichen Gegenstand meiner Untersuchungen über Empfindlichkeit, Schwellenwert, variable Schwärzungscurven etc. Dieselben Methoden sind zur Photometrie der chemischen Helligkeit verschiedener Lichtquellen verwendbar; jedoch kommen hiebei mannigfache Nebenumstände in Betracht, welche für die Genauigkeit dieser Methode von beträchtlichem Einflusse sind und bisher noch wenig oder mit widersprechenden Ergebnissen bearbeitet worden sind.

Da meine Arbeiten auf der Verwendung des (von mir mit einigen Abänderungen versehenen) Scheiner'schen Sensitometers basieren, und da anderseits die Constanten dieses Instrumentes in allen Details noch nicht publiciert sind, so gehe ich zunächst auf einige dieser Details (im Nachtrage zu der in meiner ersten Abhandlung gegebenen allgemeinen Beschreibung) näher ein. Der Ausschnitt der rotierenden Scheibe des

---

[1] Eder, System der Sensitometrie photographischer Platten. (Diese Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. II a. November 1899.)

Scheiner-Sensitometers (siehe Fig. 1, *A* meiner ersten Abhandlung) ist in der Tafel in genauer Zeichnung, mit eingeschriebenen Gradzahlen, abgebildet, wobei die Achse der rotierenden Scheibe nächst *M* angebracht ist, die Linie L—L den Scheibenumfang bezeichnet und die voll ausgezogenen Linien die ausgeschnittenen Felder der Scheibe in natürlicher Größe darstellen. Bekanntlich steigt hiebei die zur Wirkung kommende Lichtmenge von einem Scalenfelde zum nächsten im Verhältnisse von 1:1·27.

Die Scheiner'sche Benzinlampe (bezogen vom Mechaniker Toepfer in Potsdam), welche sich vortrefflich als secundäre Standard (Vergleichslampe) bewährte, wurde von mir zum Gegenstande neuerlicher Versuche gemacht, weshalb sie zunächst genauer beschrieben werden soll. Die Außenansicht zeigt die nebenstehende Figur, sie entspricht dem Typus einer sogenannten »Ligroinlampe« mit großer Höhe des Saugdochtes: der letztere ist dicht gewoben und durch ein Zahnrad verstellbar. Die Höhe der Dochthülse beträgt 14 *cm*, der Durchmesser 6 *mm*. Der Ligroinbehälter im Lampenfuße fasst über 100 *cm* des Leuchtmateriales. Die Flammenhöhe, welche mittels eines Diopters controliert wird, beträgt 28 *mm*. Der Diopter besteht in seiner (auf meine Anregung hin ausgeführten) neuen Form aus einem durchlochten Blechringe, der rings um die Mitte als Höhenmarke für die Flammenspitze einen feinen Draht trägt. Die Flamme wird seitlich durch ein Fensterchen abgeblendet; der horizontale Spalt in diesem Fensterchen ist 1 *mm* hoch und 15 *mm* breit; die Unterkante liegt 14·5 *mm*, die Oberkante 15·5 *mm* über der Dochthülse. Die Entfernung des Fensterchens von der Dochtaxe beträgt 14 *mm*. Der rothe Glascylinder,



welcher die Flamme einschließt, hat einen Durchmesser von 45 *mm* und eine Höhe von 23 *cm*. Das runde Loch im Cylinder,[1] welches das durch die Spalte fallende Licht frei austreten lässt, besitzt einen Durchmesser von 17 *mm*. Die Entfernung der rotierenden Scheibe von der photographischen Platte (Schichtseite) beträgt 11 bis 12 *mm*.

Die Anwendung des Scheiner-Sensitometers ist bereits in meiner früheren Abhandlung (a. a. O.) genau beschrieben, so dass ich nichts hinzuzufügen habe.

Prüfung der Constanz der Benzinlampe.

In der Fachliteratur wird die Constanz der Helligkeit der Benzinlampe für optisch-photometrische Zwecke nicht in Frage gestellt[2] und für kurze Brenndauer hatte ich auch die Constanz ihrer photographischen Wirksamkeit beobachtet.

[1] Bekanntlich beeinflusst das Anbringen eines die Luftzufuhr hindernden Lampencylinders die Helligkeit und Farbennuance der Flammen. Auch bei der Benzinflamme macht sich eine Steigerung der Helligkeit nach Aufsetzen eines Lampencylinders geltend und zugleich brennt die Flamme viel ruhiger. Ist der Lampencylinder in der Flammensicht mit einer Ausschnittsöffnung versehen — wie dies bei der Scheinerlampe der Fall ist —, so hängt der photometrische Helligkeitswert der Flamme auch von den betreffenden Dimensionen des Lampencylinders ab.

[2] Hefner-Alteneck fand (Elektrotechn. Zeitschr.. 1883, Bd. 4, S. 455), dass Benzinlampen eine sehr gleichmäßige Helligkeit haben; sie sind als primäre Standards nicht empfehlenswert, weil Benzin ein undefinierbares Gemenge von Kohlenwasserstoffen ist. Als Vergleichslichtquelle (secundäre Standard) verwendet L. Weber bei seinem Photometer eine kleine Benzinlampe. Auch F. Uppenborn stellte fest (Centralblatt für Elektrotechnik, 1888, Bd. 10, S. 186), dass die Benzinlampe eine außerordentliche Constanz der optischen Helligkeit mit großer Bequemlichkeit der Handhabung vereinige und dass sie vorzüglich als Vergleichsquelle geeignet sei. Neuerdings empfiehlt sie Stine in seinem Werke »Photometrical measurements«, 1900, S. 194 für die Zwecke der optischen Photometrie. Als Scheiner die Benzinlampe zur photographischen Sensitometrie empfohlen hatte, wurde sie von mir am III. internationalen Congresse für angewandte Chemie in Wien, 1898 zur Annahme vorgeschlagen, jedoch mit dem Zusatze, dass man sie als secundären Standard benütze und ihre Helligkeit auf das Hefner'sche Amylacetatlicht als primären Standard reducicre.



Trotzdem unterzog ich die Beständigkeit der Scheiner-schen Benzinlampe bei sehr ausgedehnten Brennzeiten einer Revision. Es wurden mir nämlich Bedenken mitgetheilt, ob denn das Benzin (Ligroin), welches keinen einheitlichen Siedepunkt hat, sondern dessen Siedegrenze z. B. zwischen 60 bis 100° C. schwankt,[1] sich nicht während der Brenndauer entmische?

Da thatsächlich verschieden siedende Fractionen des Ligroins etwas verschiedene Leuchkraft besitzen, so erschien eine neuerliche genaue Prüfung dieser Frage wünschenswert, obschon niemals das Ligroinreservoir der Lampe sich während mehrstündigen Brennens soweit erwärmt, dass partielles Abdestillieren zu befürchten wäre.

Die Prüfung der photochemischen Helligkeit der Benzinkerze wurde mittels des Scheiner-Sensitometers unter Anwendung photographischer Bromsilber-Trockenplatten, Normal-Eisenoxalatentwickelung (Entwickelungsdauer fünf bis sechs Minuten), die Bestimmung der photographischen Schwärzung mittels des Hartmann'schen Mikrophotometers und die Berechnung der Bruchtheile (Hundertel) der Scheiner-Grade durch Interpolieren vorgenommen.

Die Proben über Constanz der Benzinflamme erfolgten zu Beginn,[2] nach drei Stunden, vier und acht Stunden, und zwar unter vierfacher Wiederholung des Versuches für jedes der genannten Zeitintervalle.

Die Resultate dieser Messungen über die Constanz der Scheiner'schen Benzinlampe sind in nachfolgenden Tabellen wiedergegeben.

---

[1] Ich benütze stets Ligroin von Gustav Wagenmann in Wien vom »spec. Gew. 0·700« und der Siedegrenze 60 bis 100° C.

[2] In den ersten Minuten brennt die Benzinlampe nicht constant, die Flamme steigt anfänglich rasch höher; nach höchstens 10 bis 15 Minuten erlangt sie volle Beständigkeit.

Erste Versuchsreihe.

Prüfung der Constanz der Benzinlampe während dreistündiger Brenndauer.

Sensitometer Nr.	Scalentheile am Mikrophotometer		Differenz der Scalenablesungen	Schwankung des photochemischen Effectes in Graden Scheiner
	zu Beginn	nach dreistündiger Brenndauer		
7	29·55	29·48	—0·07	—0·025
6	32·21	32·36	+0·15	+0·0 5
5	35·15	35·18	+0·03	+0·010
4	38·15	38·20	+0·05	+0·016
3	41·61	41·50	—0·11	—0·039
2	43·88	43·87	—0·01	—0·004
1	46·12	46·20	+0·08	+0·029
a	49·18	49·25	+0·07	+0·022
b	52·35	52·41	+0·0	+0·019
c	55·40	55·55	+0·15	+0·049
			Mittel...	+0·013

Zweite Versuchsreihe.

Prüfung der Constanz der Benzinlampe während vier- und achtstündiger Brenndauer.

Sensitometer Nr.	Scalentheile am Mikrophotometer			Schwankung des photochemischen Effectes in Graden Scheiner	
	zu Beginn	nach einer Brenndauer		von Beginn bis 4 Stunden	von Beginn bis 8 Stunden
		von 4 Stunden	von 8 Stunden		
12	27·33	27·43	27·25	+0·045	—0 036
11	29·50	29·51	29·45	+0·003	—0·019
10	32·33	32·40	32·40	+0·028	+0·028
9	34·52	34·59	34·48	+0·032	—0·018
8	36·70	36·60	36·71	—0·048	+0·004
7	38·74	38·70	38·68	— 0·020	—0·030
6	40·60	40·59	40·57	—0·005	—0·015
5	42·54	42·57	42·44	+0·015	—0·053
4	44·43	44·52	44·46	+0·047	+0·015
				Mittel = +0·011	—0·014

Daraus lassen sich für die Helligkeit der Lampe die Werte berechnen:

zu Beginn	nach 3 Stunden	4 Stunden	8 Stunden
1·000	1·003	1·003	0·997

Diese Zahlen ergeben nur sehr geringe Schwankungen der Helligkeit der Benzinlampe, nämlich eine Differenz von ungefähr 0·01° Scheiner, entsprechend circa $^1/_4$ %, was unter der Grenze der Beobachtungsfehler der Methode liegt. Vergleicht man damit die Thatsache, dass die optische Helligkeit der Lampe, bezogen auf eine Hefner'sche Amylacetatlampe, bei der Beobachtung mittels eines Lummer-Brodhun'schen Photometers nur Schwankungen von etwa $^1/_2$ % aufwies — was gleichfalls an der Grenze der Beobachtungsfehler liegt —, so ergibt sich die Schlussfolgerung, dass die Scheiner'sche Benzinkerze während ihrer ganzen Brenndauer von circa 8 Stunden mit constanter chemischer und optischer Helligkeit brennt.

Vorsichtsmaßregeln, welche bei photometrischen Versuchen mittels der photographischen Methode und der Anwendung des Scheiner-Sensitometers nothwendig sind.

Wenn die photographische Methode der Photometrie von Lichtquellen befriedigende Resultate geben soll, so sind einige Vorsichtsmaßregeln zu befolgen, auf welche bisher noch nicht besonders aufmerksam gemacht wurde.

Die Erfahrung lehrt, dass die Bestimmung des Schwellenwertes[1] durch Ablesen der letzten eben noch schwach sichtbaren Nummern an der fixierten sensitometrischen photographischen Versuchsplatte um beiläufig ±1° Scheiner unsicher ist. Diese in meiner ersten Abhandlung (S. 1418) gemachte Angabe bestätigten zahlreiche von anderen Beobachtern vorgenommene Ablesungen. Trotzdem die Differenz von 1° Scheiner einer Helligkeitsabstufung von 100 : 127 entspricht, so sind

[1] Die Lichtmenge, welche erforderlich ist, um einen eben bemerkbaren photographischen Effect hervorzurufen, nennt man den Schwellenwert einer photographischen Platte (vergl. meine erste Abhandlung über »Sensitometrie«, S. 1407).

thatsächlich diese Ablesefehler für die Ermittelung der richtigen photographischen Belichtungszeit praktisch belanglos, weil sie wegen des Spielraumes bei der Hervorrufung nicht in Betracht kommen, ja nicht einmal ein Fehler von 2° Scheiner in der praktischen Photographie stark fühlbar ist.

Daraus geht aber anderseits hervor, dass man für photometrische Messungen (Vergleich zweier Lichtquellen etc.) sich nicht auf die Schwellenwertablesung wegen zu geringer Genauigkeit beschränken kann. Für wissenschaftliche Messungszwecke müssen verschieden geschwärzte Felder von fortschreitend belichteten photographischen Bromsilberplatten einer genauen Messung unterzogen werden. Diese Messungen verschieden starker Schwärzungen sind mit einer Genauigkeit von Hundertelgraden des Scheiner-Sensitometers durchführbar, wenn man das von mir für derartige Arbeiten acceptierte Hartmann'sche Mikrophotometer benützt.

Immerhin muss man aber hiebei gewisse Vorsichtsmaßregeln beobachten, weil die Natur der Bromsilbergelatineemulsion zu groben Selbsttäuschungen bei den Bestimmungen der Schwärzungszahlen Anlass geben kann.

Während die Trockenplatte zur Ortsbestimmung von Linien oder Punkten bei Spectral- oder astrophotographischen Aufnahmen ohne besondere Controle stets Resultate größter Genauigkeit liefert, liegen die Verhältnisse beim Messen verschiedener Schwärzungsgrade viel ungünstiger.

Man darf zu Parallelversuchen stets nur Plattenstreifen nehmen, welche aus einer einzigen Platte geschnitten sind, gleichzeitig entwickelt, fixiert etc. werden. Man muss jeden Versuch mit demselben Plattenmateriale drei- bis viermal controlieren, weil mitunter die eine Seite einer Trockenplatte eine stärkere partielle Vorbelichtung erlitten haben kann als die andere und weil die Schichte unegal sein kann. Bei meinen Proben wurden für eine photometrische Bestimmung niemals weniger als drei Plattenstreifen nacheinander exponiert, ebenso viel beim Parallelversuche. Das Durchmustern und Messen verschieden lang belichteter Felder eines Streifens erstreckt sich bei meinen Arbeiten auf beiläufig 7 bis 10 Felder und mehr. Bei derartigem Vorgehen bemerkt man nicht selten, dass

mitunter die Centralstreifen aus unbekannten Gründen einen unregelmäßigen Gang aufweisen und man die Serie verwerfen muss.

Die zu photometrischen Versuchen verwendeten Bromsilberplatten sollen schleierlos arbeiten; eventuell kann man dem normalen Eisenoxalat-Entwickler ein wenig Bromkaliumlösung zusetzen (siehe meine erste Abhandlung), um ganz klare Platten zu erhalten. Ob man die Platten bis an die Grenze des Schwellenwertes vorbelichtet oder nicht, macht wenig aus. Die mit Oxalat entwickelten Bromsilberplatten weisen nach dem Fixieren stets eine schwache milchige Trübung auf, welche vom Calciumoxalat (verursacht durch das zum Waschen der Platten benützte kalkhältige Brunnenwasser) herrührt. Taucht man die fixierten und bestens gewaschenen Platten in stark verdünnte Salzsäure (1:1000), so verschwindet der Kalkschleier in wenigen Secunden. Selbstverständlich bleibt der Kalkschleier von vorneherein aus, wenn man destilliertes Wasser als Spülwasser benützt, und diesen Weg schlug ich bei den nachfolgenden Messungen ein.

Durch die Vermeidung der Schleierbildung wird die Sicherheit der Schwärzungsmessung, namentlich an den dünneren Sensitometernummern, erhöht. Ganz schwache Sensitometerfelder sind für solche Beobachtungen (Schwärzungsmessungen) sehr unsicher, weil Vorbelichtung, Schleier, Trübung der Gelatineschichte stören und geringe Schwärzungsdifferenzen verdecken oder wenigstens die Verhältniszahlen bei photochemischem Befunde unsicher machen. Ferner arbeiten die Platten in der Periode der Unterexposition anscheinend unregelmäßiger. Deshalb empfiehlt es sich, mit der Messung bei der Schwärzungszahl[1] 0·2 oder vielleicht 0·15 zu beginnen und auf steigende Schwärzungen bis beiläufig zur Schwärzung 1·7 überzugehen; allzu dunkle Sensitometerfelder lassen sich wieder schwer messen.

---

[1] Gemeiner Logarithmus des Bruches $\frac{\text{auffallendes Licht}}{\text{durchfallendes Licht}}$ bei einer geschwärzten photographischen Schichte (siehe meine erste Abhandlung über Sensitometrie).

Ferner darf man nicht vergessen, dass die Schwärzung eines photographischen Hervorrufungsbildes auf Bromsilberemulsion sich als ein Conglomerat von Silberkörnern darstellt. Mittels des Mikrophotometers kann man nur eine kleine Fläche des geschwärzten Feldes ins Auge fassen, deren Schwärzung ein geübter Beobachter mit einer Fehlergrenze von ungefähr $^1/_2$ bis 1% messen kann. Fasst man eine benachbarte Stelle desselben Feldes ins Auge, so ergeben sich Schwankungen der Ablesungen, welche darauf hindeuten, dass die dicht angehäuften Silberkörnchen wohl annähernd, aber nicht völlig gleichmäßig vertheilt sind. Ich unterzog deshalb bei jeder Serie stets mindestens vier verschiedene Stellen jedes Sensitometerfeldes[1] der Messung, wonach es möglich ist, einen Mittelwert der photographischen Schwärzung mit einer beiläufigen Genauigkeit von $\pm ^1/_2$ bis 1% oder vielleicht in ungünstigeren Fällen von etwa $1^1/_2\%$ zu erhalten.[2]

Dieser Vorgang ermöglicht hinlänglich die Eliminierung größerer Beobachtungsfehler.

Schließlich glaube ich noch eine Wahrnehmung mittheilen zu sollen, welche ich mehrmals machte. Die Hervorrufung einer Bromsilbergelatineplatte braucht je nach ihrer Provenienz, Temperatur und Zusammensetzung des Entwicklers etc. verschieden lange Zeit, nehmen wir an 5 bis 10 Minuten mittels Eisenoxalat, dem man einige Tropfen Bromkaliumlösung zugesetzt hat, um den schädlichen Schleier hintanzuhalten. Kürzt

[1] Jede Serie eines Parallelversuches wurde in einem Zuge mit zwei Scalenablesungen durchgemessen und dieser Vorgang drei- bis viermal wiederholt. Demzufolge liegen jeder Schwärzungszahl meiner Tabellen acht Ablesungen einer einzelnen Nummer von jeder der drei Controlplatten, d. i. zusammen 24 Ablesungen zugrunde.

[2] Zur besseren Orientierung über die Wertschätzung derartiger photometrischer Fehlergrenzen sei erwähnt, dass bei amtlichen Beglaubigungscertificaten der physikalischen technischen Reichsanstalt in Deutschland für Hefnerlampen Abweichungen der Lichtstärke von ihrem Sollwerte bis zu $\pm 2\%$ gestattet sind (Krüss, Bericht über die Lichtmesscommission, 1897, S. 40, 75 und 114). Hefner selbst schätzt die Constanz seiner Lampe auf 1%, und bei optisch-photometrischen Arbeiten, welche auf gute Genauigkeit Anspruch machen, bleiben Differenzen von 1% unbeanständet (Krüss, a. a. O., S. 40), obschon sich bei besonderer Sorgfalt die mittleren Fehler des Resultates bei der optischen Photometrie auf beiläufig $\pm 0\cdot 2\%$ herabdrücken lassen (a. a. O., S. 74).



man die Entwickelungsdauer wesentlich ab, z. B. auf 2 Minuten, so erhält man eine Scala der Sensitometernummern, welche (namentlich an den Stellen stärkerer Lichteinwirkung) nicht gehörig durchentwickelt ist und mangelnde Gradation zeigt. Solche Platten eignen sich schlecht zur Photometrie der Lichtquellen. Wie aus den Schwärzungscurven meiner ersten Abhandlung hervorgeht, geben schwache Entwickelungen flache Curven und mangelhafte Gradation. Eine Platte ist aber zu sensitometrischen Zwecken umso geeigneter, je steiler die Schwärzungscurven sind,[1] abgesehen von ganz starken Schwärzungen, welche überhaupt zu wenig Licht durchlassen.

Über die Grenzen der Genauigkeit der Reduction der chemischen Helligkeit der Benzinlampe auf die normale Hefner'sche Amylacetatlampe.

Bei der Reduction der für die Sensitometrie photographischer Platten verwendeten Benzinlampe auf die Hefner'sche Amylacetat-Einheit muss man die Verschiedenheit der Leuchtmaterialien und der hiermit verbundenen, allerdings nur wenig abweichenden Farbennuance der Lichtquelle (verschiedene spectrale Zusammensetzung) in Erwägung ziehen.

Diese spectrale Verschiedenheit der beiden genannten Lichtquellen fand ich bei meinen früheren Untersuchungen über das »System der Sensitometrie photographischer Platten«[2] so gering, dass ich damals keinerlei Einfluss auf das photometrische Resultat bemerkte und allen Grund hatte, bei der Reduction der Lichtintensität der Scheiner'schen Benzinlampe auf die Hefner'sche Amylacetatlampe die spectrale Verschiedenheit als belanglos anzunehmen.

Fernerhin ist zu erwähnen, dass bedeutende spectrale Verschiedenheiten der Lichtquellen die relative photometrische Intensitätsbestimmung merklich beeinflussen können. A. Miethe fand bei seiner Studie »Zur Actinometrie astronomisch-photographischer Fixsternaufnahmen« (Rostock, 1890,

---

[1] Hierauf hat schon Schwarzschild in seinen »Beiträgen zur photographischen Photometrie der Gestirne« (Publ. der Kuffner'schen Sternwarte in Wien, 1900, S. 50) hingewiesen.

[2] A. a. O.

S. 53 und 55), dass die photochemische Wirkung einer gewissen Menge Lichtes von der Wellenlänge λ und die Wirkung einer Menge Lichtes von der Wellenlänge λ' für verschiedene Vielfache dieser Lichtmenge sich nicht gleichen, und dass demzufolge rothe Sterne je nach der Expositionszeit, welche man bei den photographischen Vergleichsaufnahmen einhält, im Verhältnisse zu den blauen und weißen Sternen einen stets wechselnden actinometrischen Wert haben. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass die ersteren so überwiegend viel rothes Licht ausstrahlen, dass wirklich dieses und nicht das beigemengte blaue Licht die photographische Arbeit verrichtet (a. a. O. S. 56).

Mit dieser Angabe Miethes stimmen auch meine mit anderer Versuchsanordnung mittels des Gitterspectrums ausgeführten Versuche über den Verlauf der »charakteristischen Curve« photographischer Platten im Gitterspectrum überein, bei welchen ich fand, dass jede photographische Platte eine besondere charakteristische Schwärzungscurve für die einzelnen Strahlen verschiedener Wellenlänge hat (Eder, System der Sensitometrie, diese Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. II. a, 1899, S. 1481).

Neuerdings glaubte J. Precht einen namhaften Einfluss der spectralen Zusammensetzung zweier sehr ähnlicher Lichtquellen, nämlich des Lichtes der Scheiner-Benzinlampe und der Hefner'schen Amylacetatlampe, auf ihre relative Helligkeit, bei verschiedenen Expositionszeiten und absoluten Intensitäten gefunden zu haben.[1] Precht stellte nämlich Versuche über die Reduction der photographischen Helligkeit der Scheiner-Benzinlampe (mit Cylinder) auf die Hefner-Amylacetatlampe (ohne Cylinder) an, welche ihm sehr abweichende, schlecht stimmende Resultate bei allerdings sehr dürftigem Beobachtungsmateriale gaben. Er fand schwankende Zahlen, welche die photographische Wirksamkeit von 1 Scheinerkerze = 0·054 bis 0·086 Hefnerlampen gaben, bei einer anderen kurzen Reihe 0·063 bis 0·079 Hefnerlampen. Obzwar seine aus einigen wenigen Beobachtungen gewonnenen Zahlen selbst

[1] Zeitschrift für physikalische Chemie, Bd. 33, S. 254.

als provisorische Resultate erst dann einigen Wert hätten beanspruchen können, wenn größere constante und zufällige Fehler unzweideutig ausgeschlossen worden wären, so hielt sich Precht dennoch schon aus diesen provisorischen Resultaten für berechtigt, den obenerwähnten Satz von Miethe, den dieser aus der Vergleichung von spectral sehr wesentlich verschiedenen Lichtquellen fand, auch auf solche Lichtquellen auszudehnen oder eigentlich als neu aufzustellen, welche in ihrer spectralen Zusammensetzung äußerst nahe stehen.

Die Sache bedurfte einer gründlichen Untersuchung, umso mehr, als Precht so weit gieng, zu behaupten: Man könne die Reduction der chemischen Helligkeit der Benzinvergleichsflamme auf die Hefner'sche Amylacetat-Einheit für die verschiedenen Felder beim Scheiner'schen Scalenphotometer nicht vornehmen, weil man für verschiedene Intensität und Expositionszeiten variable Verhältniszahlen ihrer relativen chemischen Helligkeit erhalte; d. h. es käme dann für jede geänderte Intensität und Expositionszeit der Benzinvergleichslampe und der Hefner'schen Normallampe ein anderes Helligkeitsverhältnis in Betracht, und zwar mit den sehr großen Abweichungen im Betrage von 20 bis 25%.

Als ich zum erstenmale die Reduction der chemischen Helligkeit der Scheinerlampe auf das Hefnerlicht für mein System der Sensitometrie vornahm, hatte ich von diesen Abweichungen nichts bemerkt, trotzdem ich über weitaus mehr Beobachtungen und mindestens ebenso genaue Messungsmethoden zur Bestimmung der photographischen Schwärzung der Sensitometerstreifen verfügte; obzwar daher die Precht'schen Resultate bereits durch meine vorhergegangenen Messungen ausreichend widerlegt waren, machte ich diese Frage dennoch zum Gegenstande neuerlicher Untersuchungen, weil es mir, mit Rücksicht auf die Publicität, welche Precht seinen Vorversuchen gab, und der Wichtigkeit, die er ihnen beimaß, nothwendig erschien, die Grundlagen des Systems der Sensitometrie möglichst zu fundieren.

Zur neuerlichen Controle der Frage, inwieweit die Reduction der photochemischen Helligkeit der Benzinlampe auf die Hefner'sche Amylacetatlampe

bei verschiedenen Lichtintensitäten und Belichtungszeiten erfolgen könne, belichtete ich eine Reihe von Bromsilbergelatine-Platten im Scheiner'schen Sensitometer vergleichsweise mit der einen und der anderen Lichtquelle.

Die Benzinlampe befand sich in 1 *m* Entfernung von der Bromsilberplatte, die mehr als dreizehnmal hellere Hefner'sche Amyllampe wurde entsprechend weiter aufgestellt, um sie zum gleichen photographischen Effect zu bringen.[1] Die auf diese Weise erhaltenen photographischen Vergleichsplatten zeigten eine Scala verschieden geschwärzter Sensitometerfelder. Dieselben wurden mittels meines Hartmann'schen Mikrophotometers (siehe a. a. O) gemessen und verglichen, ohne dass es für diesen Fall nöthig wäre, die absoluten Schwärzungszahlen zu bestimmen.[2] Stimmen die Schwärzungen der correspondirenden Felder für die zweierlei Lichtquellen nicht völlig, so kann man die relativen Intensitäten der letzteren auf Grund der Scalenablesungen interpolieren.

Der Vergleich der chemischen Helligkeit der Scheiner-Benzinlampe mit Glascylinder und des frei brennenden Hefnerlichtes

wurde mit Hilfe nachstehender Versuchsreihen vorgenommen.

Dritte Versuchsreihe. Zunächst wurde der Vergleich der Benzinlampe in 0·5 *m* Abstand mit der Hefner'schen Amylacetatlampe im Abstande von 1·8165 *m* (gemessen von der Flammenaxe) vorgenommen.[3] Da die atmosphärische Luft im Photometerraume vielleicht einen Einfluss auf relative Flammenhelligkeit haben kann,[4] so wurde der Barometerstand 752·5 *mm*,

---

[1] Denselben Vorgang hatte ich auch bei meinen Versuchen (System der Sensitometrie, diese Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. II a, November 1899) eingehalten.

[2] Diese Bestimmung lässt sich übrigens mit der Tabelle in meiner Abhandlung »System der Sensitometrie« (November 1899, a. a. O.) vornehmen.

[3] Nach meinen früheren photometrischen Bestimmungen war bei diesen Abständen annähernd gleiche chemische Helligkeit beider Standards zu erwarten. Die Belichtungszeit war zwei Minuten, die Entwickelungsdauer sieben Minuten bei 15° C.

[4] Vergl. Liebenthal, Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 5, S. 157, Eders Jahrb. für Photogr., 1897, S. 349. Vergl. auch Krüss, Bericht über die Arbeiten der Lichtcommission, München, 1897.

die Luftfeuchtigkeit = 65%, Temperatur 16° C. bestimmt; die Kohlensäurebestimmung erschien in Anbetracht des gut ventilierten Arbeitsraumes überflüssig.

Selbstverständlich war das Arbeitszimmer matt, dunkel gestrichen, und es wurde vor die frei brennende Hefnerlampe ein großer schwarzer Schirm mit Ausschnitt und darüber ein lichtdichter Deckel angebracht, um den Zutritt von falschem Lichte zum Sensitometer zu hindern. Bei der mit Cylinder versehenen Scheinerlampe sind besondere Vorsichtsmaßregeln nicht nothwendig. Die erhaltenen Messungsresultate (Mittel von je 3 Controlplatten mit je 10 Sensitometerfeldern für jede Lampenart und 8 Ablesungen am Mikrophotometer für je ein Sensitometerfeld) sind in nachfolgender Tabelle wiedergegeben.

Die Lampen befanden sich bei den folgenden Versuchen gegenüber dem Sensitometerfelde Nr. 1 beim Scheiner-Sensitometer.

Bei der Berechnung des Resultates sind die Correcturen nach Schwarzschild (Eders Jahrbuch für Photogr., 1900, S. 161) nicht einbezogen worden, weil durch Berücksichtigung derselben das Resultat nicht wesentlich geändert wird.

Dritte Versuchsreihe.

Vergleich der chemischen Helligkeit der Benzinlampe in 0·5 m Abstand mit Hefners Amylacetatlampe in 1·8165 m Abstand (Apolloplatte) 3 Minuten Exposition.

Sensitometer Nr.	Scalentheile am Mikrophotometer		Differenz der Scalenablesungen	Helligkeitsdifferenz der beiden Lichtquellen in Graden Scheiner
	Hefners Amylacetatlampe, 1·8165 m Abstand	Benzinlampe, 0·5 m Abstand		
14	33·61	33·60	—0·01	—0·010
13	34·52	34·51	—0·01	—0·009
12	35·81	35·81	0·00	0·000
11	38·47	38·45	—0·02	—0·007
10	41·41	41·36	—0·05	—0·017
9	44·47	44·42	—0·05	—0·017
8	47·39	47·40	+0·01	+0·003
7	50·49	50·43	—0·06	—0·020
6	53·37	53·42	+0·05	+0·018
5	56·13	56·15	+0·02	+0·007
			Mittel...	—0·0052

Aus der Scalendifferenz ergibt sich die chemische Helligkeit einer Scheiner-Benzinlampe = 0·07565 Hefner-Einheiten.

Derselbe Versuch wurde mit ganz gleicher Anordnung, jedoch einer anderen Sorte von Bromsilbergelatine-Platten von etwas geringerer Empfindlichkeit wiederholt.

Vierte Versuchsreihe.

Vergleich der chemischen Helligkeit der Benzinlampe in 0·5 *m* Abstand mit dem Hefnerlichte in 1·8165 *m* Abstand (Schleussnerplatte), 3 Minuten Exposition.

Sensitometer Nr.	Scalentheile am Mikrophotometer		Differenz der Scalenablesung	Helligkeitsdifferenz der beiden Lichtquellen in Graden Scheiner
	Hefners Amylacetatlampe 1·8165 *m* Abstand	Benzinlampe in 0·5 *m* Abstand		
13	31·00	30·90	—0·10	—0·050
12	33·06	33·12	+0·06	+0·026
11	35·32	35·23	—0·09	—0·039
10	37·60	37·45	—0·15	—0·062
9	40·15	40·01	—0·14	—0·056
8	42·65	42·51	—0·14	—0·061
7	44·80	44·77	—0·03	—0·012
6	47 43	47·33	—0 10	—0·044
5	49·40	49·34	—0·06	—0·030
4	51·41	51·37	—0·04	—0·020
3	53·38	53·41	+0·03	+0·015
			Mittel...	—0·030

Aus diesen Zahlen ergibt sich die Helligkeit von 1 Scheiner-Benzinlampe = 0·07520 Hefner-Einheiten.

Nun wurden die Helligkeitsvergleiche bei verdoppeltem Abstande beider Lichtquellen vorgenommen.

Fünfte Versuchsreihe.

Vergleich der chemischen Helligkeit der Benzinkerze in 1 *m* Abstand mit dem Hefnerlichte in 3·633 *m* Abstand (Apolloplatte).

Sensitometer Nr.	Scalentheile am Mikrophotometer		Differenz der Scalenablesungen	Helligkeitsdifferenz der beiden Lichtquellen in Graden Scheiner
	Hefners Amylacetatlampe	Scheiner-Benzinlampe		
8	31·46	31·49	+0·03	+0·015
7	33·50	33·51	+0·01	+0·007
6	34·47	34·60	+0·13	+0·065
5	37·54	37·53	—0·01	—0·003
4	40·53	40·60	+0·07	+0·023
3	43·56	43·63	+0·07	+0·023
2	46·55	46·64	+0·09	+0·030
1	49·51	49·52	+0·01	+0·003
a	52·51	52·50	—0·01	—0·003
b	55·49	55·57	+0·08	+0·027
			Mittel...	+0·0187

Es erscheint also die Scheinerkerze ein wenig heller, und zwar ergibt sich 1 Scheinerlampe = 0·07608 Hefner-Einheiten.

Sechste Versuchsreihe.

Vergleich der chemischen Helligkeit der Benzinkerze in 1 m Abstand mit dem Hefnerlichte in 3·633 m Abstand (Schleussnerplatte).

Sensitometer Nr.	Scalentheile am Mikrophotometer		Differenz der Scalen-ablesungen	Helligkeits-differenz der beiden Licht-quellen in Graden Scheiner
	Hefners Amyl-acetatlampe	Scheiner-Benzinlampe		
8	33·45	33·43	—0·02	—0·010
7	35·48	35·46	—0·02	—0·010
6	37·49	37·37	—0·12	—0·060
5	39·48	39·38	—0·10	—0·050
4	41·55	41·43	—0·12	—0·060
3	43·58	43·46	—0·12	—0·060
2	45·50	45·44	—0·06	—0·030
1	47·50	47·46	—0·04	—0·020
a	49·48	49·43	—0·05	—0·025
b	51·50	51·47	—0·03	—0·015
c	53·50	53·42	—0·08	—0·040
			Mittel...	—0·0345

Es erscheint demnach die Scheinerlampe etwas weniger hell, nämlich 1 Scheinerlampe = 0·07513 Hefner-Einheiten.

Zur Controle wurde ein vergleichender Versuch mit etwas geändertem Abstande der Amylacetatlampe vorgenommen.

Siebente Versuchsreihe.

Vergleich der chemischen Helligkeit der Benzinlampe in 1 *m* Abstand mit dem Hefnerlichte in 3·64 *m* Abstand (Schleussnerplatte).

Sensitometer Nr.	Scalentheile am Mikrophotometer		Differenz der Scalen-ablesungen	Helligkeits-differenz der beiden Licht-quellen in Graden Scheiner
	Hefners Amyl-acetatlampe	Scheiner-Benzinlampe		
7	30·55	30·53	—0·02	—0·008
6	33·21	33·36	+0·15	+0·053
5	36·26	36·39	+0·13	+0·043
4	39·23	39·29	+0·06	+0·019
3	42·40	42·37	—0·03	—0·010
2	45·48	45·54	+0·06	+0·018
1	49·01	49·16	+0·15	+0·044
a	52·28	52·35	+0·07	+0·023
b	55·38	55·40	+0·02	+0·008
c	57·34	57·36	+0·02	+0·008
			Mittel...	+0·0198

Aus diesen Messungen ergibt sich die Helligkeit 1 Scheinerlampe = 0·07583 Hefner-Einheiten.

Wenn man die einzelnen Ablesungen bei jeder Versuchsreihe betrachtet, so kann man daraus keinerlei regelmäßigen Einfluss der Belichtungszeit (die Sensitometernummern im Intervalle von 10° Scheiner entsprechen einer elffach verlängerten Belichtungszeit) auf die relative Helligkeit des Benzin- und Amylacetatlichtes ableiten, ebensowenig wie eine Abweichung ihres Helligkeitsverhältnisses bei proportional verminderten Helligkeit der Lichtquellen erkennbar ist. Vielmehr wiesen sämmtliche Messungen auf ein constantes Helligkeitsverhältnis beider Lichtarten bei veränderter Helligkeit und Belichtungszeit hin. Es ist somit zwecklos, für jede einzelne Sensitometernummer ein besonderes Helligkeitsverhältnis rechnen zu wollen, sondern man kann die genauesten Reductionszahlen erhalten,

wenn man aus einer Sensitometerserie die mittlere Abweichung der chemischen Helligkeit verschiedener Lichtquellen aus allen geeigneten Sensitometergraden in Scheinergraden ausdrückt und der Rechnung zugrunde legt. Auf diese Weise ergibt sich das Verhältnis der chemischen Helligkeit der Scheiner-Benzinkerze zum Hefnerlichte:

für den Abstand der Benzinlampe	für den Abstand der Hefner-Amylacetatlampe	Expositionszeit in Minuten	Plattensorte	Verhältnis des Scheinerlichtes zum Hefnerlichte
0·5 *m*	1·8165 *m*	3	Apollo	1 Scheinerl. = 0·07565 Hefnerl.
0·5	1·8165	3	Schleußner	1 » = 0·07520 »
1	3·633	3	Apollo	1 » = 0·07608 »
1	3·633	3	Schleußner	1 » = 0·07513 »
1	3·640	2	Schleußner	1 » = 0·07583 »
				Mittel = 0·07558

Daraus ergibt sich der mittlere Wert von 1 Scheinerkerze = 0·07558 Hefner-Einheiten.

Vergleicht man damit meinen Befund in meiner ersten Abhandlung über »Sensitometrie« (a. a. O.), wo ich für dieselbe Benzinsorte die chemische Helligkeit von 1 Scheinerlampe = 0·076 Hefner-Einheiten gefunden hatte, so ist diese Übereinstimmung sehr befriedigend.

Der Vergleich der optischen Helligkeit der Scheinerlampe bei 1 *m* Abstand mit dem Hefnerlichte ergab bei einer größeren Zahl diesbezüglicher Vorversuche: 1 Scheinerlampe = 0·089 ±0·0021 Hefner-Einheiten. Es erscheint also bei gleicher chemischer Helligkeit beider Lichtquellen dem Auge das Hefnerlicht optisch heller als das Benzinlicht.

Diese Verhältniszahl von optischer Helligkeit zur chemischen Wirksamkeit zweier Lichtquellen, welche im Bedarfs-

falle noch genauer zu ermitteln wäre, ist für die Charakteristik der Lichtintensität von Bedeutung.

Vergleich der photochemischen Helligkeit der Benzinlampe mit einer annähernd optisch gleich hellen, abgeblendeten Amylacetatlampe.

Durch die vorher beschriebenen Versuche ist die Frage dahin entschieden, dass die Reduction der Helligkeit der Benzinlampe auf die Amylacetatlampe durch Vergleichung der Gesammtstrahlung sich innerhalb der Beobachtungsfehlergrenze genau durchführen lässt.

Trotzdem schien es mir von Interesse, die Benzin- und Amylacetatlampe durch Vorschalten von Fensterchen mit Spaltblende[1] auf annähernd[2] gleiche optische Helligkeit zu bringen und dann die hell leuchtende mittlere Zone beider Lampen im Abstande von $^1/_2$, 1, 2 und 3 *m* zu vergleichen, um zu sehen, ob bei diesen sehr ähnlichen Lichtquellen die relative chemische Helligkeit mit der absoluten Intensität und Belichtungszeit schwanke oder nicht. Diese Art des Vergleiches der Scheinerlampe mit einer analog abgeblendeten Amylacetatlampe[3] zog ich aus dem Grunde in den Kreis dieser Untersuchungen ein, weil ja derartige abgeblendete Amylacetatlampen als Standards mehrfach vorgeschlagen worden waren und die Möglichkeit correcter Reduction beiderlei Lampen actuelles Interesse für die chemische Photometrie besitzt. Die vorgenommenen Messungen der relativen Schwärzungen der Vergleichsaufnahmen im Scheiner'schen Photometer ergeben die in nachfolgenden Tabellen mitgetheilten Zahlen.

---

1 Die Scheinerlampe wurde in ihrer Originalform verwendet; die Amylacetatlampe hatte einen beweglichen Spalt mit Mikrometertheilung.

2 Die absolut gleiche optische Helligkeit beider Lichtquellen war für den Zweck dieser Versuchsreihe gleichgiltig, es handelte sich nur um ein constantes Verhältnis beider bei stark genäherter optischer Helligkeit.

3 Das als Blende dienende Fensterchen lässt nur die hellste Zone der Flamme frei, so dass naturgemäß ihre spectrale Zusammensetzung ein wenig anders sein wird als die Gesammtstrahlung der Flamme in ihrer vollen Höhe (z. B. bei der Hefner'schen Einheit).

Vergleich der chemischen Helligkeit der Scheiner-Benzinlampe mit einer auf annähernd gleiche optische Intensität abgeblendeten Amylacetatlampe.

Grade Scheiner	Scalentheile am Mikrophotometer		Differenz der Scalentheile	Helligkeitsdifferenz der beiden Lichtquellen in Scheinergraden
	Abgeblendete Amylacetatlampe mit 1·3 *mm* Spalt	Scheiner-Benzinlampe		
	Achte Versuchsreihe. Abstand beider Lichtquellen = 0·5 *m*, Exposition 2 Minuten.			
8	35·41	35·49	+0·08	+0·040
7	37·37	37·62	+0·25	+0·101
6	40·03	40·19	+0·16	+0·062
5	42·50	42·68	+0·18	+0·069
4	45·37	45·50	+0·13	+0·055
3	47·38	47·53	+0·15	+0·075
2	49·25	49·40	+0·15	+0·100
1	50·43	50·63	+0·20	+0·155
a	52·51	52·67	+0·16	+0·100
			Mittel...	+0·084
	Neunte Versuchsreihe. Abstand beider Lichtquellen = 2 *m*, Exposition 10 Minuten.			
6	29·59	29·69	+0·10	+0·100
5	30·50	30·75	+0·25	+0·132
4	33·35	33·52	+0·17	+0·063
3	35·90	36·06	+0·16	+0·067
2	38·14	38·25	+0·11	+0·048
1	40·50	40·62	+0·12	+0·046
a	43·41	43·53	+0·12	+0·043
b	46·27	46·39	+0·12	+0·048
c	48·36	48·63	+0·27	+0·108
			Mittel...	+0·073

Grade Scheiner	Scalentheile am Mikrophotometer		Differenz der Scalentheile	Helligkeitsdifferenz der beiden Lichtquellen in Scheinergraden
	Abgeblendete Amylacetatlampe mit 1·3 *mm* Spalt	Scheiner-Benzinlampe		
Zehnte Versuchsreihe. **Abstand beider Lichtquellen = 3 *m*, Exposition 15 Minuten.**				
3	32·37	32·58	+0·21	+0·105
2	34·39	34·68	+0·29	+0·132
1	36·76	37·00	+0·24	+0·101
a	39·04	39 38	+0·34	+0·121
b	42·05	42·45	+0·40	+0·149
c	44·45	44·70	+0 25	+0·101
			Mittel...	+0·118

Die Zahlen der Tabellen III bis X zeigen zur Genüge, dass die relativen chemischen Helligkeiten der Benzin- und Amylacetatlampe innerhalb der Beobachtungsfehlergrenze constante Werte haben, dass sie unabhängig von Lichtintensität und Expositionszeit sind.

Es erscheint somit vollkommen zulässig, an den verschieden stärker und schwächer belichteten Sensitometerfeldern den photographischen Effect beider Lichtquellen zu bestimmen, den mittleren Wert des photographischen Effectes aus allen diesen Sensitometernummern der Bestimmung der Helligkeitsrelation zugrunde zu legen (Beispiel siehe Tabelle III bis VII). Die bei den Abständen von $^1/_2$, 2 und 3 *m* mit ganz verschiedenen Belichtungszeiten gefundenen mittleren Verhältniszahlen $\frac{100}{102\cdot2}$, $\frac{100}{101\cdot9}$ und $\frac{100}{103\cdot1}$ zeigen, dass in dem vorliegenden Falle von einem störenden Einflusse etwaiger spectraler Verschiedenheit der Lichtquellen im Sinne des Purkinje'schen Phänomens nicht gesprochen werden kann.

Als Schlussergebnis geht aus diesen Versuchen hervor, dass ich berechtigt war,

1. sowohl die Benzinlampe als constanten secundären Standard zu acceptieren, als auch

2. den Einfluss der geringen etwaigen spectralen Verschiedenheit der Benzin- und Amylacetatlampe als belanglos für die Reduction ihrer relativen chemischen Helligkeit bei Bromsilbergelatine anzusehen.

Weiters geht daraus hervor, dass

3. die Reduction der Helligkeit der Benzinlampe auf die Hefner'sche Einheit mit großer Genauigkeit in der Weise möglich ist, dass man jenen Lichtabstand beider Lichtquellen bestimmt, in welchem sie (bei gleicher Belichtungsdauer) den gleichen photographischen Effect geben. Die Resultate sind innerhalb weiter Grenzen constant (bei proportionaler Vermehrung oder Verminderung der Lichtintensität und Expositionszeit), wenn man bei den Schwärzungsmessungen der photographischen Platten störende Nebeneinflüsse fernhält und die Bedingungen normaler Belichtung und Entwickelung erfüllt.

4. Sollen die sensitometrischen Angaben über Empfindlichkeit, Schwellenwert etc. photographischer Bromsilbergelatine-Platten direct mit Benützung des Hefnerlichtes (Amylacetatlampe) vorgenommen werden, ohne Anwendung der Scheiner-schen Benzinlampe als Vergleichslicht (secundären Standard), so kann man normale Scheinergrade dadurch erhalten, dass man das frei brennende Hefnerlicht in einer Distanz von 3·637 *m* (d. i. Abstand der Dochtaxe der Hefnerlampe von der sensiblen Plattenschichte im Scheiner-Sensitometer, großes Modell) aufstellt.[1] Die Helligkeit der Scheiner'schen Benzinkerze mit jener Benzinsorte, welche bei der ersten Aichung angewendet wurde, entspricht dann nach vorliegenden Versuchen 0·0756 des Hefnerlichtes. Man erhält bei diesem Vorgange mit einer Genauigkeit von Hundertstelgraden Scheiner dieselben Scheiner'schen Sensitometerzahlen und dieselben

---

[1] Mit anderen Worten: Die chemische Helligkeit der Scheiner-Benzinlampe (mit der von mir erwähnten Benzinsorte) in 1 *m* Abstand ist für Bromsilbergelatine gleich dem Hefnerlichte vom Abstande 3·637 *m*.



Werte für die chemischen Lichtintensitäten in Secunden-Meterkerzen, wie sie in meinem »System der Sensitometrie« (1. Abhandlung, Tabelle I) angegeben sind.

Schließlich bemerke ich, dass ich Herrn Dr. Schwarzschild in München, welcher sich sehr eingehend mit sensitometrischen Studien und der photographischen Photometrie der Gestirne befasste (Publicationen der Kuffner'schen Sternwarte in Wien, 1900, S. 35; Eders Jahrbuch für Photogr., 1900), die Ergebnisse meiner vorliegenden Untersuchung mittheilte und ihn ersuchte, meine Laboratoriumsbefunde mit seinen astrophotographischen Beobachtungen zu vergleichen. Es erscheint mir sehr erfreulich, dass die Resultate der photometrisch-astrophysikalischen Untersuchungen Schwarzschilds, welche unabhängig und im Nachtrage zu meinen eigenen Arbeiten von dem letzteren ausgeführt wurden (vergl. Schwarzschild, Über die photographische Vergleichung der Helligkeit verschiedenfarbiger Sterne, Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. Wien, 1900), sich in vollständiger Übereinstimmung mit meinen Versuchsergebnissen befinden.

Über die photographische Vergleichung der Helligkeit verschiedenfarbiger Sterne

von

K. Schwarzschild in München.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. December 1900.)

Bekanntlich ist die Vergleichung verschiedenfarbiger Sterne ein wunder Punkt der optischen Photometrie der Gestirne. Sieht man ab von der verschiedenen Farbenempfindlichkeit der Beobachter und substituiert für sie alle ein menschliches Normalauge, so bleibt immer noch ein Einfluss des Beobachtungsinstrumentes infolge des sogenannten Purkinje-Phänomens: Ein rother Stern erscheint umso heller im Vergleiche zu einem weißen, je mehr die Intensität beider verstärkt wird, je lichtstärker das Instrument ist, durch das man sie beobachtet. Die Herren Müller und Kempf[1] haben gezeigt, dass hierin jedenfalls zum Theile die Gründe für die von der Sternfarbe abhängigen systematischen Unterschiede verschiedener Helligkeitskataloge zu suchen sind. Speciell für veränderliche Sterne, die meist röthlich sind, wird sich aus der Vergleichung mit weißen Nachbarsternen im allgemeinen ein zu großer Wert für die Amplitude des Lichtwechsels ergeben.

Wie liegen die analogen Verhältnisse bei photographischen Helligkeitsmessungen? Die gewöhnlichen, nicht orthochromatischen Bromsilberemulsionen des Handels können im großen und ganzen als in Bezug auf ihre relative Farbenempfindlichkeit gleich gelten, sie zeigen alle (sobald sie reines Bromsilber enthalten) dasselbe Maximum der Empfindlichkeit bei etwa 450 $\mu\mu$, sind also geeignet, in ihrer Art ein »Normalauge« zu vertreten.

---

[1] Public. des astrophysik. Observatoriums zu Potsdam, Bd. 13, S. 462.

Aber es besteht auch für die Photographie ein dem Purkinje-Phänomen ganz analoger Übelstand. Zwei verschiedenfarbige Lichtquellen, die bei einer gewissen, für beide gleichen Expositionszeit gleiche Schwärzung ergeben, erfüllen diese Bedingung nicht mehr, wenn man die Expositionszeit ändert oder die Intensitäten der Lichtquellen im selben Verhältnisse verstärkt. Das ist zuerst von Herrn Miethe[1] bemerkt und, was den Einfluss der Expositionszeit angeht, kürzlich von Herrn Eder[2] durch Aufzeichnung der Schwärzungscurven für Licht verschiedener Wellenlänge aufs Anschaulichste dargelegt worden. Für die Zwecke der gewöhnlichen, wie der Stellarphotometrie kommt nun alles darauf an, wie groß quantitativ derartige Verschiebungen der relativen Lichtstärken sind. Es handelt sich natürlich nicht um Spectralphotometrie, bei der die Unterschiede in der Wirkungsweise verschiedener Wellenlängen am deutlichsten sichtbar werden, aber zugleich auch aus dem Resultate der Messung eliminiert werden können, sondern um die Vergleichung des Gesammteffectes aller Strahlungsarten auf die photographische Platte. Da kann man nun so viel voraussehen:[3] Bei dem ausgesprochenen Empfindlichkeitsmaximum der Platten im Blau wird die größere oder geringere Kraft der übrigen Spectralgebiete wenig ausmachen, so lange nur die Helligkeit des Spectrums im brechbareren Theile nicht gar zu klein ist, weil dann die Wirkung des Blau die der anderen Farben stark überwiegen und daher fast allein maßgebend sein wird. Ganz ähnlich werden ja auch die Wirkungen des Purkinjeschen Phänomens in der optischen Photometrie der Gestirne durch die überwiegende Gelbempfindlichkeit des Auges verhältnismäßig klein gehalten. So wird man für die meisten zu Leuchtzwecken oder zur Photometrie benützten Lichtquellen und für alle Sterne außer den deutlich rothen von vornherein wenig geneigt sein, einen starken Einfluss des photographischen Analogons zum Purkinje-Phänomen anzunehmen, und diese

---

[1] Zur Aktinometrie astronomisch-photographischer Fixsternaufnahmen. Göttingen, 1889.

[2] System der Sensitometrie photogr. Platten. Diese Sitzungsberichte, Bd. CVII, Abth. II a, S. 1475.

[3] Vergl. Eder, l. c., S. 1478 bis 1479.

Vermuthung wird glücklicherweise durch den Versuch bestätigt.

Um zunächst ein Maß für die Verschiedenheit des Spectrums, für den Farbenunterschied zweier Lichtquellen zu haben, das sowohl dem astronomischen, wie dem photographischen Gebrauche angeschlossen werden kann, definiere man folgendermaßen: »Relative Aktinität A zweier Lichtquellen heiße das Verhältnis ihrer photographischen Helligkeit, dividiert durch das Verhältnis ihrer optischen Helligkeit«. Specialfälle dieser Definition sind folgende: »Relative Aktinität A zweier Lichtquellen ist das Verhältnis ihrer photographischen Helligkeit wenn sie auf gleiche optische Helligkeit abgeblendet sind, oder auch das reciproke Verhältnis ihrer optischen Helligkeit, wenn sie auf gleiche photographische Helligkeit abgeblendet sind«.

Wie man nun in der Astronomie jedes Helligkeitsverhältnis in Größenclassen ausdrückt, indem man den negativen Logarithmus dieses Verhältnisses mit 2·5 multipliciert, so bilde man auch aus der relativen Aktinität A eine Größe F nach der Relation:

$$F = -2 \cdot 5 \log A,$$

und nenne F die »relative Farbentönung der betreffenden beiden Lichtquellen in Größenclassen ausgedrückt«. Man findet dann leicht, dass die »relative Farbentönung zweier Lichtquellen gleich ihrem optischen Größenunterschiede, vermindert um ihren photographischen Größenunterschied, ist«.

Der Begriff der relativen Aktinität entspricht dem photographischen Gebrauche, insoferne der Lichtquelle, welche im brechbareren Theile des Spectrums relativ kräftiger ist, die größere Aktinität zukommt; der Begriff der Farbentönung dem astronomischen, insofern der röthlichere, stärker gefärbte Stern die größere Farbentönung erhält.

Man hat beispielsweise für das optische Helligkeitsverhältnis der Scheiner'schen Benzin- zur Hefner'schen Amylacetatlampe den Wert 0·090, für ihr photographisches den Wert 0·076 [1] und findet daraus die Aktinität der Scheinerlampe relativ zur Hefnerlampe gleich 0·076 : 0·090 = 0·84. Daraus ergibt sich

[1] Eder, l. c. S. 1413.



die Farbentönung der Scheinerlampe im Vergleiche zur Hefnerlampe zu $-0 \cdot 4 \log 0 \cdot 84$ oder $+0 \cdot 19$ Größenclassen. Die Scheinerlampe hat die geringere Aktinität, die stärkere (röthlichere) Färbung.

In der Astronomie tritt aber noch eine weitere Vereinfachung ein. Die große Mehrzahl der Sterne gehört dem sogenannten ersten Spectraltypus an und hat nahezu dieselbe für diesen Spectraltypus charakteristische Intensitätsvertheilung im Spectrum. Es ist daher Praxis, den Anfangspunkt der Zählung der photographischen Größe so zu definieren, dass für einen und damit auch nahe für alle Sterne vom ersten Spectraltypus photographische und optische Größe übereinstimmen. Zugleich empfiehlt es sich, die Farbentönung irgend eines Sternes relativ zu einem Sterne vom ersten Spectraltypus auszuzeichnen und als »Farbentönung« schlechthin zu bezeichnen. Man erhält dann die einfache Definition: »Farbentönung eines Sternes ist der Unterschied zwischen seiner photographischen und seiner optischen Größe«. Und die relative Farbentönung zweier Sterne wird gleich der Differenz ihrer Farbentönungen schlechthin, d. h. ihrer Farbentönungen relativ zu Sternen vom ersten Spectraltypus.

Das Resultat von Herrn Eders zweiter Abhandlung zum »System der Sensitometrie photographischer Platten«[1] ist dieses, dass bei einem Vergleiche von Scheiner- und Hefnerlampe mit der geringen relativen Farbentönung von 0^m19 eine Änderung ihres photographischen Helligkeitsverhältnisses *nicht* zu bemerken ist, wenn man Intensität und Expositionszeit vom Einfachen bis zum Zehnfachen variieren lässt. Hier soll gezeigt werden, dass dasselbe Resultat auch für Lichtquellen von viel größerem Farbenunterschiede bestehen bleibt, allerdings nicht mit Herrn Eders außerordentlicher Schärfe, aber doch mit einer Genauigkeit, die für astronomische, wie für viele sensitometrische Zwecke ausreicht.

Unter den Sternen, von denen ich Beobachtungen in meinen »Beiträgen zur photographischen Photometrie der

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CIX. Abth. II. *a*.



Gestirne«[1] mitgetheilt habe, suchte ich Paare von Nachbarsternen aus, deren Componenten sehr nahe gleiche photographische, aber beträchtlich verschiedene optische Helligkeit besaßen und welche unter wechselnden Umständen aufgenommen worden waren. Es konnte entweder die Expositionszeit gewechselt haben, oder es konnte auch eine gemeinsame Änderung der Helligkeit beider Sterne erfolgt sein, da die Aufnahmen theils 9 *mm*, theils 28 *mm* außerhalb des Focus des betreffenden Instrumentes stattfanden, so dass die Ausdehnung der von den Sternen gelieferten Scheibchen und damit die Helligkeit ihrer Bilder auf der Platte zwischen dem Einfachen und dem Zehnfachen variierte. Die beiden zu vergleichenden Sternbilder befanden sich stets wenige Centimeter voneinander auf derselben Platte. Für den Einfluss einer verschiedenen Distanz der Sternbilder von der Fernrohraxe wurde eine experimentell bestimmte Correction[2] angebracht. Die photographische Helligkeit der Sterne wurde durch Vergleichung der Schwärzung ihrer Bilder mit einer Scala bestimmt. Da hierbei an eine Verwendung zu dem vorliegenden Zwecke gar nicht gedacht wurde, ist jede Voreingenommenheit ausgeschlossen. Der mittlere Fehler der Einschätzung in die Scala beträgt $0^m 06$ Größenclassen ($^1/_4{}^\circ$ Scheiner), der mittlere Fehler einer Helligkeitsdifferenz zwischen zwei Sternen demnach $0 \cdot 06 . \sqrt{2}$, gleich $0 \cdot 08$ Größenclassen ($^1/_3{}^\circ$ Scheiner).

In der nachstehenden Tabelle findet man zunächst die Namen der Sterne jedes Paares, ihre relative Aktinität A und Farbentönung F, dann die beobachtete relative Helligkeit der Sterne des Paares ausgedrückt in Größenclassen (durch Multiplication mit 4 gehen diese Zahlen in Theile von Scheinergraden über; positive Zahlen bedeuten größere Helligkeit des ersten — stets weniger activen, rötheren — Sternes jedes Paares). Die Aufnahmen sind je nach der Expositionszeit in der am Kopfe bezeichneten Weise in Gruppen zusammengefasst, sie sind ferner in zwei Abtheilungen getrennt nach der

[1] Public. der v. Kuffner'schen Sternwarte. Bd. V, Wien, 1898. Speciell S. *B*, 6, 7, 9 und S. *C*, 56, 70, 88, 94.

[2] Public. der v. Kuffner'schen Sternwarte, Bd. V, S. *C*, 54.

Nummer des Paares	Bezeichnung der Sterne	A	F	9 *mm* außerhalb des Focus					28 *mm* außerhalb des Focus					Anzahl der Platten
				30^s-1^m	81^s-3^m	$4-10^m$	$12-20^m$	60^m	$4-5^m$	$12-20^m$	36^m	60^m	$75-90^m$	
1	χ Persei Pihl Nr. 144 . . . » » » 86 . . .	$^1/_{1\cdot6}$	0^m5	.	.	+0·16	+0·07	+0·13	.	. .	.	.	.	. . 5, 4, 2, ...
2	Plejaden Bessel *s*. . . . » » Nr. 24	$^1/_{1\cdot6}$	0^m5	—0·01	—0·06	—0·06	—0·14	.	—0·05	—0·06	—0·10	.	+0·01	2, 3, 3, 1, . 3, 3, 1, . 2
3	» » » 17 » » » 37	$^1/_{1\cdot7}$	0^m6	.	+0·04	—0·02	—0·05	.	.	—0·06	+0·07	.	+0·04	. 3, 3, 1, . . 3, 1, . 2
4	Praesepe Hall Nr. 126 . . » » » 131 .	$^1/_{2\cdot5}$	1^m0	+0·08	+0·06	—0·01	+0·04	.	.	0·00	.	+0·02	. .	1, 1, 3, 2, . . 5, . 2, .
5	» » » 78 . . » » » 86 . .	$^1/_{2\cdot8}$	1^m1	+0·08	0·00	+0·02	+0·07	.	.	+0·04	.	+0·03	.	1, 1, 3, 2, . . 3, . 2, .
6	» » » 90 . . » » » 63 . .	$^1/_{2\cdot8}$	1^m1	+0·10	+0·13	+0·08	+0·04	.	.	+0·07	.	+0·14	.	1, 1, 3, 1, . . 5, . 2, .
7	» » » 65 . . » » » 87 . .	$^1/_{3\cdot0}$	1^m2	—0·02	—0·08	+0·02	+0·01	.	.	—0·04	.	—0·05	.	1, 1, 3, 2, . . 5, . 2, .
8	Plejaden Bessel Nr. 25 » » » 36	$^1/_{4\cdot0}$	1^m5	.	.	—0·11	—0·07	.	.	.	.	.	0·11	. . 1, 1, ... 2
9	» » » 8 » » » 36	$^1/_{4\cdot4}$	1^m6	.	.	+0·02	—0·07	.	.	.	.	.	+0·01	. . 1, 1, ... 2

Distanz vom Focus, in der sie erfolgten. Im letzten Theile der Tabelle ist unter »Anzahl der Platten« angegeben, aus wie viel Platten die an entsprechender Stelle des vorhergehenden Theiles der Tabelle stehenden Zahlen das Mittel bilden.

In den Zahlen der Tabelle ist keine die möglichen Beobachtungsfehler überschreitende und gesetzmäßige Variation innerhalb der einzelnen Horizontalreihen zu bemerken. Also selbst für Lichtquellen, deren Aktinität sich um das Drei- bis Vierfache, deren Farbentönung sich um mehr als eine Größenclasse unterscheidet, bewirkt Variation der Intensität oder Expositionszeit vom Einfachen auf das Zehnfache *keine* Verschiebung der relativen photographischen Helligkeit, welche über wenige Hundertstel Größenclassen, wenige Zehntel Scheinergrade hinausgienge.

Zunächst eine specielle Anwendung dieses Ergebnisses: Bei der Untersuchung des Lichtwechsels des veränderlichen Sternes η Aquilae habe ich gefunden, dass die Amplitude der Lichtschwankung photographisch doppelt so groß ist als optisch, mit anderen Worten, dass der Stern auch seine Farbentönung wechselt, und zwar (relativ zu benachbarten Sternen vom ersten Typus) von 0^m5 im Maximum der Helligkeit bis zu 1^m1 im Minimum der Helligkeit. η Aquilae erscheint dem Auge ein wenig gelblich. Wäre daher infolge des optischen Purkinje-Phänomens die optische Amplitude zu groß gemessen, so wäre die wirkliche Änderung der Farbentönung noch größer als sie hier erscheint. Umgekehrt läge die Sache, wenn man das photographische Analogon zum Purkinje-Phänomen auch dem Sinne nach dem optischen analog annehmen und seine Wirksamkeit in diesem Falle voraussetzen wollte. Man könnte schließlich, so lange man nicht durch quantitative Versuche eingeschränkt ist, die ganze Änderung der Farbentönung für scheinbar erklären und dem photographischen Purkinje-Phänomen in die Schuhe schieben. Diese Annahme wird nun durch die Zahlen der obigen Tabelle wiederlegt; bei η Aquilae, wo die Intensität von 1 auf 3, die Expositionszeit bei meinen Aufnahmen von 1 auf 6 schwankte, kann ein merklicher Einfluss des photographischen Purkinje-Phänomens überhaupt nicht

vorhanden sein, und der beobachtete Wechsel der Farbentönung des Sternes muss als reell betrachtet werden.

Allgemein erscheint nunmehr eine photographische Photometrie verschiedenfarbiger Lichtquellen wohl in demselben Maße berechtigt, wie die gewöhnliche optische. Natürlich wird es eine Grenze der Färbung, der Intensitäten und Expositionszeiten geben, über welche hinaus das ja von Miethe und Eder unzweifelhaft festgestellte photographische Purkinje-Phänomen sich bemerkbar macht, und der Begriff der relativen photographischen Helligkeit zweier Lichtquellen verschiedener Farbe seinen präcisen Sinn verliert. Ich möchte diese Notiz mit einer Aufforderung schließen, die sich an alle Astronomen richtet, welche über Aufnahmen derselben Himmelsgegend bei verschiedenen Expositionszeiten, eventuell mit verschiedenen Instrumenten verfügen, das Verhalten der auf ihren Platten befindlichen, besonders stark gefärbten Sterne unter diesen wechselnden Verhältnissen nachzuprüfen.

XXVI. SITZUNG VOM 13. DECEMBER 1900.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, verliest eine Einladung des Ausschusses des Wiener Göthe-Vereines zur Delegation von Vertretern der kaiserlichen Akademie bei der Enthüllung des Göthe-Denkmales (Samstag, den 15. December l. J.).

Da die Theilnehmerkarten auf Namen lauten, werden die darauf reflectierenden Herren ersucht, sich vorher zu melden.

Der Secretär legt ferner eine Abhandlung von Herrn Prof. Eduard Doležal in Leoben vor, welche den Titel führt: »Das Problem der fünf und drei Strahlen in der Photogrammetrie«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner legt eine von dem Privatdocenten Herrn Dr. Ludwig Merk in Graz verfasste Abhandlung vor, betitelt: »Experimentelles zur Biologie der menschlichen Haut. Zweite Mittheilung: Vom histologischen Bilde der Resorption«.

Das w. M. Herr Hofrath F. Mertens überreicht eine Arbeit von Herrn Privatdocenten Dr. R. Daublebsky v. Sterneck, welche den Titel führt: »Zur Tschebischeff'schen Primzahlen-Theorie«.

Herr Privatdocent Dr. Wolfgang Pauli in Wien überreicht eine vorläufige Mittheilung, betreffend »Weitere Untersuchungen über die physikalischen Zustandsänderungen der Kolloide«, welche in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Peter Rona im Institute für allgemeine und experimentelle Pathologie ausgeführt wurden.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Crivetz Th., Essai sur l'équidistante. Bukarest, 1900. 8°.

Universität in Messina, CCCL anniversario della università di Messina. Messina, 1900. 4°.

Weinek L., Photographischer Mond-Atlas, vornehmlich auf Grund von focalen Negativen der Lick-Sternwarte im Maßstabe eines Monddurchmessers von 10 Fuß. X. Heft. Prag, 1900. 4°.

Zur Tschebyschef'schen Primzahlentheorie

von

Dr. **R. Daublebsky v. Sterneck,**

Privatdocent in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. December 1900.)

Obzwar durch die hervorragenden zahlentheoretischen Arbeiten der Herren Hadamard[1] und De la Vallée-Poussin[2] nunmehr in aller Strenge bewiesen ist, dass, unter $\vartheta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen bis zur Grenze x verstanden, der Quotient $\frac{\vartheta(x)}{x}$ für unendlich wachsendes x die Einheit zur Grenze hat, ist es immerhin noch sehr wünschenswert, das Verhalten der Function $\vartheta(x)$ auch für endliche x möglichst genau kennen zu lernen; es dürfte daher nicht zwecklos erscheinen, wenn im folgenden versucht wird, die beiden, von Tschebyschef[3] für die Function $\vartheta(x)$ angegebenen Grenzen:

$$\vartheta(x) < \frac{6}{5} Ax - A\sqrt{x} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2$$

$$\vartheta(x) > Ax - \frac{12}{5} A\sqrt{x} - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3$$

$$A = 0\cdot 92129202\ldots$$

durch genauere zu ersetzen.

Aus dem angeführten asymptotischen Gesetze folgt unmittelbar, dass für jede noch so kleine positive Zahl ε die

[1] Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques (Bulletin de la société mathém., t. XXIV, 1896).

[2] Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers (Annales de la société scient. de Bruxelles, t. XX, 2e partie, 1896).

[3] Mémoire sur les nombres premiers. (Liouv. Journ. t. XVII, 1852.)

Anzahl der zwischen x und $(1+\varepsilon)x$ gelegenen Primzahlen mit x selbst ins unendliche wächst; es muss also für jeden Wert ε und zu jeder gegebenen Zahl k eine Zahl x existieren, von der Beschaffenheit, dass für diesen sowie alle größeren Werte x die Anzahl der zwischen x und $(1+\varepsilon)x$ gelegenen Primzahlen mindestens k beträgt. Wir verfügen aber noch keineswegs über die Mittel, eine solche Zahl x in allen Fällen thatsächlich angeben zu können; dies gelingt vielmehr auf Grund der Tschebyschef'schen Formeln nur für jene Werte ε, welche größer als $\frac{1}{5}$ sind.

Sylvester[1] hat bereits die Tschebyschef'schen Grenzen durch einigermaßen exactere zu ersetzen versucht und ist es ihm gelungen, durch Verwendung einer allerdings naheliegenden, doch vor ihm nicht benützten Methode, welche in der wiederholten Anwendung der Tschebyschef'schen Grundformeln besteht, zu zeigen, dass das Verhältnis der Coefficienten von x in den beiden Grenzen von $\vartheta(x)$ bis zum Betrage

$$\frac{7}{6}+\frac{11}{51072}=1\cdot1668820\ldots$$

herabgedrückt werden kann. Sein Resultat berechtigt uns daher, die obige Aufgabe für alle Werte ε, welche die Bedingung:

$$\varepsilon>0\cdot1668820\ldots$$

erfüllen, als gelöst zu betrachten.

Um in derselben Richtung einen weiteren, wenn auch kleinen Fortschritt zu erzielen, wollen wir im folgenden die Sylvester'sche Methode auf eine bisher nicht aufgestellte, der Tschebyschef'schen analoge Grundformel anwenden. Es wird sich daraus ein Verfahren ergeben, welches es ermöglicht, das Verhältnis der Coefficienten von x in den beiden Ausdrücken, zwischen denen $\vartheta(x)$ eingeschlossen ist, bis zur Grenze

[1] On Tchebycheffs theory of the totality of prime numbers comprised within given limits. (Amer. journal of math. Vol. 4. 1881.)

1·1427048... zu verkleinern und somit Lösungen der oben genannten Aufgabe zu finden, sobald ε die Bedingung erfüllt:

$$\varepsilon > 0\cdot 1427048\ldots,$$

(welcher Wert ein wenig unterhalb $\frac{1}{7}$ liegt). Wir wollen jedoch, wenigstens bei den ersten Schritten, nicht bloß den Coefficienten von x, sondern auch die der übrigen Glieder in den beiden Grenzen von $\vartheta(x)$ vollständig berechnen. Die erhaltenen Formeln sind auch für jene Werte ε, welche $\frac{1}{5}$ übersteigen und bei denen daher auch die Tschebyschef'schen Formeln selbst anwendbar sind, nicht ganz ohne Bedeutung, da sie, namentlich wenn k sehr groß ist, kleinere Werte x der verlangten Beschaffenheit liefern als die Tschebyschef'schen Ungleichungen.

Was die in den einzelnen Formeln auftretenden Zahlencoefficienten betrifft, so sei bemerkt, dass bei dem Weglassen der Decimalen immer darauf Rücksicht genommen wurde, dass die betreffenden Ungleichungen strenge richtig bleiben, indem erforderlichenfalls die letzte giltige Ziffer um eine Einheit erhöht wurde.

1.

Bezeichnen wir mit $T(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis $[x]$, mit $\vartheta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen der Primzahlen bis zur Grenze x, ferner mit $\psi(x)$ den Ausdruck:

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{4}}) + \ldots,$$

so besteht die von Tschebyschef aufgestellte Beziehung:

$$T(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots$$

Um zu der erwähnten neuen Ausgangsformel zu gelangen, bilden wir das Aggregat:

$$T = T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{6}\right) - T\left(\frac{x}{7}\right) + \\ + T\left(\frac{x}{70}\right) - T\left(\frac{x}{210}\right).$$

Indem wir für $T(x)$ den obigen Wert substituieren, findet sich:

$$\begin{aligned}
T = \psi(x) \quad & + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots \\
- \psi\left(\frac{x}{2}\right) & - \psi\left(\frac{x}{2.2}\right) - \psi\left(\frac{x}{3.2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4.2}\right) - \ldots \\
- \psi\left(\frac{x}{3}\right) & - \psi\left(\frac{x}{2.3}\right) - \psi\left(\frac{x}{3.3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4.3}\right) - \ldots \\
- \psi\left(\frac{x}{5}\right) & - \psi\left(\frac{x}{2.5}\right) - \psi\left(\frac{x}{3.5}\right) - \psi\left(\frac{x}{4.5}\right) - \ldots \\
+ \psi\left(\frac{x}{6}\right) & + \psi\left(\frac{x}{2.6}\right) + \psi\left(\frac{x}{3.6}\right) + \psi\left(\frac{x}{4.6}\right) + \ldots \\
- \psi\left(\frac{x}{7}\right) & - \psi\left(\frac{x}{2.7}\right) - \psi\left(\frac{x}{3.7}\right) - \psi\left(\frac{x}{4.7}\right) - \ldots \\
+ \psi\left(\frac{x}{70}\right) & + \psi\left(\frac{x}{2.70}\right) + \psi\left(\frac{x}{3.70}\right) + \psi\left(\frac{x}{4.70}\right) + \ldots \\
- \psi\left(\frac{x}{210}\right) & - \psi\left(\frac{x}{2.210}\right) - \psi\left(\frac{x}{3.210}\right) - \psi\left(\frac{x}{4.210}\right) - \ldots
\end{aligned}$$

Bringt man die rechte Seite auf die Form $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi\left(\frac{x}{i}\right)$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
T = \psi(x) & - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) + \psi\left(\frac{\psi}{13}\right) - \psi\left(\frac{x}{14}\right) - \psi\left(\frac{x}{15}\right) + \psi\left(\frac{x}{17}\right) \\
& + \psi\left(\frac{x}{19}\right) - \psi\left(\frac{x}{20}\right) - \psi\left(\frac{x}{21}\right) + \psi\left(\frac{x}{23}\right) - \psi\left(\frac{x}{28}\right) + \psi\left(\frac{x}{29}\right) \\
& - \psi\left(\frac{x}{30}\right) + \psi\left(\frac{x}{31}\right) - \psi\left(\frac{x}{35}\right) + \psi\left(\frac{x}{37}\right) - \psi\left(\frac{x}{40}\right) + \psi\left(\frac{x}{41}\right) \\
& - \psi\left(\frac{x}{42}\right) + \psi\left(\frac{x}{43}\right) - \psi\left(\frac{x}{45}\right) + \psi\left(\frac{x}{47}\right) - \psi\left(\frac{x}{50}\right) + \psi\left(\frac{x}{53}\right) \\
& - \psi\left(\frac{x}{56}\right) + \psi\left(\frac{x}{59}\right) - \psi\left(\frac{x}{60}\right) + \psi\left(\frac{x}{61}\right) - \psi\left(\frac{x}{63}\right) + \psi\left(\frac{x}{67}\right) \\
& - \psi\left(\frac{x}{70}\right) + \psi\left(\frac{x}{71}\right) + \psi\left(\frac{x}{73}\right) - \psi\left(\frac{x}{75}\right) + \psi\left(\frac{x}{79}\right) - \psi\left(\frac{x}{80}\right)
\end{aligned}$$

$$+\psi\left(\frac{x}{83}\right)-\psi\left(\frac{x}{84}\right)+\psi\left(\frac{x}{89}\right)-\psi\left(\frac{x}{90}\right)+\psi\left(\frac{x}{97}\right)-\psi\left(\frac{x}{98}\right)$$
$$-\psi\left(\frac{x}{100}\right)+\psi\left(\frac{x}{101}\right)+\psi\left(\frac{x}{103}\right)-2\psi\left(\frac{x}{105}\right)+\psi\left(\frac{x}{107}\right)$$
$$+\psi\left(\frac{x}{109}\right)-\psi\left(\frac{x}{110}\right)-\psi\left(\frac{x}{112}\right)+\psi\left(\frac{x}{113}\right)-\psi\left(\frac{x}{120}\right)$$
$$+\psi\left(\frac{x}{121}\right)-\psi\left(\frac{x}{126}\right)+\psi\left(\frac{x}{127}\right)-\psi\left(\frac{x}{130}\right)+\psi\left(\frac{x}{131}\right)$$
$$-\psi\left(\frac{x}{135}\right)+\psi\left(\frac{x}{137}\right)+\psi\left(\frac{x}{139}\right)-\psi\left(\frac{x}{140}\right)+\psi\left(\frac{x}{143}\right)$$
$$-\psi\left(\frac{x}{147}\right)+\psi\left(\frac{x}{149}\right)-\psi\left(\frac{x}{150}\right)+\psi\left(\frac{x}{151}\right)-\psi\left(\frac{x}{154}\right)$$
$$+\psi\left(\frac{x}{157}\right)-\psi\left(\frac{x}{160}\right)+\psi\left(\frac{x}{163}\right)-\psi\left(\frac{x}{165}\right)+\psi\left(\frac{x}{167}\right)$$
$$-\psi\left(\frac{x}{168}\right)+\psi\left(\frac{x}{169}\right)-\psi\left(\frac{x}{170}\right)+\psi\left(\frac{x}{173}\right)-\psi\left(\frac{x}{175}\right)$$
$$+\psi\left(\frac{x}{179}\right)-\psi\left(\frac{x}{180}\right)+\psi\left(\frac{x}{181}\right)-\psi\left(\frac{x}{182}\right)+\psi\left(\frac{x}{187}\right)$$
$$-\psi\left(\frac{x}{189}\right)-\psi\left(\frac{x}{190}\right)+\psi\left(\frac{x}{191}\right)+\psi\left(\frac{x}{193}\right)-\psi\left(\frac{x}{195}\right)$$
$$-\psi\left(\frac{x}{196}\right)+\psi\left(\frac{x}{197}\right)+\psi\left(\frac{x}{199}\right)-\psi\left(\frac{x}{200}\right)+\psi\left(\frac{x}{209}\right)$$
$$-2\psi\left(\frac{x}{210}\right)+\ldots$$

Bei den folgenden Gliedern $\psi\left(\frac{x}{i}\right)$ wiederholen sich offenbar dieselben Coefficienten in der Art, dass $a_i = a'_i$, sobald $i \equiv i'$ (mod. 210) ist.

Die Glieder der rechten Seite kann man nun auf folgende doppelte Weise zusammenfassen:

$$T(x)=\left[\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)\right]+\left[\psi\left(\frac{x}{11}\right)-\psi\left(\frac{x}{14}\right)\right]+\left[\psi\left(\frac{x}{13}\right)-\psi\left(\frac{x}{15}\right)\right]$$
$$+\left[\psi\left(\frac{x}{17}\right)-\psi\left(\frac{x}{20}\right)\right]+\left[\psi\left(\frac{x}{19}\right)-\psi\left(\frac{x}{21}\right)\right]+\left[\psi\left(\frac{x}{23}\right)-\psi\left(\frac{x}{28}\right)\right]$$

$$+\left[\psi\left(\frac{x}{29}\right)-\psi\left(\frac{x}{30}\right)\right]+\left[\psi\left(\frac{x}{31}\right)-\psi\left(\frac{x}{35}\right)\right]+\left[\psi\left(\frac{x}{37}\right)-\psi\left(\frac{x}{40}\right)\right]$$

$$+\left[\psi\left(\frac{x}{41}\right)-\psi\left(\frac{x}{42}\right)\right]+\dots$$

$$T(x)=\psi(x)+\psi\left(\frac{x}{13}\right)-\psi\left(\frac{x}{20}\right)+\psi\left(\frac{x}{73}\right)-\left[\psi\left(\frac{x}{10}\right)-\psi\left(\frac{x}{11}\right)\right]$$

$$-\left[\psi\left(\frac{x}{14}\right)-\psi\left(\frac{x}{17}\right)\right]-\left[\psi\left(\frac{x}{15}\right)-\psi\left(\frac{x}{19}\right)\right]-\left[\psi\left(\frac{x}{21}\right)-\psi\left(\frac{x}{23}\right)\right]$$

$$-\left[\psi\left(\frac{x}{28}\right)-\psi\left(\frac{x}{29}\right)\right]-\left[\psi\left(\frac{x}{30}\right)-\psi\left(\frac{x}{31}\right)\right]-\left[\psi\left(\frac{x}{35}\right)-\psi\left(\frac{x}{37}\right)\right]$$

$$-\left[\psi\left(\frac{x}{40}\right)-\psi\left(\frac{x}{41}\right)\right]-\left[\psi\left(\frac{x}{42}\right)-\psi\left(\frac{x}{43}\right)\right]-\dots$$

Die in den eckigen Klammern stehenden Differenzen sind in beiden Formeln sämmtlich $\geqq 0$, und man überzeugt sich sehr leicht, dass sich auch alle noch ferner hinzutretenden Glieder in derartige positive Differenzen zusammenfassen lassen. Hiezu war es allerdings nothwendig, in der zweiten Formel das störende Glied $\psi\left(\frac{x}{73}\right)$, welches dieser Zusammenfassung hinderlich wäre, vorwegzunehmen. Die beiden mit dem Coefficienten -2 behefteten Glieder $-2\psi\left(\frac{x}{105}\right)$ und $-2\psi\left(\frac{x}{210}\right)$ denke man sich in die beiden Bestandtheile mit dem Coefficienten -1 zerlegt.

Es folgt hieraus:

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)<T$$

$$\psi(x)>T-\psi\left(\frac{x}{13}\right)+\psi\left(\frac{x}{20}\right)-\psi\left(\frac{x}{73}\right).$$

Um T in Grenzen einzuschließen, verwenden wir die bekannten, aus der Stirling'schen Formel folgenden Ungleichungen:

$$T(x) < T_1(x) = \log \sqrt{2\pi} + x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12}$$

$$T(x) > T_2(x) = \log \sqrt{2\pi} + x \log x - x - \frac{1}{2} \log x,$$ [1]

und erhalten hieraus für T die beiden Grenzen:

$$T < T_1(x) + T_1\left(\frac{x}{6}\right) + T_1\left(\frac{x}{70}\right) - T_2\left(\frac{x}{2}\right) - T_2\left(\frac{x}{3}\right) - T_2\left(\frac{x}{5}\right) - T_2\left(\frac{x}{7}\right) - T_2\left(\frac{x}{210}\right)$$

$$T > T_2(x) + T_2\left(\frac{x}{6}\right) + T_2\left(\frac{x}{70}\right) - T_1\left(\frac{x}{2}\right) - T_1\left(\frac{x}{3}\right) - T_1\left(\frac{x}{5}\right) - T_1\left(\frac{x}{7}\right) - T_1\left(\frac{x}{210}\right).$$

Setzt man für T_1 und T_2 die Werte ein, so folgt:

$$T < -2 \log \sqrt{2\pi} + (x \log x - x)\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{70} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{210}\right) + x.A' + \frac{8}{2} \log x$$
$$- \frac{1}{2}(\log 6 + \log 70 + \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7 + \log 210) + \frac{3}{12}$$

$$T > -2 \log \sqrt{2\pi} + (x \log x - x)\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{70} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{210}\right) + x.A' - \frac{8}{2} \log x$$
$$+ \frac{1}{2}(\log 6 + \log 70 + \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7 + \log 210) - \frac{5}{12}$$

oder, entsprechend zusammengezogen:

$$T < A'x + 4 \log x - 9 \cdot 95511$$
$$T > A'x - 4 \log x + 6 \cdot 11268.$$

[1] Das Zeichen log soll hier wie im folgenden stets den natürlichen Logarithmus bezeichnen.

Dabei ist

$$A' = \log \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}} 7^{\frac{1}{7}} 210^{\frac{1}{210}}}{6^{\frac{1}{6}} 70^{\frac{1}{70}}} = 0\cdot 97879548257\ldots$$

Wie man sieht, nähert sich diese Constante A' mehr der Einheit als die Tschebyschef'sche Constante $A = 0\cdot 92129202\ldots$, und darauf ist es zurückzuführen, dass die Anwendung der obigen Formeln eine etwas exactere Bestimmung der betreffenden zahlentheoretischen Functionen ermöglicht.

2.

Sylvester hat folgenden Satz bewiesen: Besteht die Beziehung

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{c}\right) < mx + R_\mu(\log x),$$

wobei c eine ganze Zahl, m eine Constante, $R_\mu(\log x)$ eine ganze Function μ^{ten} Grades von $\log x$ ist, so folgt daraus die Ungleichung:

$$\psi(x) < \frac{c}{c-1} mx + R_{\mu+1}(\log x),$$

wobei $R_{\mu+1}$ eine ganze Function $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Grades darstellt.

Es sei gestattet, die von Sylvester gegebene kurze Ableitung dieser Beziehung hier des Zusammenhanges halber mitzutheilen.

Es bezeichne $f(x)$ eine Function von x, welche der Gleichung genügt:

$$f(x) - f\left(\frac{x}{c}\right) = mx + R_\mu(\log x).$$

Diese Function $f(x)$ ist leicht zu bestimmen; man kann dieselbe in der Form voraussetzen:

$$f(x) = \frac{c}{c-1} mx + S_{\mu+1}(\log x),$$

wo $S_{\mu+1}$ gleichfalls eine ganze Function $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet, deren constantes Glied wir überdies $=0$ voraussetzen dürfen; denn hieraus ergibt sich:

$$f(x)-f\left(\frac{x}{c}\right)=mx+S_{\mu+1}(\log x)-S_{\mu+1}(\log x-\log c),$$

und es ist offenbar immer möglich, die Coefficienten in $S_{\mu+1}$ so zu wählen, dass die rechte Seite dieser Gleichung mit $mx+R_{\mu}(\log x)$ übereinstimmt.

Nachdem dies feststeht, kann man folgende Ungleichungen aufstellen:

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{c}\right)<f(x)-f\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\psi\left(\frac{x}{c}\right)-\psi\left(\frac{x}{c^2}\right)<f\left(\frac{x}{c}\right)-f\left(\frac{x}{c^2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi\left(\frac{x}{c^{q-1}}\right)-\psi\left(\frac{x}{c^q}\right)<f\left(\frac{x}{c^{q-1}}\right)-f\left(\frac{x}{c^q}\right).$$

Dabei sei q durch die Ungleichung

$$\frac{1}{c}<\frac{x}{c^q}\leqq 1$$

bestimmt.

Da sonach $\psi\left(\frac{x}{c^q}\right)=0$ ist, liefert die Addition dieser Ungleichungen:

$$\psi(x)<f(x)-f\left(\frac{x}{c^q}\right),$$

also ist umso mehr

$$\psi(x)<f(x)-S_{\mu+1}\left(\log\frac{x}{c^q}\right).$$

Bezeichnen wir also mit M eine untere Grenze der Functionswerte $S_{\mu+1}(\xi)$, wenn ξ das Intervall von 0 bis $-\log c$ durchläuft, so ist

$$\psi(x)<f(x)-M$$

und somit, was bewiesen werden sollte:

$$\psi(x) < \frac{c}{c-1} mx + S_{\mu+1}(\log x) - M.$$

Hiedurch ist die Function $R_{\mu+1}(\log x)$ bestimmt.

3.

Mit Hilfe dieses Satzes soll nun aus der Ungleichung

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) < A'x + 4\log x - 9\cdot 95511$$

eine obere Grenze für $\psi(x)$ ermittelt werden. Indem wir dabei den eben besprochenen Vorgang einhalten, bestimmen wir $f(x)$ aus der Gleichung:

$$f(x) - f\left(\frac{x}{10}\right) = A'x + 4\log x - 9\cdot 95511.$$

Setzen wir nun $f(x)$ in die Form:

$$f(x) = \frac{10}{9} A'x + P\log^2 x + Q\log x,$$

so folgt daraus

$$f\left(\frac{x}{10}\right) = \frac{1}{9} A'x + P(\log x - \log 10)^2 + Q(\log x - \log 10)$$

$$= \frac{1}{9} A'x + P\log^2 x + (Q - 2P\log 10)\log x +$$
$$+ P\log^2 10 - Q\log 10,$$

woraus sich weiter ergibt:

$$f(x) - f\left(\frac{x}{10}\right) = A'x + 2P\log 10 . \log x + Q\log 10 - P\log^2 10.$$

Wir setzen also

$$2P\log 10 = 4$$

$$Q\log 10 - P\log^2 10 = -9\cdot 95511.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man für P und Q folgende Werte:

$$P = 0\cdot 8686..$$

$$Q = -2\cdot 3234..$$

Es ergibt sich somit:

$$f(x) = \frac{10}{9} A'x + 0\cdot 8686 \log^2 x - 2\cdot 3234 \log x.$$

Um nun die Größe M der allgemeinen Formel zu bestimmen, müssen wir untersuchen, welches der kleinste Wert ist, den

$$0\cdot 8686\, \xi^2 - 2\cdot 3234\, \xi$$

im Intervalle $\xi = 0$ bis $\xi = -\log 10$ annehmen kann.

Da die erste Ableitung dieses Ausdruckes

$$1\cdot 7372\, \xi - 2\cdot 3234$$

ist, so erreicht derselbe seinen extremen Wert für

$$\xi = \frac{2\cdot 3234}{1\cdot 7372} > 0,$$

und zwar ist dieser ein Minimum. In unserem Intervalle wird daher der kleinste Wert für $\xi = 0$ erreicht.

Aus alledem ergibt sich somit, wenn wir noch für $\frac{10}{9} A'$ den numerischen Wert einsetzen, die Ungleichung:

$$\psi(x) < 1\cdot 08755054\, x + 0\cdot 87 \log^2 x - 2\cdot 32 \log x.$$

4.

Nun bestimmen wir eine untere Grenze für $\psi(x)$ in folgender Weise:

Aus der zweiten unserer Grundformeln des ersten Abschnittes folgt:

$$\psi(x) > T - \psi\left(\frac{x}{13}\right) + \psi\left(\frac{x}{20}\right) - \psi\left(\frac{x}{73}\right) + \left[\psi\left(\frac{x}{14}\right) - \psi\left(\frac{x}{17}\right)\right] + \left[\psi\left(\frac{x}{15}\right) - \psi\left(\frac{x}{19}\right)\right].$$

Um die rechte Seite in Grenzen einzuschließen, wollen wir die eben gefundene Ungleichung in Verbindung mit der von Tschebyschef ermittelten:

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2} \log x - 1, \quad A = 0\cdot 92129202\,..$$

zur Anwendung bringen. Wir erhalten hiedurch folgende untere Grenze für $\psi(x)$:

$$\psi(x) > A'x - 4\log x + 6$$
$$+A\frac{x}{20} - \frac{5}{2}\log\frac{x}{20} - 1$$
$$+A\frac{x}{14} - \frac{5}{2}\log\frac{x}{14} - 1$$
$$+A\frac{x}{15} - \frac{5}{2}\log\frac{x}{15} - 1$$
$$-\frac{10}{9}A'\frac{x}{13} - 0\cdot 87\log^2\frac{x}{13} + 2\cdot 32\log\frac{x}{13}$$
$$-\frac{10}{9}A'\frac{x}{73} - 0\cdot 87\log^2\frac{x}{73} + 2\cdot 32\log\frac{x}{73}$$
$$-\frac{10}{9}A'\frac{x}{17} - 0\cdot 87\log^2\frac{x}{17} + 2\cdot 32\log\frac{x}{17}$$
$$-\frac{10}{9}A'\frac{x}{19} - 0\cdot 87\log^2\frac{x}{19} + 2\cdot 32\log\frac{x}{19} =$$
$$= \left[A' + A\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}\right) - \frac{10}{9}A'\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{73} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right)\right]x$$
$$-4.0\ 87\log^2 x$$
$$+\left[-4 - \frac{15}{2} + 2.0\cdot 87(\log 13 + \log 73 + \log 17 + \log 19)\right.$$
$$\left. + 4.2\cdot 32\right]\log x$$
$$+6 + \frac{5}{2}(\log 20 + \log 14 + \log 15)$$
$$-3 - 0\cdot 87(\log^2 13 + \log^2 73 + \log^2 17 + \log^2 19)$$
$$-2\cdot 32(\log 13 + \log 73 + \log 17 + \log 19),$$

oder ausgerechnet:

$$\psi(x) > 0\cdot 93231737\,x - 3\cdot 48\log^2 x + 19\cdot 75\log x - 42.$$

Das Verhältnis der Coefficienten von x in den beiden so gefundenen Grenzen von $\psi(x)$ beträgt:

$$\frac{1\cdot 08755054}{0\cdot 93231737} = 1\cdot 1665024.$$

Der Wert dieses Verhältnisses ist also bereits kleiner als der von Sylvester nach Vollführung unendlich vieler Schritte gewonnene.

5.

Aus den eben gefundenen Grenzen wollen wir nun mit Hilfe der Formeln des ersten Abschnittes neue Ungleichungen für $\psi(x)$ ableiten. Aus der ersten jener Formeln folgt:

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{10}\right) < T-\left[\psi\left(\frac{x}{11}\right)-\psi\left(\frac{x}{14}\right)\right]-\left[\psi\left(\frac{x}{17}\right)-\psi\left(\frac{x}{20}\right)\right] -\left[\psi\left(\frac{x}{23}\right)-\psi\left(\frac{x}{28}\right)\right].$$

Diese Ungleichung bleibt jedenfalls richtig, wenn wir rechter Hand die positiven Glieder durch größere, die negativen durch kleinere Werte ersetzen. Durch Anwendung der in den beiden letzten Abschnitten abgeleiteten Ungleichungen für $\psi(x)$ findet man also:

$$\begin{aligned}\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{10}\right) < {} & A'x+4\log x-9\cdot 95511 \\ & +1\cdot 08755054\left(\frac{x}{14}+\frac{x}{20}+\frac{x}{28}\right) \\ & +0\cdot 87\left(\log^2\frac{x}{14}+\log^2\frac{x}{20}+\log^2\frac{x}{28}\right) \\ & -2\cdot 32\left(\log\frac{x}{14}+\log\frac{x}{20}+\log\frac{x}{28}\right) \\ & -0\cdot 93231737\left(\frac{x}{11}+\frac{x}{17}+\frac{x}{23}\right) \\ & +3\cdot 48\left(\log^2\frac{x}{11}+\log^2\frac{x}{17}+\log^2\frac{x}{23}\right) \\ & -19\cdot 75\left(\log\frac{x}{11}+\log\frac{x}{17}+\log\frac{x}{23}\right)+3.42.\end{aligned}$$

Ordnet man die Glieder entsprechend, so ergibt sich:

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)<\left[A'+1\cdot 08755054\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{28}\right)\right.$$
$$\left.-0\cdot 93231737\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}\right)\right]x$$
$$+(3.0\cdot 87+3.3\cdot 48)\log^2 x$$
$$+[4-2.0\cdot 87(\log 14+\log 20+\log 28)$$
$$-3.2\cdot 32-2.3\cdot 48(\log 11+\log 17+\log 23)$$
$$-3.19\cdot 75]\log x$$
$$-9\cdot 95511+0\cdot 87(\log^2 14+\log^2 20+\log^2 28)$$
$$+2\cdot 32(\log 14+\log 20+\log 28)$$
$$+3\cdot 48(\log^2 11+\log^2 17+\log^2 23)$$
$$+19\cdot 75(\log 11+\log 17+\log 23)+3.42$$

und nach Ausrechnung der Coefficienten:

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)<0\cdot 96956242\,x+13\cdot 05\log^2 x-135\cdot 72\log x+408.$$

Wir bestimmen nun wieder eine Function $f_1(x)$ durch die Gleichung:

$$f_1(x)-f_1\left(\frac{x}{10}\right)=0\cdot 96956242\,x+13\cdot 05\log^2 x$$
$$-135\cdot 72\log x+408.$$

$f_1(x)$ selbst wird dann von der Gestalt sein:

$$f_1(x)=\frac{10}{9}.0\cdot 96956242\,x+P_1\log^3 x+Q_1\log^2 x+R_1\log x.$$

Daraus folgt:

$$f_1\left(\frac{x}{10}\right)=\frac{1}{9}\cdot 0\cdot 96956242\,x+P_1(\log x-\log 10)^3$$
$$+Q_1(\log x-\log 10)^2+R_1(\log x-\log 10)$$
$$=\frac{1}{9}\cdot 0\cdot 96956242\,x+P_1\log^3 x$$
$$+(-3P_1\log 10+Q_1)\log^2 x$$
$$+(3P_1\log^2 10-2Q_1\log 10+R_1)\log x$$
$$-P_1\log^3 10+Q_1\log^2 10-R_1\log 10,$$

und durch Subtraction der beiden letzten Ausdrücke:

$$f_1(x) - f_1\left(\frac{x}{10}\right) = 0\cdot 96956242\, x + 3P_1 \log 10 . \log^2 x$$
$$+ (-3P_1 \log^2 10 + 2Q_1 \log 10) \log x$$
$$+ P_1 \log^3 10 - Q_1 \log^2 10 + R_1 \log 10.$$

Zur Bestimmung von P_1, Q_1, R_1 haben wir also die Gleichungen:

$$3P_1 \log 10 = 13\cdot 05$$
$$-3P_1 \log^2 10 + 2Q_1 \log 10 = -135\cdot 72$$
$$P_1 \log^3 10 - Q_1 \log^2 10 + R_1 \log 10 = 408.$$

Diese ergeben:

$$P_1 = +1\cdot 889$$
$$Q_1 = -22\cdot 946$$
$$R_1 = +114\cdot 304,$$

es ist daher:

$$f_1(x) = 1\cdot 07729158\, x + 1\cdot 889 \log^3 x - 22\cdot 946 \log^2 x$$
$$+ 114\cdot 304 \log x.$$

Nun benöthigen wir auf Grund der allgemeinen Ableitung des zweiten Abschnittes noch den kleinsten Functionswert, den der Ausdruck:

$$1\cdot 889\, \xi^3 - 22\cdot 946\, \xi^2 + 114\cdot 304\, \xi$$

im Intervalle $\xi = 0$ bis $\xi = -\log 10$ annehmen kann.

Dieser nimmt seine beiden extremen Werte für die Wurzeln der Gleichung:

$$3 . 1\cdot 889\, \xi^2 - 2 . 22\cdot 946\, \xi + 114\cdot 304 = 0$$

an; da diese beiden Wurzeln positiv ausfallen, so wird der gesuchte kleinste Wert für $\xi = -\log 10$ erreicht, wofür obiger Ausdruck den Wert $-164\cdot 60$ annimmt.

Wir erhalten somit schließlich folgende Ungleichung:

$$\psi(x) < 1\cdot 07729158\, x + 1\cdot 889 \log^3 x - 22\cdot 946 \log^2 x$$
$$+ 114\cdot 304 \log x + 165.$$

6.

Um auch noch in der Bestimmung der unteren Grenze von $\psi(x)$ einen Schritt weiter zu gehen, machen wir Gebrauch von der aus unserer zweiten Ausgangsformel folgenden Beziehung:

$$\psi(x) > T - \psi\left(\frac{x}{13}\right) + \psi\left(\frac{x}{20}\right) - \psi\left(\frac{x}{73}\right) + \left[\psi\left(\frac{x}{14}\right) - \psi\left(\frac{x}{17}\right)\right] + \left[\psi\left(\frac{x}{15}\right) - \psi\left(\frac{x}{19}\right)\right].$$

Die positiven Glieder rechter Hand ersetzen wir nun durch die aus der Schlussformel des vierten Abschnittes folgenden kleineren Werte, die negativen mit Hilfe der eben abgeleiteten Formel durch größere; hiedurch bleibt die Ungleichung richtig und nimmt folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
\psi(x) > {} & A'x - 4\log x + 6 \\
& + 0\cdot 93231737\left(\frac{x}{20} + \frac{x}{14} + \frac{x}{15}\right) \\
& - 3\cdot 48\left(\log^2\frac{x}{20} + \log^2\frac{x}{14} + \log^2\frac{x}{15}\right) \\
& + 19\cdot 75\left(\log\frac{x}{20} + \log\frac{x}{14} + \log\frac{x}{15}\right) - 126 \\
& - 1\cdot 07729158\left(\frac{x}{13} + \frac{x}{73} + \frac{x}{17} + \frac{x}{19}\right) \\
& - 1\cdot 889\left(\log^3\frac{x}{13} + \log^3\frac{x}{73} + \log^3\frac{x}{17} + \log^3\frac{x}{19}\right) \\
& + 22\cdot 946\left(\log^2\frac{x}{13} + \log^2\frac{x}{73} + \log^2\frac{x}{17} + \log^2\frac{x}{19}\right) \\
& - 114\cdot 304\left(\log\frac{x}{13} + \log\frac{x}{73} + \log\frac{x}{17} + \log\frac{x}{19}\right) - 660.
\end{aligned}$$

Ordnet man dies wieder nach x und den Potenzen von $\log x$, so folgt:

$$\psi(x) > \Big[A' + 0\cdot 93231737\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)$$

$$-1\cdot 07729158\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{73}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)\Big]x - 4\,.\,1\cdot 889\log^3 x$$

$$+[-3\,.\,3\cdot 48 + 3\,.\,1\cdot 889(\log 13+\log 73+\log 17+\log 19)$$

$$+4\,.\,22\cdot 946]\log^2 x$$

$$+[-4+2\,.\,3\cdot 48(\log 20+\log 14+\log 15)$$

$$+3\,.\,19\cdot 75-3\,.\,1\cdot 889(\log^2 13+\log^2 73+\log^2 17+\log^2 19)$$

$$-2\,.\,22\cdot 946(\log 13+\log 73+\log 17+\log 19)$$

$$-4\,.\,104\cdot 304]\log x$$

$$+6-3\cdot 48(\log^2 20+\log^2 14+\log^2 15)$$

$$-19\cdot 75(\log 20+\log 14+\log 15)-126$$

$$+1\cdot 889(\log^3 13+\log^3 73+\log^3 17+\log^3 19)$$

$$+22\cdot 946(\log^2 13+\log^2 73+\log^2 17+\log^2 19)$$

$$+104\cdot 304(\log 13+\log 73+\log 17+\log 19)-660$$

und nach Ausrechnung der Coefficienten:

$$\psi(x) > 0\cdot 93646428\,x - 7\cdot 556\log^3 x + 152\cdot 935\log^2 x$$

$$-1119\cdot 882\log x + 1520.$$

Das Verhältnis der Coefficienten von x in den beiden zuletzt gefundenen Grenzen von $\psi(x)$ beträgt

$$\frac{1\cdot 07729158}{0\cdot 93646428} = 1\cdot 1503819.$$

7.

Da die weitere Verfolgung desselben Verfahrens zu immer größeren numerischen Rechnungen führen würde, so wollen wir uns zur Berechnung von $\vartheta(x)$ mit den erhaltenen Endformeln begnügen.

Die Function $\vartheta(x)$ ist durch folgende Ungleichungen mit $\psi(x)$ verbunden:

$$\vartheta(x) \leqq \psi(x) - \psi(\sqrt{x})$$

$$\vartheta(x) \geqq \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}).$$

Für $\psi(\sqrt{x})$ ergeben sich aus unseren Formeln die Grenzen:

$$\psi(\sqrt{x}) < 1\cdot07729158\sqrt{x}+0\cdot237\log^3 x-5\cdot736\log^2 x +57\cdot152\log x+165$$

$$\psi(\sqrt{x}) > 0\cdot93646428\sqrt{x}-0\cdot945\log^3 x+38\cdot233\log^2 x -559\cdot941\log x+1520$$

und hieraus nach einfacher Rechnung folgende Ungleichungen für $\vartheta(x)$:

$$\vartheta(x) < 1\cdot07729158\,x-0\cdot93646428\sqrt{x}+2\cdot834\log^3 x -61\cdot179\log^2 x+674\cdot245\log x-1355$$

$$\vartheta(x) > 0\cdot93646428\,x-2\cdot15458316\sqrt{x}-8\cdot030\log^3 x +164\cdot407\log^2 x-1234\cdot186\log x+1190.$$

Bezeichnet man mit m die Anzahl der Primzahlen, welche größer als l, aber nicht größer als L sind, wobei l und L gegebene positive Zahlen sind, so liegt m zwischen folgenden Grenzen:

$$m < \frac{\vartheta(L)-\vartheta(l)}{\log l}$$

$$m > \frac{\vartheta(L)-\vartheta(l)}{\log L}.$$

Aus obigen Ungleichungen für $\vartheta(x)$ ergibt sich somit:

$$m < \frac{1}{\log l}(1\cdot07729158\,L-0\cdot93646428\,l-0\cdot93646428\sqrt{L} +2\cdot15458316\sqrt{l}+2\cdot834\log^3 L+8\cdot030\log^3 l -61\cdot179\log^2 L-164\cdot407\log^2 l+674\cdot245\log L +1234\cdot186\log l-2545)$$

$$m > \frac{1}{\log L}(0\cdot93646428\,L-1\cdot07729158\,l-2\cdot15458316\sqrt{L} +0\cdot93646428\sqrt{l}-8\cdot030\log^3 L-2\cdot834\log^3 l +164\cdot407\log^2 L+61\cdot179\log^2 l-1234\cdot186\log L -674\cdot245\log l+2545).$$

Jedenfalls finden sich also mehr als k Primzahlen zwischen l und L, sobald k kleiner ist als die rechte Seite der letzteren dieser beiden Ungleichungen. Um also das eingangs gestellte Problem zu lösen, eine Zahl x anzugeben, derart, dass zwischen x und $(1+\varepsilon)x$ mindestens k Primzahlen liegen, setzen wir

$$l = x \qquad L = (1+\varepsilon)x$$

und erhalten zur Bestimmung von x somit die Ungleichung:

$$\begin{aligned}k \log [(1+\varepsilon)x] < {} & 0\cdot 93646428(1+\varepsilon)x - 1\cdot 07729158\, x \\ & -2\cdot 15458316\sqrt{(1+\varepsilon)x} + 0\cdot 93646428\sqrt{x} \\ & -8\cdot 030 \log^3 [(1+\varepsilon)x] - 2\cdot 834 \log^3 x + 164\cdot 407 \log^2 [(1+\varepsilon)x] \\ & +61\cdot 179 \log^2 x - 1234\cdot 187 \log [(1+\varepsilon)x] \\ & -674\cdot 245 \log x + 2545.\end{aligned}$$

Sobald nun ε größer ist als

$$\frac{1\cdot 07729158}{0\cdot 93646428} - 1 = 0\cdot 1503819$$

ist der Coefficient von x auf der rechten Seite unserer Ungleichung positiv; da alle anderen Glieder von niedrigerer Ordnung sind, so wird unter dieser Voraussetzung über ε die rechte Seite (auch wenn man noch das Glied $k \log [(1+\varepsilon)x)$ von ihr subtrahiert) mit x ins Unendliche wachsen; die transcendente Gleichung in x, welche man erhält, wenn man das Zeichen $<$ in das Gleichheitszeichen verwandelt, wird also jedenfalls eine größte Wurzel haben; alle Zahlen x, welche größer sind als jene größte Wurzel, sind daher als Lösungen unseres Problems zu betrachten.

8.

Nun wollen wir noch zeigen, dass das Verhältnis der Coefficienten von x in den beiden Grenzen von $\psi(x)$ oder, was dasselbe ist, von $\vartheta(x)$, successive bis unter den Wert $\frac{8}{7}$ verkleinert werden kann.

Wenn wir nämlich die beiden Ungleichungen:

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{10}\right) < T-\left[\psi\left(\frac{x}{11}\right)-\psi\left(\frac{x}{14}\right)\right]-\left[\psi\left(\frac{x}{13}\right)-\psi\left(\frac{x}{15}\right)\right]$$
$$-\left[\psi\left(\frac{x}{17}\right)-\psi\left(\frac{x}{20}\right)\right]-\left[\psi\left(\frac{x}{23}\right)-\psi\left(\frac{x}{28}\right)\right]$$

$$\psi(x) > T-\psi\left(\frac{x}{13}\right)+\psi\left(\frac{x}{20}\right)-\psi\left(\frac{x}{73}\right)$$
$$+\left[\psi\left(\frac{x}{14}\right)-\psi\left(\frac{x}{17}\right)\right]+\left[\psi\left(\frac{x}{15}\right)-x\left(\frac{x}{19}\right)\right],$$

fortgesetzt anwenden, in der Art, dass wir die jeweils gefundenen Grenzen immer wieder in die rechten Seiten dieser Ungleichungen einsetzen, so zeigt eine einfache Überlegung[1], dass wir bei jedem dieser Schritte zu einem etwas kleineren Coefficienten von x in der oberen und zu einem etwas größeren in der unteren Grenze von $\psi(x)$ gelangen. Denken wir uns also dieses Verfahren unbegrenzt oft wiederholt, so müssen diese beiden Coefficienten von x bestimmten Grenzlagen zustreben, die wir ermitteln wollen.

Sind wir nach i derartigen Schritten zu den Resultaten gelangt:

$$\psi(x) < m_i x + R_i(\log x)$$
$$\psi(x) > n_i x + S_i(\log x),$$

wobei R_i und S_i ganze Functionen i^{ten} Grades von $\log x$ bezeichnen, so können wir hieraus auf die Coefficienten von x in jenen beiden Grenzen von $\psi(x)$ schließen, die wir nach Durchführung des $(i+1)^{\text{ten}}$ Schrittes erhalten.

Da sich nämlich aus einer oberen Grenze von $\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)$ immer eine solche von $\psi(x)$ angeben lässt, wobei der Coefficient von x in letzterer aus jenem in ersterer durch Multiplication mit $\frac{10}{9}$ hervorgeht, so hat man:

$$m_{i+1} = \frac{10}{9}\left(A'-\frac{n_i}{11}+\frac{m_i}{14}-\frac{n_i}{13}+\frac{m_i}{15}-\frac{n_i}{17}+\frac{m_i}{20}-\frac{n_i}{23}+\frac{m_i}{28}\right)$$

$$n_{i+1} = A'-\frac{m_i}{13}+\frac{n_i}{20}-\frac{m_i}{73}+\frac{n_i}{14}-\frac{m_i}{17}+\frac{n_i}{15}-\frac{m_i}{19}.$$

---

[1] Man vergleiche die Abschnitte 5 und 6; die Grundformel des fünften Abschnittes ist hier durch eine etwas exactere ersetzt worden, die dort noch nicht anwendbar war.

Setzt man nun

$$\lim_{i=\infty} m_i = E$$

$$\lim_{i=\infty} n_i = F,$$

so müssen E und F, deren Existenz nach obigem feststeht, den beiden Gleichungen genügen:[1]

$$E = \frac{10}{9}\left(A' - \frac{F}{11} + \frac{E}{14} - \frac{F}{13} + \frac{E}{15} - \frac{F}{17} + \frac{E}{20} - \frac{F}{23} + \frac{E}{28}\right)$$

$$F = A' - \frac{E}{13} + \frac{F}{20} - \frac{E}{73} + \frac{F}{14} - \frac{E}{17} + \frac{F}{15} - \frac{E}{19}.$$

Diese, nach E und F aufgelöst, ergeben

$$E = 1\cdot07254712$$
$$F = 0\cdot93860383.$$

Als äußerste auf diesem Wege erreichbare Grenzen von $\psi(x)$ erhalten wir also:[2]

$$\psi(x) < 1\cdot07254712x + \ldots$$
$$\psi(x) > 0\cdot93860383x + \ldots$$

---

[1] Eine eingehendere Begründung dieses Grenzüberganges findet man bei Sylvester. A. a. O., S. 241.

[2] Sylvester erhält unter ausschließlicher Verwendung der Tschebyschef-schen Formeln folgende äußerste Grenzen von $\psi(x)$:

$$\psi(x) < eAx + \ldots$$
$$\psi(x) > fAx + \ldots$$

Hierin ist $e = \frac{59595}{50999}$, $f = \frac{51072}{50999}$, $A = 0\cdot92129202\ldots$

Berechnet man hieraus eA und fA, so ergibt sich bei richtiger Rechnung:

$$\psi(x) < 1\cdot07657793x + \ldots$$
$$\psi(x) > 0\cdot92261076x + \ldots$$

Ich glaubte, diese Werte hier anführen zu sollen, da Sylvester selbst für eA und fA, offenbar aus Versehen, die ganz falschen Zahlenwerte:

$$eA = 1\cdot006774,\ fA = 0\cdot992619$$

angibt. (A. a. O., S. 243.)

Das Verhältnis dieser beiden Coefficienten von x beträgt:

$$\frac{E}{F} = 1{\cdot}1427048 < 1 + \frac{1}{7}\cdot$$

Um praktisch verwendbare Formeln zu erhalten, d. h. um auch die logarithmische Function von x in den Grenzen von $\psi(x)$ bestimmen zu können, wird man sich natürlich mit einer endlichen Anzahl von Schritten begnügen müssen; doch kann man dem angeführten Grenzwerte beliebig nahe kommen, wenn die Anzahl dieser Schritte entsprechend groß ist. Die Aufgabe, Werte x anzugeben, von welchen an zwischen x und $(1+\varepsilon)x$ mehr als k Primzahlen liegen, ist also für alle Werte ε, welche $\frac{1}{7}$ übersteigen, thatsächlich lösbar.

Das ballistische Problem auf Grundlage der Versuche und der Integrabilität

(innere Ballistik)

von

E. Oekinghaus in Königsberg i. Pr.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. October 1900.)

Die innere Ballistik oder das Problem der Geschossbewegung im Geschützrohre kann unbedingt denjenigen Problemen beigezählt werden, die ihrer technischen und theoretischen Lösung in besonderem Maße Schwierigkeiten entgegensetzen. Diese liegen hier einerseits darin, dass außer den chemisch wirksamen Kräften noch verschiedene physikalisch-mechanische Bewegungsfactoren gleichzeitig mit in Thätigkeit treten, die sich alle gegenseitig beeinflussen und in ihren Wirkungen zum Theile überdecken; und anderseits in dem Umstande, dass die Bewegungserscheinungen sich der directen Beobachtung fast vollständig entziehen und sich noch dazu in so kurzer Zeit abspielen, dass der ganze Vorgang oft in einem kaum messbaren Bruchtheile einer Secunde beendet ist.

Diese ungünstigen Verhältnisse und der Mangel an geeigneten Beobachtungsinstrumenten und wissenschaftlichen Methoden, verbunden mit der Kostspieligkeit der auch aus anderen Gründen oft geheim gehaltenen Untersuchungen waren wenigstens früher und zum Theile jetzt noch die Ursache, dass eine allseitige wissenschaftliche Erforschung des ballistischen Problems, namentlich des inneren Theiles, unmöglich war.

Dies hat sich nun in den letzten Jahrzehnten fast vollständig geändert, und eine zahlreiche Reihe von Forschern die dem verheißungsvollen Gegenstande ihr ideales Interesse

widmeten, war und ist noch unausgesetzt mit der Erfindung neuer Treibmittel und Methoden ihrer wirksamen Verwertung beschäftigt. Dies lehrt schon ein kurzer Blick speciell über die Literatur der Explosionstechnik.

Es war der neueren Zeit vorbehalten, diejenigen Apparate zu schaffen, die es ermöglichten, eine fast momentan zu nennende Bewegungserscheinung gewissermaßen sich selbst graphisch aufzeichnen und in ihre einzelnen Phasen zerlegen zu lassen.

Diese Kenntnis war nothwendig und geboten seit Einführung der neuen rauchschwachen Pulversorten, deren Verhalten bekanntlich ein ganz anderes als des alten classischen Schwarzpulvers ist. Das Charakteristische dieser modernen chemischen Treibmittel besteht unter anderem darin, dass sie eine höhere Verbrennungstemperatur und damit eine größere Arbeitskraft erzeugen, langsamer und fast ohne Rückstände verbrennen und demzufolge eine längere Zeit zur Entwickelung eines im ganzen nur mäßig hohen Gasdruckes brauchen. Diese letztere Eigenschaft ist die wichtigere und entspricht am meisten dem Pulverideale der Techniker, da die milde verbrennenden Pulversorten beiweitem mehr leisten, d. h. eine größere Mündungsgeschwindigkeit erzielen und auch das Geschütz und Geschoss weit weniger beanspruchen, als das brisante Schwarzpulver.

Hiermit berühren wir schon den Gegenstand, womit wir uns im folgenden beschäftigen werden.

Abgesehen von der Abhängigkeit, in welcher die Druck-, Zeit- und Geschwindigkeitsverhältnisse zu einanderstehen, ist besonders das erste Verhalten der sie bedingenden Kräfte ins Auge zu fassen und nachzuweisen, dass hier namentlich die Form und Dichte der Pulverkörner, ihre größere oder geringere Entzündlichkeit, ihre Verbrennungsdauer oder die Zeit der beendeten Vergasung, ferner die Ladedichte und die von der Geschützart abhängige Querschnittsbelastung und was sonst noch unter dem stetig sich ändernden Gasdruck in Function tritt, von maßgebender Bedeutung sind. Weiter in Rechnung zu ziehen sind die durch die Züge verursachten Widerstände, die ihrerseits wieder verwickelte Functionen sind der genannten

Kräfte und des Dralls oder der Curve, die dem Geschosse den Weg vorschreibt; ferner die Winkel- oder Drehungsbeschleunigung des rotierenden Geschosses, welche die Festigkeit von Geschütz und Geschoss fast nach allen ihren Arten in Anspruch nimmt; und endlich die Begleiterscheinungen des Rückstoßes und die damit verknüpften schwingenden und molecularen Bewegungen des ganzen bewegten Systems und andere durch die enorme Wärmeentwickelung bedingte Erscheinungen und sonstige Störungsfunctionen von zum Theile unbekannten Ursachen, die alle oft in weniger als in $^1/_{100}$ Secunden unter außerordentlicher Kraftentwickelung blitzartig entstehen und vergehen, und die in dieser Zeit zu beherrschen und zu leiten und zu zügeln das vornehmste Interesse des Geschützconstructeurs und Technikers ist.

Es ist nothwendig, auf diese mannigfachen und verwickelten Vorgänge hinzuweisen, um die Schwierigkeiten der Aufgabe zu ermessen und nicht minder die eigenen Kräfte zu prüfen, ob sie ausreichen zur Lösung eines Problems, dem man sich theoretisch wie praktisch nur schrittweise nähern kann.

Die technische Seite des Problems der Geschossbewegung an sich und so weit wir sie hier theoretisch zu behandeln gedenken, besteht zunächst in der Ermittelung der Druck-, Zeit- und Geschwindigkeitscurven. Sie ist also eine wesentlich messende.

Da die genaue Kenntnis dieser Curven von Wichtigkeit ist, so hat man namentlich in Beziehung und zur Feststellung des höchsten Gasdruckes verschiedene Apparate in Anwendung gebracht. Es sind dies einerseits der Schnitt- und der Stauchapparat, die die volle Wirkung des Gasdruckes in bezeichneter Weise activ oder passiv zum bleibenden Ausdrucke bringen, und anderseits insbesondere der von Sébert construierte Rücklaufmesser oder Velocimeter, der eine schärfere Messung der Geschossbewegung in sinnreichster Anwendung von registrierenden Stimmgabeln vermittelt.

Damit sind die nothwendigen Grundlagen geschaffen, die die innere Ballistik zu einer messenden Wissenschaft erheben und zugleich den Theoretiker ermuthigen, den Process der explosiven Bewegungen in der Kanonenseele rechnerisch und

analytisch zu verfolgen und wenn möglich die Gesetze, oder bildlich gesprochen, den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht zu suchen und zu finden.

Von den hervorragenden Forschern auf diesem und verwandten Gebieten nennen wir namentlich: San Roberto, Bunsen und Schischkoff; Bode, Abel und Nobel; Berthelot, Sébert, Vieille und Sarrau; Longridge und Maxim; Mach, v. Wuich und Indra; Wolff und andere, und nicht zuletzt die umfassenden Untersuchungen der staatlichen Artillerie-Prüfungscommissionen und der Militär-Versuchsanstalten, sowie der anderen großen, z. B. Krupp'schen Werke, deren unausgesetzte technische und wissenschaftliche Thätigkeit die Wichtigkeit und das Verständnis erkennen lassen, das von Seiten der competenten Behörden jenen Versuchen entgegengebracht wird, die einen so wichtigen und empfindlichen Lebensnerv der Staaten und — des Culturfortschrittes berühren.

Was nun die vorliegende Bearbeitung anlangt, so war es mir besonders darum zu thun, ohne irgend welche Hypothesen und allzu umständliche Rechnungen den Gegenstand möglichst allseitig theoretisch zu erfassen und in einer ersten Annäherung zu einem vorläufigen Abschlusse zu führen. Wie immer in solch' complicierten Fällen zieht man schon aus Rücksicht auf die klarere Übersicht zuerst nur die Hauptfactoren der Bewegung in Rechnung und lässt die Secundärerscheinungen zunächst außer Betracht.

Nach einigen einleitenden Betrachtungen thermodynamischer Natur und Aufstellung der Bewegungsgleichungen ermitteln wir auf Grundlage der Versuche die Curvengleichungen des Gasdruckes zunächst bis zum Maximum, dann bis zur Mündung und darüber hinaus, und entwickeln aus ihnen zum Theile in Function des Ortes, zum Theile der Zeit die davon abhängigen Zeit- und Geschwindigkeitsverhältnisse. Wir mussten hier indirect verfahren, da die sofortige directe Behandlung die Kenntnis des genauen Verbrennungsprocesses oder in Ermangelung dieses die Bildung von Hypothesen voraussetzt, die wir vermeiden wollten, und die, selbst wenn sie richtig sein sollten, unmöglich den ganzen Vorgang in voller Reinheit, und

zwar deshalb nicht wiederzugeben vermögen, weil gleichzeitig mehrere rasch anwachsende Kräftefunctionen den Bewegungsvorgang in negativer Weise bedeutend beeinflussen, die im Rohre in ganz anderer Art auftreten, als in geschlossenen Bomben.

Schon der geforderten Integrierbarkeit der Formeln wegen ist es nothwendig, von den den Versuchen entsprechenden empirischen Druckformeln auszugehen und daraus zunächst die Gesetze der Vergasung und dann alles übrige abzuleiten. Die große Anzahl der von uns zu diesem und anderen Zwecken aufgestellten Formeln dürfte vorläufig noch vollständig genügen. Aus einzelnen derselben ergab sich die Möglichkeit, Ort, Zeit und Höhe des höchsten Gasdruckes und den Moment zu bestimmen, in welchem die Verbrennung beendet ist. Damit konnte ferner das günstigste Verhältnis des höchsten Druckes zum mittleren und der Ort, wo dies in Kraft tritt, nachgewiesen werden.

Auf die durch die Wärme hervorgerufenen Zustände ist besonders Rücksicht genommen. Wir bestimmten die Antheile, die jede Bewegungsform von der Wärmebezugsquelle zu beanspruchen hat. Hinsichtlich des schwierigen Problems der Wärmeleitung im Rohre sind wir von einfachen in der Sache begründeten Voraussetzungen ausgegangen, wie sie auch in der Physik allgemein angenommen sind. Wir bestimmten die Leitungsconstante und das Wärmemaximum und untersuchten, inwieweit die Curven dem adiabatischen Gesetze genügen.

Von besonderem Interesse dürfte die Berechnung der Widerstände im Rohre sein. Hier galt es, den Einfluss der Rotation und Reibung auf sämmtliche Elemente und ferner die Rolle, die ein variabler Drall in der Bohrung spielt, gesetzmäßig nachzuweisen. Es gelang, die Differentialgleichung dieser complicierten Bewegungsform in voller Ausdehnung zu integrieren und daraus zum Theile sehr wertvolle Consequenzen zu ziehen und Fragen, z. B. nach der Maximalgeschwindigkeit des Geschosses, dem Verhältnisse des Widerstandes zum Drucke und andere, zu beantworten.

Desgleichen bestimmten wir das Verhältnis des durch den Schnitt- oder Stauchapparat ermittelten thatsächlichen Druckes

zu demjenigen Drucke, der durch den die translatorische Geschossbewegung messenden Rücklaufmesser angezeigt wird. Von Interesse ist vielleicht auch der Versuch, das Drallverhältnis zum Druckverhältnisse in nähere Beziehung zu setzen.

Darauf behandeln wir eingehend die durch die Drehungsbeschleunigung bewirkten Einflüsse auf die Bewegung, eine Frage, die mit derjenigen nach dem zweckmäßigsten Drall, d. i. der Curve, zusammenhängt, die in Bezug auf die durch sie bewirkten Widerstände das Geschütz- und Geschossmaterial namentlich auf Abdrehen nur mäßig beansprucht. Unter bestimmte Grenzen darf bekanntlich nicht heruntergegangen werden, wenn die Erhaltung der Flugstabilität gewahrt bleiben soll. Hier waren einzelne der früher behandelten Druckcurven vermöge der Leichtigkeit, mit welcher sie sich dem Formelcomplex zwanglos einfügten, von Bedeutung. Damit gelang es ferner, die Abhängigkeit der Winkelbeschleunigung von der Drallcurve und umgekehrt, abzuleiten, eine Frage, die bekanntlich technisch von Wichtigkeit ist. Unsere Gleichungen geben die Lösung des Problems, aus jeder dem Geschützrohre angemessenen Winkelbeschleunigungscurve die dieser entsprechende Drallcurve abzuleiten, in vollständigster Weise und auf Grundlage größter Allgemeinheit. Hier ist vielleicht einiges, was der ausführende Techniker brauchen könnte.

Den Schluss bildet ein Rückblick auf die äußere Ballistik und die Aufstellung eines schon früher angedeuteten Widerstandsgesetzes von ziemlich ausgedehnter und praktisch fast alle Fälle umfassender Herrschaft und ein daran sich anschließender Versuch, die Elemente der Flugbahn in Function der Zeit darzustellen. Hierbei haben wir uns bemüht, möglichst einfache Formeln zu erhalten, die dem Techniker gestatten, wenigstens drei der Hauptelemente der Bahn: Schussweite, Flugzeit und Flugrichtung in verhältnismäßig kurzer Zeit zu berechnen. In einem Falle haben wir auch die schwierige Ermittelung der Flugbahngleichung durchgeführt, die freilich nur theoretisches Interesse hat.

Hiermit haben wir den Inhalt unserer Arbeit im wesentlichen angegeben und hoffen, dass die Ausführungen den geneigten Leser befriedigen mögen.

IV. Theil.

Die Gasdruckcurven.

§. 21.

Wir leiten nunmehr die Grundformeln für die Geschossbewegung im Rohre ab.

Die bewegende, das Geschoss vorwärts treibende Kraft ist das aus der entzündeten Ladung unter hoher Temperatur sich entwickelnde Gas.

Je nach der Art der Zusammensetzung des Pulvers geht diese Entwickelung mehr oder weniger rasch vor sich.

Eine momentane Entzündung, die die gesammte Ladung sofort in Gas verwandelt, ist praktisch unmöglich, weil die Verbrennung der einzelnen Pulverkörner eine wenn auch kleine, so doch noch messbare Zeit beansprucht. Eine augenblickliche Vergasung wäre auch für das Rohr schädlich, da der in diesem Falle übermäßig starke Maximalgasdruck zu Anfang der Bewegung das Geschütz zu sehr beanspruchen würde. Durch eine langsamere Verbrennung wird der Druck herabgesetzt und der Ort des höchsten Druckes mehr nach vorne verlegt.

Es ist das Ziel der Explosionstechniker, den Verbrennungsprocess derart zu regeln, dass einerseits bestimmte Grenzen nach unten und oben betreffs der Zeit der Vergasung, des Druckes und der daraus resultierenden Widerstände nicht überschritten werden und dass anderseits eine möglichste Ausnützung des Treibmittels eine den Verhältnissen entsprechende oder geforderte Geschossarbeit an der Mündung gewährleistet.

Hinsichtlich der Berechnung der Temperaturverhältnisse im Geschützrohre kann man sich der Van der Waals'schen oder der Clausius'schen Formel

$$p = \frac{RT}{v-\alpha L} - \frac{c}{T(v+b)^2}$$

bedienen. Wegen der hohen T-Werte wollen wir das letzte Glied vernachlässigen und also die vereinfachte Clausius'sche Formel

$$p = \frac{RT}{v-\alpha L} \tag{1}$$

zugrunde legen. In den Bezeichnungen schließen wir uns der in den einschlägigen Schriften gebräuchlichen Schreibweise an.

Hiernach bedeutet p den Druck auf den Quadratcentimeter und T die absolute Temperatur des im Raume $v = \omega a$ eingeschlossenen Gases, dessen Constante R ist. L bezeichnet die Ladung in Kilogramm und α das Covolumen des Gases für die Gewichtseinheit der Ladung. Es ist dies der kleinste Raum, unter welchen das Gas auch beim größten Drucke sich nicht weiter zusammenpressen lässt und der vom Verbrennungsraume in Abzug zu bringen ist. Nach Clausius beträgt das Molecularvolumen der Gase ungefähr $^1/_{1000}$ des specifischen Volumens w_0 der Verbrennungsgase oder des Raumes, den letztere bei 1 *kg* Sprengstoff unter 1 Atmosphärendruck bei 0° C. einnehmen. Für Blättchenpulver z. B. beträgt das specifische Volumen, und zwar mit Wasserdampf 920, und ohne Wasserdampf 790 *l*, und das Covolumen $\alpha = 0 \cdot 92$ *l*.

Die Zustandsgleichung des Gases für den Atmosphärendruck $p_0 = 1 \cdot 033$ *kg*, $t = 0°$ C. lautet also in einfachster Form

$$p_0 = \frac{RT_0}{\omega_0}, \qquad T = 273°.$$

Denken wir uns 1 *kg* Pulver in einem von festen Wänden eingeschlossenen Raume von $1+\alpha$ dm^3 entzündet, so wirkt in der vollen Raumeinheit ein Druck, den wir pro Quadratcentimeter mit f bezeichnen. Denken wir uns ferner, um für die Rechnung einen bequemeren Anhaltspunkt zu gewinnen, den Laderaum des Geschützes mit der Ladung L gleichmäßig ausgefüllt und einen Theil derselben, L_y, bis zum Punkte y vom Seelenboden an gerechnet, in Gas verwandelt, so würde sich das folgende Verhältnis ergeben:

$$L_y/L = y/a,$$

wo a die Länge des Laderaumes $v = \omega a$ bezeichnet.

Für den geschlossen gedachten Raum $v_y = \omega y$ hätten wir also einen Druck von

$$P_y = \frac{fL_y}{v_y - \alpha L_y}. \qquad 2)$$

Durch Einführung der Ladedichte

$$\Delta = \frac{L_y}{v_y} \quad \text{oder} \quad \Delta = \frac{L}{v} \text{ pro } kg/l$$

erhalten wir allgemein

$$P = \frac{f\Delta}{1-\alpha\Delta}. \qquad 3)$$

Diese Formel zeigt, dass $P = f$, d. h. der Kraft des Sprengstoffes gleich sein wird, wenn $\Delta = {}^1/_1 + \alpha$, d. h. wenn $v/L = 1+\alpha$ ist. Bei der Ladungseinheit setzt dies einen Raum von $v = 1+\alpha$ voraus, und die diesem Zustande entsprechende Temperatur ist die absolute Verbrennungstemperatur, die wir mit T_m bezeichnen wollen. In diesem Falle geht in der Clausius'schen Gleichung v in $1+\alpha$, L in 1 und p in f über und sie reduciert sich auf den bekannten einfachen Ausdruck

$$f = R \,.\, T_m. \qquad 4)$$

Die Kraft des Sprengstoffes ist also der absoluten Temperatur T_m proportional.

Die Elimination von R aus dieser und der Gleichung für p_0 ergibt

$$f = p_0\,\omega_0\,\frac{T_m}{T_0},$$

wonach die Kraft des Sprengstoffes proportional ist dem specifischen Volumen der Verbrennungsgase und der Verbrennungstemperatur.

Wir bemerken hier, dass wir den Querschnitt $r^2\pi$ stets in Quadratcentimeter und den Geschossweg x, sowie auch die Länge des Laderaumes ausschließlich in Meter rechnen. Den Ausdruck für die Ladedichte $\Delta = \frac{kg}{dm^3}$ schreiben wir also demgemäß

$$\Delta = \frac{10\,L}{r^2\pi a} \qquad 5)$$

und bezeichnet derselbe das mittlere specifische Gewicht der Ladung.

Indem das Gas sich ausdehnt, schiebt es den Rest der Ladung $L-L_y$ mit dem Geschosse um x *m* weiter. Der Raum ωy dehnt sich also auf $\omega(x+y)$ aus. Da nun bei der Ausdehnung Arbeit geleistet wird, so ist bei adiabatischem Zustande der obige Ausdruck für P_y noch mit dem Ausdehnungsverhältnisse $\left(\frac{y}{x+y}\right)^k$ zu multiplicieren, wenn man den entsprechenden Gasdruck P_x erhalten will. Unter Einführung des genaueren Wertes erhalten wir

$$P_x = \frac{f\Delta}{1-\alpha\Delta}\left(\frac{(1-\alpha\Delta)aL_y/L}{x+(1-\alpha\Delta)L_y/L}\right)^k. \quad 6)$$

Diese Formel bezieht sich auf denjenigen Zustand, bei welchem weder Wärme mitgetheilt, noch entzogen wird, was voraussetzt, dass das Gas während der Zustandsänderung sich in einer für Wärme undurchlässigen Hülle befindet. In Wirklichkeit geht aber ein nicht geringer Bruchtheil Wärme durch Leitung, Reibung etc. verloren. Das Verhältnis der beiden specifischen Wärmen, k, ist demnach kein festes mehr, sondern es verändert sich entsprechend den verschiedenen Pulversorten und der Art ihrer Verwendung innerhalb gewisser durch Versuche ermittelter Grenzen, die zu bestimmten Mittelwerten für k führten.

Man kann sich bei der Berechnung der Pulververwertung die Vorstellung bilden, dass ein gewisser Bruchtheil des Treibmittels lediglich zur Überwindung der anfänglichen Reibungshindernisse, ein anderer für den durch Leitung erfolgten Wärmeverlust etc. verbraucht wird und dass der Rest die eigentliche nutzbringende Arbeit der Geschossbewegung übernimmt. Hierbei ist zu beachten, dass das bei constanter Temperatur sich ausdehnende Gas nur die zur Erzeugung der Geschossarbeit $\frac{1}{2}\frac{G}{g}v_0^2$ erforderliche Wärme aufnimmt.

Diesem isothermischen Zustande würde dann die einfache Formel

$$P = \frac{f\Delta aL_y/L}{x+(1-\alpha\Delta)aL_y/L}$$

genügen.

Die Temperaturformel nimmt nach Einführung von $R = f/T_m$ die Form an

$$P = \frac{10f}{r^2\pi[x+a(1-\alpha\Delta)]} \cdot \frac{T}{T_m} \qquad 8)$$

und man erhält hieraus die Temperatur in Function von Druck und Geschossweg

$$T = \frac{r^2\pi P \,.\, T_m}{10f}[x+a(1-\alpha\Delta)]. \qquad 9)$$

Hierbei haben wir den Querschnitt des Laderaumes demjenigen des Rohres und des Geschosses gleich gesetzt, um die Formeln noch möglichst einfach zu halten. Bei den Anwendungen werden wir auf die wirklichen Verhältnisse Rücksicht nehmen.

Der Druck auf den Geschossboden ist $Pr^2\pi$, die zu bewegende Masse $(G+L-L_y)/g$, demnach die Beschleunigung der Geschossbewegung und damit die allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{G+L-L_y} \cdot \frac{f\Delta}{1-\alpha\Delta}\left(\frac{(1-\alpha\Delta)aL_y/L}{x+(1-\alpha\Delta)aL_y/L}\right)^k. \qquad 10)$$

Die Auflösung dieser Gleichung ist erst dann möglich, wenn das Verbrennungsgesetz des Pulvers bekannt ist. Trotz der vielen Versuche ist es bis jetzt nicht gelungen, ein allgemein giltiges Gesetz hierüber aufzustellen, wobei noch der Umstand erschwerend eintritt, dass der Verbrennungsprocess von der Art der Einschließung des Pulvers und seiner Zusammensetzung abhängt. Außerdem ist die Entzündung der einzelnen Körner ebensowenig momentan, wie die Verbrennung. Sind die Körner etwa kugelförmig, und ist die lineare Geschwindigkeit der Vergasung $= c$, so führt die Annahme, dass die Vergasung proportional der Oberfläche und der Zeit erfolge, auf das Integral

$$C\int r^2\pi\,dt, \qquad r = r_0 - ct, \qquad r_0 = cT,$$

woraus

$$\frac{L_y}{L} = 1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^3$$

folgt.

Hiernach würde nach der Hälfte der Verbrennungszeit schon $^7/_8$ der Ladung verbrannt sein. Eine noch einfachere Annahme wäre

$$L_y = L\left(\frac{t}{t_1}\right)^n,$$

die zu der Reihe für

$$x = A\left(\frac{t}{l_1}\right)^{\frac{nk+2}{k+1}} - B\left(\frac{t}{l_1}\right)^{\frac{nk+n}{k+1}} + C\left(\frac{t}{l_1}\right)^{\frac{nk+2n-2}{k+1}} -$$

$$- D\left(\frac{t}{l_1}\right)^{\frac{nk+3n-4}{k+1}} + \dots \qquad 11)$$

führen würde. Aber weder die eine noch die andere Formel liefert befriedigende Resultate und kann also nicht angenommen werden. Ein directer Weg zur Lösung der Hauptaufgabe oder der Ermittelung der x-, v-, P-Werte der Bewegung ist also nicht möglich oder doch nur schwer beschreitbar. Es bleibt also nur übrig, aus den durch die Versuche gegebenen Werten und Curven von v und P empirisch das Verbrennungsgesetz abzuleiten.

§. 22.

Wir haben bei der Geschossbewegung im Geschützrohre zwei Vorgänge von einander zu unterscheiden, die sich nacheinander abspielen, nämlich die während der Verbrennung des Pulvers eingeleitete und dann die lediglich durch Expansion bewirkte Geschossbewegung. Die graphische Darstellung der Druckcurve lässt in manchen Fällen einen bestimmten Wendepunkt der Curve im absteigenden Aste erkennen und es erscheint daher sehr wahrscheinlich, dass namentlich bei den milden Pulversorten im Momente des höchsten Gasdruckes die Verbrennung noch nicht ganz beendet ist. Hiernach würde also die reine Expansion des vollständig vergasten Mittels erst im Wendepunkte beginnen. Es ist aber auch nicht unmöglich, dass die Verbrennung auch beim Geschossaustritte noch nicht beendet ist. Bei den brisanten oder den rasch verbrennenden Pulversorten, also besonders bei Schwarzpulver, liegt der Wendepunkt dem Orte des höchsten Gasdruckes so nahe, dass

es den Anschein hat, als ob, wie dies auch die Versuche von Bode, Abel und Nobel bestätigen, das Ende der Verbrennung mit dem Momente des höchsten Druckes zusammenfiele.

Um zunächst eine vorläufige Übersicht über diese Verhältnisse zu gewinnen, führen wir für die anfängliche Geschossbewegung den einfachen Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$v = At^m - Bt^n \qquad 12)$$

ein und bestimmen A und B den Versuchen gemäß.

Hieraus ergibt sich weiter der Geschossweg

$$x = \frac{At^{m+1}}{m+1} - \frac{Bt^{n+1}}{n+1},$$

die Beschleunigung

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{Pr^2\pi}{G/g} = mAt^{m-1} - nBt^{n-1}.$$

Die letzte Gleichung lässt den Druck berechnen, dessen Maximum P_1 mittels

$$m(m-1)A = n(n-1)Bt_1^{n-m}$$

aus

$$P_1 = \frac{G}{gr^2\pi}(mAt_1^{m-1} - nBt_1^{n-1}) \qquad 13)$$

berechnet werden kann. Die Elimination von A und B durch die entsprechenden anderen Gleichungen von $x_1 v_1$ liefert die Relationen

$$\frac{m+n-1}{mn} = \frac{v_1}{j_1 t_1}, \qquad \frac{m^2+mn+n^2-1}{mn(m+1)(n+1)} = \frac{x_1}{j_1 t_1^2}.$$

Da man hierin m mit n vertauschen kann, so sind m und n die Wurzeln der folgenden Gleichung

$$(\alpha^2 - \beta^2(1+\alpha))n^2 - (1-\alpha)(\alpha-\beta)n + 1 - 2(\alpha-\beta) = 0,$$

$$\alpha = \frac{v_1}{j_1 t_1}, \qquad \beta = \frac{x_1}{j_1 t_1^2}, \qquad j_1 = \frac{P_1 r^2 \pi}{G/g}.$$

Zur Bestimmung der Constanten genügt also die Kenntnis der Data im Druckmaximum: $v_1 P_1 t_1 x_1$ und man hat

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{x_1} &= \frac{1}{\beta(n-m)}\left(\frac{n-1}{m(m+1)}\tau^{m+1}-\frac{m-1}{n(n+1)}\tau^{n+1}\right),\\ \frac{v}{v_1} &= \frac{1}{\alpha(n-m)}\left(\frac{n-1}{m}\tau^{m}-\frac{m-1}{n}\tau^{n}\right), \qquad \tau=\frac{t}{t_1}\\ \frac{P}{P_1} &= \frac{1}{n-m}((n-1)\tau^{m-1}-(m-1)\tau^{n-1}),\end{aligned}\right\} \quad 14)$$

wodurch alle während der Verbrennung auftretenden Elemente bestimmt sind.

Zur Anwendung wählen wir unter anderen die folgenden Versuchswerte (Versuchstag 10. December 1892):

Preußische 8·8 *cm* Feldkanone.

Geschossgewicht $G = 8\cdot135\,kg$, Pulverladung $L = 0\cdot65\,kg$ Würfelpulver, Länge des Verbrennungsraumes $a = 0\cdot235\,m$.

Es wurde ermittelt: Höchster Gasdruck nach den Angaben der Rodman-Vorrichtung $P_1 = 1034$ At., nach der Stauch-Vorrichtung 1112, des Rücklaufmessers 1189 At. für den Quadratcentimeter; Ort des höchsten Gasdruckes $x_1 = 0\cdot200 \pm {}^{50}_{10}$, Zeit bis zum Eintritte desselben $t_1 = 0\cdot00359 \pm {}^{2\cdot7}_{3\cdot3}$, Geschossgeschwindigkeit $v_1 = 170\,m$. Wir setzen

$$r^2\pi = 62\cdot9\,cm^2, \quad P_1 = 1160, \quad G = 8\cdot135 + \frac{1}{2}L.$$

Für $t_1 = 0\cdot0036$ erhalten wir

$$\alpha = 0\cdot5575, \qquad \beta = 0\cdot1821, \qquad j_1 = 84700\,m$$

und die quadratische Gleichung liefert die Exponenten

$$m = 2\cdot652, \qquad n = 3\cdot450.$$

Die definitiven Formeln sind also

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{x_1} &= 1\cdot7406\,\tau^{3\cdot652}-0\cdot7406\,\tau^{4\cdot450},\\ \frac{v}{v_1} &= 2\cdot0766\,\tau^{2\cdot652}-1\cdot0766\,\tau^{3\cdot450},\\ \frac{P}{P_1} &= 3\cdot0701\,\tau^{1\cdot652}-2\cdot0701\,\tau^{2\cdot450},\end{aligned}\right\} \quad 15)$$

und geben die gesuchten Elemente x, v, P innerhalb der vollständigen Verbrennung, die noch über das Druckmaximum hinausgeht.

Zu Anfang der Bewegung ist die Beschleunigung gering; so beträgt der Geschossweg nach der Zeit $t = \frac{1}{2} t_1$ nur $x = 0 \cdot 021\, m$ und die Geschwindigkeit $v = 39\, m$, während diese Werte zur Zeit t_1 schon $0 \cdot 200\, m$ und $170\, m$ betragen. Nahe am Anfangspunkte besitzt die Druckcurve einen Wendepunkt, wie ihn auch die Curven mehr oder weniger deutlich zu erkennen geben. Nach $t = \frac{3}{4} t_1$ hat das Geschoss einen Weg von $0 \cdot 081\, m$ zurückgelegt und $97\, m$ Geschwindigkeit bei einem Drucke von $1110\, kg$ erreicht. Nach $t = \frac{5}{4} t_1$ sind diese Werte auf $x = 0 \cdot 386 m$, $v = 243 m$ und $P = 1035\, kg$ gestiegen. Diese Data, namentlich die für den aufsteigenden Curvenast, stimmen mit den beobachteten gut überein. Bemerkt werde noch, dass auch die Geschwindigkeitscurve am Orte des höchsten Gasdruckes einen Wendepunkt aufweist, wie es auch sein muss.

Über die genannten Grenzen hinaus gelten die Formeln nicht mehr. Es treten dann die Expansionsgleichungen an ihre Stelle. Sie können aber benützt werden, um die Verbrennungsgeschwindigkeit des Pulvers in Function der Zeit zu erhalten. Aus 6) resultiert

$$\frac{L_y}{L} = \frac{\frac{x}{a(1-\alpha\Delta)}}{\left[\frac{f\Delta}{P(1-\alpha\Delta)}\right]^{\frac{1}{k}} - 1} \tag{16)}$$

und man hat hierin für x und P die obigen Werte einzusetzen. Es erscheint ein ziemlich complicierter Ausdruck, der es wünschenswert erscheinen lässt, ihn durch einen anderen zu ersetzen.

§. 23.

Anstatt in Function der Zeit lässt sich der Druck auch in Function des Geschossweges darstellen. Beschränken wir uns

auch hier zunächst auf den ersten Theil der Bewegung bis zum Wendepunkte, so genügt bis dahin die Gleichung

$$\frac{P}{P_1} = \frac{n}{n-m}\left(\frac{x}{x_1}\right)^m - \frac{m}{n-m}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n. \qquad 17)$$

Die Geschwindigkeit ist demnach

$$v^2 = \frac{2n}{n-m} \cdot \frac{P_1 r^2 \pi g x_1}{G}\left(\frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{m+1}}{m+1} - \frac{m}{n}\,\frac{\left(\frac{\pi}{x_1}\right)^{n+1}}{n+1}\right), \qquad 18)$$

und die Zeitdauer der Bewegung

$$t = x_1 \int \frac{d\frac{x}{x_1}}{\sqrt{\frac{2n}{n-m} \cdot \frac{P_1 r^2 \pi g x_1}{G}\left(\frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{m+}}{m+1} - \frac{m}{n(n+1)}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1}\right)}}. \qquad 19)$$

Man kann nun im letzten Integral m und n so bestimmen, dass dasselbe integrabel wird.

Die Geschwindigkeit am Orte des höchsten Druckes ist

$$v_1^2 = \frac{2 g r^2 \pi P_1 x_1}{G}\,\frac{m+n+1}{(m+1)(n+1)}, \qquad 20)$$

und man hat einfacher

$$(n-m)(m+n+1)\frac{v^2}{v_1^2} = n(n+1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^{m+1} - m(m+1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1}.$$

Wir bezeichnen mit x_2 den Ort des Wendepunktes, an welchen wir eine weitere Curve derart anschließen, dass sie mit der ersten eine gemeinsame Tangente hat und mit der wirklichen Druckcurve bis zur Mündung möglichst zusammenfällt. Für eine isothermische Verbrennung und Ausdehnung kann man mit großer Annäherung an die Curvenverhältnisse setzen

$$\frac{P}{P_2} = \frac{x_2}{x}, \quad \text{also} \quad \frac{dP}{dx} = -\frac{P_2 x_2}{x^2}.$$

Für den Berührungspunkt beider Curven erhält man aus der ersten Curvengleichung für $x = x_2$ durch Differentiation eine entsprechende Gleichung, und durch Gleichsetzen beider identischen Ausdrücke folgen die Beziehungen

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n-m} = \frac{n(m+1)}{m(n+1)}, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n(m+1)}{m(n+1)}\right)^{\frac{m}{n-m}}. \qquad 21)$$

Setzen wir, um die Formeln zu vereinfachen,

$$m = 2n-1,$$

so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{P}{P_1} &= \frac{n}{1-n}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n-1} - (2n-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^n, \\
v^2 &= \frac{P_1 r^2 \pi g x_1}{G(1-n^2)}\left((1+n)\left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n} - 2(2n-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1}\right), \\
v_1^2 &= \frac{3}{1+n}\cdot\frac{P_1 r^2 \pi g x_1}{G}, \\
t &= \frac{x_1}{(2n-1)v_1}\sqrt{\frac{3+3n}{1-n}}\left(1-\sqrt{1-\frac{2(2n-1)}{n+1}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1-n}}\right), \\
t_1 &= \frac{x_1}{v_1}\,\frac{\sqrt{\frac{3+3n}{1-n}}-3}{2n-1}, \\
\frac{t}{t_1} &= \frac{1-\sqrt{1-\frac{2(2n-1)}{n+1}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1-n}}}{1-\sqrt{3\,\frac{1-n}{1+n}}}.
\end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Diese Gleichungen geben die Variablen Pvt im ersten Theile der Geschossbewegung, sobald über n passend verfügt worden ist. Im Berührungspunkte beider Curven gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{P_2}{P_1} &= \frac{2n-1}{2n}\left[\frac{2n^2}{(2n-1)(n+1)}\right]^{\frac{n}{1-n}}, \\
\frac{x_2}{x_1} &= \left[\frac{2n^2}{(2n-1)(n+1)}\right]^{\frac{1}{1-n}}, \\
v_2^2 &= \frac{P_1 r^2 \pi g x_1}{G}\,\frac{1+3n}{(1+n)^2}\left(\frac{2n^2}{(2n-1)(n+1)}\right)^{\frac{2n}{1-n}}, \\
\frac{t_2}{t_1} &= \frac{1+n-\sqrt{(1-n)(1+3n)}}{1+n-\sqrt{3(1-n)(1+n)}}.
\end{aligned}\right\} \quad 23)$$

Für die Bewegung nach dem Wendepunkte x_2 gelten

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{x_2}{x} P_2, \qquad v = v_2\sqrt{1+\frac{2n(1+n)}{1+3n}\,ln\frac{x}{x_2}}, \\
t &= \frac{1}{v_2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{2n(1+n)}{1+3n}\,ln\frac{x}{x_2}}};
\end{aligned}\right\} \quad 24)$$

n ist aus einem Versuche passend zu bestimmen. Will man n aus dem Mündungsdrucke P_0, dem höchsten Drucke P_1 und x_1 und dem ganzen Geschosswege l ermitteln, so ist die transcendente Gleichung

$$\frac{2n-1}{2n}\left(\frac{2n^2}{(1+n)(2n-1)}\right)^{\frac{1+n}{1-n}} = \frac{Pvl}{P_1 x_1} \qquad 25)$$

aufzulösen.

Man kann aber auch anders verfahren.

Anwendung auf die 7·5 *cm* Schnellade-Kanone *L*/30 von Krupp. Siehe Fig. 2.

$$G = 6\cdot 35\,kg, \quad r^2\pi = 45\cdot 42\,cm^2, \quad P_1 = 1860\,kg, \quad x_1 = 0\cdot 19\,m.$$

Die Annahme $n = {}^3/_4$, also $m = {}^1/_2$, führt auf die Gleichungen

$$\frac{P}{P_1} = 3\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1/2} - 2\left(\frac{x}{x_1}\right)^{3/4}, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{12}{7}\cdot\frac{P_1 r^2\pi g x_1}{G}},$$

$$t_1 = \frac{2x_1}{v_1}(\sqrt{21}-3),$$

woraus folgt

$$v_1 = 206\,m, \qquad t_1 = 0\cdot 0029^s.$$

Die Annahme $n = {}^2/_3$ liefert

$$v_1 = 212\cdot 8, \qquad t_1 = 0\cdot 0024,$$

was mit der Krupp'schen Curve gut übereinstimmt.

Da x sich bequem durch t ausdrücken lässt, so erhält man auch die Druck- und Geschwindigkeitswerte in Function der Zeit. So folgt z. B. für $n = {}^3/_4$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{147}{16}(1-T^2)^2 - \frac{343}{32}(1-T^2)^3,$$

$$T = 1-\left(1-\frac{\sqrt{21}}{7}\right)\frac{t}{t_1}.$$

An diese Gleichungen schließen sich noch mit Leichtigkeit diejenigen, die sich auf die Änderung von P und den größten Wert dieser Änderung $\frac{dP}{dt}$ beziehen:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{n(2n-1)}{1-n}\,\frac{P_1 v}{x_1}\left[1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1-n}\right]\left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n-2} \tag{26}$$

und die schnellste Änderung oder die stärkste Zunahme des Gasdruckes ergibt sich aus der differenzierten Gleichung

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1-n} = 1-\sqrt{\frac{3(1-n)^2}{(3n-1)(2n-1)}}. \tag{27}$$

Wenn $n = {}^3/_4$, so folgt $\frac{x}{x_1} = 0\cdot 04$, wonach also die stärkste Zunahme des Gasdruckes dem Anfangspunkte sehr nahe liegt, was mit der Erfahrung übereinstimmt. So gibt auch die Gasdruckformel für $n = {}^3/_4$

$$\frac{P}{P_1} = 3\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1/2} - 2\left(\frac{x}{x_1}\right)^{3/4} \tag{28}$$

innerhalb ihres Giltigkeitsbereiches die Curvenwerte sehr gut wieder. So ergab ein Versuch

$$P_1 = 1530\,kg, \qquad x_1 = 0\cdot 200\,m,$$

welche Zahlen den höchsten Gasdruck und seinen Ort bezeichnen.

Die Curve gibt für

$$x = \frac{1}{2}x_1: \quad P = 1420, \qquad x = 2x_1: \quad P = 1330,$$

und die Formel

$$P = 1423, \qquad\qquad P = 1346.$$

Die n-Werte, die zwischen 0 und 1 fallen, sind stets dem entsprechenden Versuche anzupassen, da sie von der Natur des Pulvers und anderen Umständen abhängen. Ist für einen Versuch $n = {}^2/_3$ zu benützen, so lässt sich x durch P leicht ausdrücken und man hat

$$\frac{x}{x_1} = \left(1 \pm \sqrt{1-\frac{P}{P_1}}\right)^3. \tag{29}$$

In diesem Falle lässt sich auch die Verbrennung in Function des Druckes aufstellen:

$$\frac{L_y}{L} = \frac{x_1}{a(1-\alpha\Delta)} \cdot \frac{\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{P}{P_1}}\right)^3}{\left(\frac{f\Delta}{(1-\alpha\Delta)P}\right)^{\frac{1}{k}} - 1}. \tag{30}$$

Allgemeiner ist die folgende Formel für $n = 2m$:

$$\frac{P}{P_1} = 2\left(\frac{x}{x_1}\right)^m - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{2m},$$

woraus

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^m = 1 \mp \sqrt{1-\frac{P}{P_1}}$$

folgt. Für $k = 1$ wird dann

$$\frac{L_y}{L} = \frac{P_1 x_1}{a} \, \frac{\frac{P}{P_1}\left(1 \mp \sqrt{1-\frac{P}{P_1}}\right)^{\frac{1}{m}}}{f\Delta - (1-\alpha\Delta)P}. \tag{31}$$

Das Zeitintegral 19) kann man noch in der Weise transformieren, dass man den Ausdruck

$$\frac{x}{x_1} = z^k$$

darin einführt und k passend bestimmt. Das Integral geht dann über in

$$v_1 t = \int \frac{k x_1 \sqrt{(n-m)(m+n+1)}\, dz}{\sqrt{n(n+1) z^{k(m-1)+2} - m(m+1) z^{k(n-1)+2}}}.$$

So führt die Annahme

$$k(m-1)+2 = 0, \qquad k(n-1)+2 = 2$$

auf

$$n = 1, \qquad k = \frac{2}{1-m}$$

und man gewinnt die einfachen Formeln

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{2x_1}{v_1}\sqrt{\frac{2+m}{m(1-m^2)}} \arcsin \sqrt{\frac{m(m+1)}{2}} \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1-m}{2}}, \\ \frac{P}{P_1} &= \frac{1}{1-m}\left(\frac{x}{x_1}\right)^m - \frac{m}{1-m}\left(\frac{x}{x_1}\right), \\ v^2 &= \frac{2}{1-m^2}\frac{P_1 r^2 \pi g x_1}{G}\left(\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m} - \frac{1}{2} m(1+m)\left(\frac{x}{x_1}\right)^2\right). \end{aligned}\right\} \quad 32)$$

Anwendung. $8 \cdot 0\, cm$ Kanone $L/29$ von Krupp.

$$G = 7 \cdot 5\, kg, \quad L = 0 \cdot 66 \text{ Würfelpulver}, \quad P_1 = 1845\, kg,$$
$$x_1 = 0 \cdot 200\, m.$$

Wir nehmen an $m = {}^1/_5$ und erhalten für $x = \frac{1}{2} x_1$ und $= 2x_1$ durch Rechnung:

$$P_{\frac{1}{2}x_1} = 1780, \qquad P_{2x_1} = 1726,$$

Der Versuch ergab:

$$1763, \qquad 1670.$$

Die Geschwindigkeit im Druckmaximum ist

$$v_1 = 213 \quad (\text{Versuch } 211\, m),$$

die Zeit bis zum Druckmaximum ist

$$t_1 = 0{\cdot}0022 \quad (\text{Versuch } 0{\cdot}0021).$$

Diese Werte lassen erkennen, dass die obigen und die früheren Formeln im ganzen den experimentellen Werten sehr nahe stehen und einer weiteren Anwendung fähig sind. Berücksichtigt man dabei die nicht völlig zu hebende Unsicherheit in den Versuchsangaben, bei welchen z. B. die Bestimmung des Ortes des höchsten Gasdruckes und dieser selbst vielfachen Schwankungen unterliegt, so muss die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch noch durchaus befriedigen. Dabei hat man es ja auch in der Hand, durch genauere Werte von n die Übereinstimmung noch weiter zu steigern. Auch die letzten Formeln gewähren die Möglichkeit, die Elemente der Bewegung in Function der Zeit darzustellen, was für manche Zwecke oft sehr erwünscht ist. So hat man z. B., wenn gesetzt wird

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\, m\,(1+m)},$$

die folgenden einfachen Ausdrücke für den Geschossweg, die Geschwindigkeit und den Druck

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{x_1} &= \left(\frac{\sin\alpha\dfrac{t}{t_1}}{\sin\alpha}\right)^{\frac{2}{1-m}},\\
v &= \frac{2\alpha x_1}{(1-m)t_1}\,\frac{\cos\dfrac{\alpha t}{t_1}}{\sin\alpha}\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha t}{t_1}}{\sin\alpha}\right)^{\frac{1+m}{1-m}},\\
v_1^2 &= \frac{2+m}{1+m}\,\frac{P_1 r^2 \pi g x_1}{G},\\
\frac{P}{P_1} &= \frac{1}{1-m}\left[1-m\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha t}{t_1}}{\sin\alpha}\right)^2\right]\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha t}{t_1}}{\sin\alpha}\right)^{\frac{2m}{1-m}}.
\end{aligned}\right\} \quad 33)$$

Wie man finden wird, liefern die Annahmen $m = {}^1/_4$ oder ${}^1/_5$ gute Resultate.

§. 24.

Sobald das Pulver vollständig verbrannt ist, wirkt das Gas ausschließlich durch Expansion. Falls man diesen Zustand als adiabatischen auffassen will, so kann man zur Berechnung der Druck- und Bewegungsverhältnisse sich des Poisson'schen Gesetzes

$$\frac{P_x}{P} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^k \tag{34}$$

bedienen. Der Ausdehnungscoefficient k ist bekanntlich für verschiedene Gasgemische verschieden und ändert sich auch nicht unbeträchtlich mit steigender Temperatur. Da anderseits die Ausdehnung der Gase eine Abkühlung ihrer Temperatur herbeiführt und auch noch andere Ursachen, z. B. Wärmeleitung, einen weiteren Theil der Wärme absorbieren, so ist für k ein Mittelwert zu nehmen. Bezeichnen wir mit P_2 und x_2 den Gasdruck und seinen Ort in dem Momente, wo die Expansion beginnt und mit a die Länge des Laderaumes, so ist

$$\frac{P}{P_1} = \left(\frac{a+x_2}{a+x}\right)^k. \tag{35}$$

Bei Berücksichtigung des Covolumens kann man a entsprechend verkürzen. Die Geschwindigkeit ergibt sich aus

$$v^2 = v_1^2 + \frac{2P_2 r^2 \pi g}{G} \frac{a+x_2}{k-1}\left(1-\left(\frac{a+x_1}{a+x}\right)^{k-1}\right),$$

oder wenn man einführt

$$\varepsilon = \frac{2gP_2 r^2 \pi (a+x_2)}{G(k-1)v_2^2}$$

aus

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= v_2^2\left[1+\varepsilon-\varepsilon\left(\frac{a+x_2}{a+x}\right)^{k-1}\right], \\ \frac{v}{v_0} &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon-\varepsilon\left(\frac{a+x_2}{a+x}\right)^{k-1}}{1+\varepsilon-\varepsilon\left(\frac{a+x_2}{a+l}\right)^{k-1}}}, \qquad x = l \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

wo l den ganzen Geschossweg bezeichnet.

Das Zeitintegral der Expansionsbewegung lässt sich auf Grund der letzten Formel nach Einführung von

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \cos \varphi = \cos \varphi_2 \left(\frac{a+x_2}{a+x}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

$$\cos \varphi_0 = \cos \varphi_2 \left(\frac{a+x_2}{a+l}\right)^{\frac{k-1}{2}}$$

auf den einfachen Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{\sin \varphi_0}{v_0} \int \frac{dx}{\sin \varphi}, \\ t &= \frac{2(x_2+a)\sin \varphi_0 \cos \varphi_1^{\frac{2}{k-1}}}{v_0(k-1)} \int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos \varphi^{\frac{k+1}{k-1}}} \end{aligned}\right\} \quad 37)$$

reducieren. Die Ausführbarkeit der Integration in geschlossener Form hängt vom Exponenten $\frac{k+1}{k-1}$ ab. Nehmen wir für Blättchenpulver $k = 1 \cdot 4$ an, so ist das Zeitintegral

$$t = \frac{2(x_2+a)\sin \varphi_0 \cos \varphi_2^{\frac{2}{k-1}}}{v_0(k-1)} \Big[\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_2 + \frac{2}{3}(\operatorname{tg} \varphi_0^3 - \operatorname{tg} \varphi_2^3) + \\ + \frac{1}{5}(\operatorname{tg} \varphi_0^5 - \operatorname{tg} \varphi_2^5)\Big]. \quad 38)$$

Auch für Würfelpulver mit dem Näherungswerte $k = 4/3$ ist das entsprechende Integral noch darstellbar. Für Schwarzpulver ($k = 1 \cdot 3$) und jene Pulverarten, bei welchen der Exponent keine ganze Zahl ist, ist man auf Quadraturen angewiesen. Die Umständlichkeit der Rechnungen indessen, die mit diesen Formeln verknüpft ist, lässt es wünschenswert erscheinen, sie durch andere, den ganzen Vorgang der Bewegung einheitlich umfassende zu ersetzen.

§. 25.

Wir erweitern die bisherigen Gasdruckformeln dahin, dass wir sie über den ganzen Verlauf der Bewegung ausdehnen.

Die zu ermittelnde Druckcurve muss also nicht nur die während der Verbrennung herrschenden, sondern auch die lediglich durch Expansion bewirkten Drucke zur Darstellung bringen. Auch hier sind wir genöthigt, weil der Verbrennungsprocess im Rohre formell nicht aufstellbar ist, die Curve empirisch zu suchen und aus ihr die Vergasungsformeln abzuleiten. Die Druckcurve wird auch hier mehrere Parameter enthalten müssen, um den den verschiedenen Pulversorten entsprechenden graphischen Darstellungen der wirklichen Bewegungen gerecht werden zu können.

So zeigt z. B. die Curve des Schwarzpulvers einen sehr jähen Aufstieg und darauf einen starken Niedergang, der erkennen lässt, dass die Verbrennung des Pulvers beim höchsten Gasdrucke nahezu beendet ist, was gestattet, die obigen Expansionsformeln ohneweiters darauf anzuwenden, während die chemischen Pulver einen weit ruhigeren und gleichmäßigeren Auf- und Niedergang bewirken. Aber auch bei diesen werden durch die mannigfaltigen Formen der Pulverkörner, gelegentliche Detonationen, beschleunigte oder verzögerte Verbrennung, so eigenthümliche Veränderungen und Abweichungen vom normalen Verlaufe herbeigeführt, dass eine einheitliche mathematische Darstellung aller dieser sich summierenden Wirkungen unmöglich ist. Es genügt indessen, die Mittelcurve zu finden, die den harmonischen Ausgleich aller dieser Schwankungen herbeiführt und die wichtigsten Versuchsdata ausreichend wiedergibt. Unsere Druckcurve hat die folgende Gleichung

$$P = \frac{f\Delta a x^{n-1}}{Ax^n + C}, \tag{39}$$

deren Constanten den Versuchen gemäß zu bestimmen sind. Mittels der früher aufgestellten Formel

$$P\left(x\frac{L}{L_y} + a(1-\alpha\Delta)\right) = f\Delta a$$

erhalten wir damit die Verbrennungsformel

$$\frac{L_y}{L} = \frac{x^n}{Ax^n - a(1-\alpha\Delta)x^{n-1} + C}. \tag{40}$$

Beide Gleichungen müssen den Bedingungen des Maximums genügen. Die erste liefert

$$P_1 = \frac{f\Delta a x_1^{n-1}}{A x_1^n + C}, \qquad A x_1^n = C(n-1)$$

und damit die Coefficienten A und C. Die zweite erreicht ihr Maximum für $L_y = L$ und liefert für den Ort x_2 der beendeten Verbrennung

$$a(1-\alpha\Delta)x_2^{n-1} = Cn, \qquad (A-1)x_2^n = C(n-1).$$

Die Elimination von x_2 ergibt eine weitere Beziehungsgleichung zwischen A und C. Die Rechnungen, die sich unter anderen auf die Definition

$$v dv = \frac{P r^2 \pi dx}{G/g}$$

beziehen, sind leicht durchzuführen, und stellen wir die Resultate nachstehend zusammen. P_1 nehmen wir als gegeben an.

Die Druckcurve ist

$$\frac{P}{P_1} = \frac{n\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n-1}}{1+(n-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^n}. \tag{41}$$

Die Geschwindigkeit folgt aus

$$\frac{v^2}{v_1^2} = \frac{ln\left[1+(n-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right]}{ln\, n}. \tag{42}$$

Die Geschwindigkeit am Orte des höchsten Gasdruckes, wenn zur Abkürzung

$$S = \frac{f\Delta}{(1-\alpha\Delta)P_1}$$

gesetzt wird, ergibt sich aus

$$v_1^2 = 2f\Delta a r^2 \pi \frac{g}{G} \frac{ln\, n}{n}\left(1 - \frac{1}{S^{\frac{n}{n-1}}}\right) \tag{43}$$

und der Ort des höchsten Gasdruckes aus

$$x_1 = a(1-\alpha\Delta)\frac{(n-1)}{n}\left[S - \frac{1}{S^{\frac{1}{n-1}}}\right]. \qquad 44)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man noch weiter für die Geschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= \frac{2P_1 r^2 \pi g x_1}{(n-1)G}\, ln\left(1+(n-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right), \\ v_1^2 &= \frac{2P_1 r^2 \pi g x_1}{G}\,\frac{ln\, n}{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad 45)$$

Das Zeitintegral ist

$$t = \frac{2x_1}{v_1(2-n)}\sqrt{\frac{ln\, n}{n-1}}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{2-n}{2}}\left[1+\frac{1}{4}(n-1)\frac{(2-n)}{2+n}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n - \right.$$
$$-\frac{7}{96}(n-1)^2\frac{(2-n)}{(2+3n)}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n} +$$
$$\left. + \frac{5}{128}(n-1)^3\frac{2-n}{2+5n}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{3n} - \ldots\right]. \qquad 46)$$

Der Ort der beendeten Verbrennung folgt aus

$$x_2 = (n-1)\,a\,(1-\alpha\Delta)\left[S^{\frac{n}{n-1}} - 1\right], \qquad x_2 = x_1 S^{\frac{1}{n-1}}. \qquad 47)$$

Das dem Geschosswege $x < x_2$ entsprechende Pulverquantum ist

$$L_y = \frac{P_1 r^2 \pi x_1 n \left(\frac{x}{x_1}\right)^n}{10f\left(1 - n\frac{P_1(1-\alpha\Delta)}{f\Delta}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n-1} + (n-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right)} \qquad 48)$$

und die bis zum Druckmaximum verbrannte Pulverladung

$$L_{y_1} = \frac{P_1 r^2 \pi x_1}{10f\left(1 - \frac{(1-\alpha\Delta)P_1}{f\Delta}\right)}. \qquad 49)$$

Die Geschwindigkeit der Verbrennung folgt durch Differentierung von L_y nach t und ist dieselbe im Druckmaximum

$$\frac{dL_{y_1}}{dt} = \frac{r^2 \pi P_1 v_1}{10 f\left[1 - \frac{P_1(1-\alpha\Delta)}{f\Delta}\right]}. \tag{50}$$

Die Verbrennungsformel kann auch in folgender Fassung geschrieben werden:

$$L_y = \frac{\frac{nLx_2}{a(1-\alpha\Delta)}}{\frac{nx_2}{a(1-\alpha\Delta)} - n\left(\frac{x_2}{x} - 1\right) + \left(\frac{x_2}{x}\right)^n - 1}. \tag{51}$$

Die Wendepunkte der P-Curve, deren zwei sind, folgen aus

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n = \frac{1}{4}(n+4) \pm \frac{n}{4}\sqrt{\frac{n+7}{n-1}} \tag{52}$$

und der Wendepunkt der Verbrennungscurve, in welchem also die Verbrennung am schnellsten vor sich geht, wird aus der höheren Gleichung

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n-1} - \frac{f\Delta(n+1)}{2(1-\alpha\Delta)P_1}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n - \frac{(2-n)}{2}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n-1} + \frac{f\Delta}{2(1-\alpha\Delta)P_1} = 0 \tag{53}$$

ermittelt.

Wie die Formeln zeigen, lassen sich aus der einzigen Größe P_1 oder dem Druckmaximum alle übrigen Werte theoretisch ableiten. Falls nur x_1 oder der Ort des höchsten Druckes bekannt sein sollte, so müsste zur Bestimmung von P die Gleichung

$$\left[\frac{(1-\alpha\Delta)P_1}{f\Delta}\right]^{\frac{n}{n-1}} + \frac{nx_1P_1}{af\Delta(n-1)} - 1 = 0 \tag{54}$$

aufgelöst werden, wo n dem Versuche gemäß zu bestimmen wäre. So würde für $n = 2$ folgen

$$P_1 = \frac{f\Delta}{\frac{x_1}{a} + \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + (1-\alpha\Delta)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{10fL}{r^2\pi}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + \left(a - \frac{10\alpha L}{r^2\pi}\right)^2}}, \quad 55)$$

und zeigt diese einfache Formel die Abhängigkeit des höchsten Druckes von der Kraft des Sprengstoffes f, von der Ladedichte Δ und dem Orte des höchsten Druckes etc. Da $\Delta = \frac{10L}{r^2\pi a}$, so ergibt sich unter sonst gleichen Umständen aus der zweiten Gleichung, dass die höchsten Gasdrucke nicht im einfachen Verhältnisse der Ladungen, sondern in etwas stärkerem Maße zunehmen, was auch von der Erfahrung bestätigt wird. Dagegen nehmen sie ab, wenn der Ort des Druckmaximums weiter nach vorn verlegt und der Laderaum vergrößert wird.

Auch das vielfach gebräuchliche Gesetz zwischen Geschwindigkeit und Ladung

$$v^2 : v_1^2 = L : L_1$$

ist hiernach ungenau. Für $n = 2$ erhält man z. B.

$$v_1^2 = \frac{2r^2\pi g l n 2 f\Delta a}{G\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a^2}{x_1^2}(1-\alpha\Delta)^2}\right)}, \quad 56)$$

was zeigt, dass auch die Geschwindigkeiten im Druckmaximum in stärkerem Verhältnisse, etwa wie

$$v : v_1 = L^{\frac{1}{2}+p} : L_1^{\frac{1}{2}+p}$$

anwachsen.

Zur Anwendung wählen wir den folgenden Versuch:

Preußische 8·8 *cm* Kanone.

Geschossgewicht $G = 8\cdot 135$ *kg*, Ladung $L = 0\cdot 77$ *kg* Würfelpulver, $r^2\pi = 62\cdot 9$, Verbrennungsraum und -Länge $2\cdot 1$ dm^3, beziehungsweise $a = 0\cdot 267$ *m*. Höchster Gasdruck 1530 *kg*. Gesammtlänge des Geschossweges $l = 1\cdot 58$ *m*.

Wir setzen zunächst $n = 2$ und erhalten unter Benützung der Werte

$$G = 8 \cdot 135 + 0 \cdot 28, \quad \Delta = 0 \cdot 77/2 \cdot 1 = 0 \cdot 366, \quad \alpha = 0 \cdot 84,$$
$$\alpha\Delta = 0 \cdot 3, \quad 1 - \alpha\Delta = 0 \cdot 7$$

als Ort des Druckmaximums $x_1 = 0 \cdot 260$, während die Messung $x_1 = 0 \cdot 200$ im Mittel ergab.

Die Geschwindigkeit ist $v_1 = 201 \cdot 3\ m$ (Versuch 192 m).

Der Ort der beendeten Verbrennung liegt bei $x_2 = 0 \cdot 75\ m$.

Die Mündungsgeschwindigkeit beträgt, da $\frac{l}{x_1} = 6 \cdot 077$, $v_0 = 461\ m$ (Versuch 465 m), der Gasdruck ebenda 490 kg (Versuch 510 kg).

Der Wendepunkt der Druckcurve liegt bei

$$x_3 = x_1 \sqrt{3} = 0 \cdot 450\ m.$$

Wir bemerken bezüglich der Wahl $n = 2$, dass dieser Wert ein Grenzfall ist, der die Berechnung von t ausschließt. Letztere wird erst ermöglicht durch die Annahme $n < 2$. Wir geben hierzu folgendes Beispiel und setzen $n = 1^1/_2$. Siehe Fig. 1.

8·8 cm Feldkanone. $G = 8 \cdot 135 + 0 \cdot 28$, $L = 0 \cdot 71$ Würfelpulver, $a = 0 \cdot 267$, $l = 1 \cdot 58\ m$, $P_1 = 1345\ kg$, $\Delta = 0 \cdot 71/2 \cdot 1 = 0 \cdot 34$, $\alpha = 0 \cdot 84$, $\alpha\Delta = 0 \cdot 285$, $1 - \alpha\Delta = 0 \cdot 715$.

Man findet $S = 3 \cdot 208$, also:

$$x_1 = 0 \cdot 198\ m \text{ (Versuch } 0 \cdot 200\text{)}, \quad v_1 = 178\ m \text{ (Versuch 180)}.$$

Da $l = 1 \cdot 58 = 8 . 0 \cdot 198$, so ist der Druck an der Mündung

$$\frac{P}{P_1} = \frac{3\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1/2}}{2 + \left(\frac{x}{x_1}\right)^{3/2}}, \quad \frac{x}{x_1} = 8, \quad \frac{P_0}{P_1} = 0 \cdot 3445,$$

also

$$P_0 = 463\ kg \text{ (Versuch 450 At.)}.$$

Der Versuch ergab übrigens für P_1 je nach den Messungen 1201, 1241 und 1302 At. Die Mündungsgeschwindigkeit ist

$$v = v_1 \sqrt{\frac{ln\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{3/2}\right)}{ln\,^3/_2}}, \qquad \frac{x}{x_1} = 8,$$

$v_0 = 443\,m$ (Versuch 440).

Der Wendepunkt der Druckcurve folgt aus

$$\frac{x_3}{x} = 2\cdot921, \qquad x_3 = 0\cdot578\,m.$$

Da der Ort der beendeten Verbrennung theoretisch durch $x_2/x_1 = 10\cdot3$ bestimmt ist, so fällt er außerhalb der Mündung, wonach also die Verbrennung beim Geschossaustritte noch nicht beendet ist. Die eigenthümliche Gestalt der Druckcurve des Versuches lässt ebenfalls darauf schließen.

Die Zeit bis zum Druckmaximum ist

$$t_1 = \frac{4x_1}{v_1}\sqrt{2\,ln\,^3/_2}\,(1+0\cdot0179-0\cdot0014+\ldots) = 0\cdot0040^s.$$

Gemessen wurde $t_1 = 0\cdot00335 \pm {}^{8}_{6\cdot2}$, so dass unser Wert noch innerhalb der Beobachtungsfehler fällt. Der Unterschied rührt daher, dass nach der obigen Druckformel für $\frac{x}{x_1} = \frac{1}{2}$ der entsprechende Druck im Punkte $x = \frac{1}{2}x_1 = 0\cdot100$ in der Höhe von $P_1 . 0\cdot9 = 1211\,kg$ gefunden wird, während der Versuch den etwas größeren 1225 lieferte.

Bemerkenswert ist noch das Verhältnis, in welchem die theilweise vergaste Ladung zur jeweiligen Geschwindigkeit steht.

Aus den beiden Gleichungen für L_y und v^2 folgt

$$L_y = \frac{n(n-1)\,G\left(\frac{x}{x_1}\right)^n v^2}{20fg\left(1-n\,P_1\frac{(1-\alpha\Delta)}{f\Delta}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{n-1}+(n-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right)ln\left(1+(n-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right)}$$

oder wenn der Logarithmus in Reihen entwickelt und man der Einfachheit wegen $\alpha\Delta = 1$ setzt:

$$L_y = \frac{n\,G\,v^2}{20fg\left(1+\frac{1}{1.2}(n-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^n-\frac{1}{2.3}(n-1)^2\left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n}+\ldots\right)}. \qquad 57)$$

Hiernach ist wenigstens im Anfange der Bewegung und auch noch über das Druckmaximum hinaus die jeweilig verbrannte Pulvermenge dem Quadrate der Geschossgeschwindigkeit nahezu proportional.

§. 26.

Von besonderem Interesse bei der Beurtheilung einer Pulverart ist das Verhältnis des höchsten Druckes zum mittleren. Unter dem mittleren, gleichmäßig wirkenden Drucke versteht man denjenigen, der dem Geschosse die gleiche Mündungsgeschwindigkeit ertheilt. Für das Geschütz würde, wenn dieser ideale Zustand realisierbar wäre, damit der Vortheil verknüpft sein, dass es an allen Stellen gleichmäßig beansprucht würde.

In Wirklichkeit liegt die Sache aber anders und besonders bei den rasch verbrennenden Pulversorten ziemlich ungünstig, und ist es das Ziel der Techniker, die Bedingungen aufzufinden, unter denen das Pulver für Geschütz und Geschoss am günstigsten wirkt. Ist eine bestimmte Mündungsgeschwindigkeit v_0 vorgeschrieben, so lässt sich dieselbe im allgemeinen auf verschiedene Weise erreichen; vorzuziehen ist derjenige Maximaldruck, der dem mittleren P_m nahekommt, oder für den das Verhältnis $\frac{P_1}{P_m}$ ein Minimum wird.

Zur Bestimmung dieses Minimums können die obigen Gleichungen dienen. Bemerkt man, dass der mittlere Gasdruck durch

$$P_m . r^2 \pi l = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_0^2, \tag{58}$$

und v_0 durch die Formel

$$v_0^2 = \frac{2 g r^2 \pi P_1 x}{(n-1) G} \, ln \left[1 + (n-1)\left(\frac{l}{x_1}\right)^n\right]$$

bestimmt ist, so ergibt sich damit das Verhältnis des mittleren Druckes zum höchsten

$$\frac{P_m}{P_1} = \frac{ln[1+(n-1)y^n]}{(n-1)y}, \qquad y = \frac{l}{x_1}, \tag{59}$$

das also zu einem Minimum zu machen ist. Dieses tritt ein, wenn

$$ln(1+(n-1)y^n) = \frac{n(n-1)y^n}{1+(n-1)y^n}. \qquad 60)$$

Nehmen wir $n = 2$ an, so führt die Gleichung

$$2y^2 = (1+y^2)\,ln(1+y^2)$$

zu der sehr angenäherten Lösung

$$y = 2, \qquad x_1 = \frac{1}{2}l$$

und damit zu dem Resultate, dass der höchste Druck zweckmäßig in die Mitte des Geschossweges l, also ungefähr in die Mitte des Rohrinnern zu verlegen ist. Das Druckverhältnis wird daselbst

$$\frac{P_m}{P_1} = \frac{4}{5}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{P_1}{P_m} = 1\cdot 25.$$

Aus dem kleinen Werte dieses Verhältnisses erkennt man, dass die Druckcurve schon sehr flach geworden und der höchste Gasdruck beträchtlich heruntergegangen, die Geschosswirkung dagegen dieselbe geblieben ist. Der Hauptvortheil liegt in der Entlastung des Geschützrohres von überflüssigem und damit schädlichem Drucke. Hätten wir $n = 1\frac{1}{2}$ angenommen, so würde bei ebenfalls demselben Druckorte $x_1 = \frac{1}{2}l$ ein noch günstigeres Druckverhältnis $\frac{P_1}{P_m} = 1\cdot 134$ auftreten, was allerdings den Fall nicht ausschließt, dass die verlangsamte Verbrennung an der Mündung noch nicht zu Ende ist, was eine Vergeudung von Pulver zur Folge hat, die vermieden werden muss.

Setzen wir in die Formel

$$\frac{P_m}{P_1} = \frac{ln\left(1+\left(\frac{l}{x_1}\right)^2\right)}{\frac{l}{x_1}} \qquad 61)$$

der Reihe $\frac{l}{x_1} = 1,\ 1^1/_2,\ 2,\ 3,\ 4$ etc. ein, so erhält die den entsprechenden Rohrlängen zugehörigen Werte

$$\frac{P_m}{P_1} = 0\cdot693,\ 0\cdot785,\ 0\cdot804,\ 0\cdot767,\ 0\cdot708 \text{ etc.},$$

die also mit ihnen zuerst zu- und dann abnehmen. Das günstigste Verhältnis ist das oben genannte.

§. 27.

Wir schalten hier eine Untersuchung ein, die sich auf das Verhältnis bezieht, in welchem die Ladung zum Geschossgewichte und zur fortschreitenden Bewegung steht. Da unter Umständen das Ladegewicht beträchtlich sein kann, so muss der von ihm geäußerte Einfluss in Rechnung gezogen und die Grenzen ermittelt werden, innerhalb welcher er eine Rolle spielt. Gewöhnlich erledigt man diese Frage damit, dass man dem Geschossgewichte noch das halbe Ladungsgewicht hinzufügt.

Wir wollen allgemein statt $G+\frac{1}{2}L$ setzen: $G+\varepsilon L$, also

$$vdv = \frac{r^2\pi P dx}{G+\varepsilon L} \tag{62}$$

annehmen und nachsehen, welchen Wert ε unter bestimmten Verhältnissen erhalten kann. Für $\varepsilon = 0$ wird die Geschwindigkeit am größten, wir nennen sie V.

Wenn das Pulver in einer Potenz der Geschossgeschwindigkeit verbrennt, so ergibt die Einführung von $L_y = L\left(\frac{v}{v_0}\right)^n$ in die obige Gleichung

$$vdv = \frac{Pr^2\pi g dx}{G+L-L\left(\frac{v}{v_0}\right)^n}.$$

Hiernach ist beim Beginne der Bewegung das gesammte Gewicht $G+L$, und zu Ende nur noch G, da die Ladung sich inzwischen in Gas aufgelöst hat.

Die Integration der Gleichung

$$v\left(1+\frac{L}{G}-\frac{L}{G}\left(\frac{v}{v_0}\right)^n\right)dv=\frac{Pr^2\pi dx}{Gv_0^2}$$

ergibt

$$\frac{L}{G}\frac{v^2}{v_0^2}\left(1-\frac{2}{2+n}\left(\frac{v}{v_0}\right)^n\right)=\frac{V^2-v^2}{v_0^2}, \tag{63}$$

woraus

$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}v_0^2=\frac{1}{2}\frac{G}{g}\cdot\frac{V^2}{1+\frac{n}{2+n}\frac{L}{G}}$$

folgt. Der Pulvercoefficient ε ist also durch

$$\varepsilon=\frac{n}{2+n}$$

bestimmt. Für $n=2$ geht er in $^1/_2$ über, und bei wachsendem n nähert er sich der Einheit. Der Grund hievon ist leicht einzusehen. Hat z. B. die Geschwindigkeit den Wert $\frac{1}{2}v_0$ erhalten, so muss nach der obigen Verbrennungspotenz, wenn $n=4$ wäre, $\frac{1}{16}$ der ganzen Ladung verbrannt sein. Der Rest von $^{15}/_{16}$ verlangt also zur Fortbewegung eine entsprechende Arbeitsleistung und die Sache liegt so, als ob außer G noch $\frac{2}{3}L$, also mehr als $^1/_2 L$ als träge Masse vorhanden wären. Ist dagegen n klein, z. B. $=\,^1/_4$, so würde unter derselben Bedingung $L\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}=0\cdot84\,L$ oder fast $^{17}/_{20}$ der Ladung verbrannt sein, die nicht mehr das Geschoss belastet und da $\varepsilon=\frac{1}{9}$, die endliche Geschossgeschwindigkeit bei weitem weniger verringert.

§. 28.

Die oben gemachte Annahme, dass die Verbrennung in einer Potenz der Geschwindigkeit v erfolge, führt zur folgenden Druckgleichung

$$P=\frac{Cv^n}{x+a(1-\alpha\Delta).cv^n}, \tag{64}$$

wo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{r^2\pi g P}{G}.$$

Die Integration ist nicht direct ausführbar, wird aber ermöglicht, wenn man beachtet, dass die Geschwindigkeitscurven annähernd als höhere parabolische angesehen werden dürfen. deren Gleichung $\frac{v}{v_0} = \left(\frac{x}{l}\right)^{\beta}$ ist. Indem wir also die modificierte Gleichung

$$P = \frac{Cv^n}{x+cx^m}$$

zugrunde legen und die Constanten aus den Versuchen ermitteln, erhalten wir unter Beachtung des Druckmaximums die folgenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{Gv_1^2}{r^2\pi g n x_1}\cdot\frac{1+cmx_1^{m-1}}{1+cx_1^{m-1}}, \\ \frac{P}{P_1} &= \left(\frac{v}{v_1}\right)^n \frac{x_1+cx_1^m}{x+cx^m}, \\ \left(\frac{v}{v_1}\right)^{2-n} &= \frac{2-n}{n(1-m)}(1+cmx_1^{m-1})\,ln\left(1+\frac{x^{1-m}}{c}\right). \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Ist $v = v_1$, so lässt die aus letzterer Formel folgende Gleichung

$$\frac{n(1-m)}{2-n} = (1+cmx_1^{m-1})\,ln\left(1+\frac{x^{1-m}}{c}\right)$$

die Berechnung der einen oder anderen Constanten aus den übrigen zu.

Um die Anwendungsfähigkeit dieser Formeln festzustellen, nehmen wir versuchsweise $m = 0$ und $c = x_1$ an, was zu $n = 0\cdot818$ führt.

Wir wählen wieder das $8\cdot8\,cm$ Geschütz.

$G = 7\cdot04$, $L = 0\cdot65\,kg$ Würfelpulver, $r^2\pi = 62$,
$x_1 = 0\cdot200$, $l = 1\cdot6$; also $l = 8x_1$, $v_0 = 435\,m$.

Wir setzen

$$G = 7\cdot04+0\cdot32.$$

Die Formeln geben

$$v_1 = 164 \cdot 2, \qquad P_1 = 1003\, kg,$$

der Versuch dagegen

$$v_1 = 173, \qquad P_1 = 1135\, kg.$$

Die Stauchvorrichtung ergab 1047, der Rodman-Apparat 1022 *km* Druck. Die Curve zeigt 393, die Formel 444 *kg* Mündungsdruck.

Bei größeren c-Werten wird v_1 bei constantem v_0 etwas größer, dagegen P_1 kleiner. Im allgemeinen ist die Anwendbarkeit der obigen Formeln beschränkt und können nur im Falle sehr langsamer Verbrennung mit Vortheil benützt werden. Es ist aber möglich, dass sie über den Einfluss eines größeren oder geringeren Verbrennungsraumes etwas näheres aussagen können.

In gleicher Weise lässt sich die Formel

$$P = \frac{cve^{nv}}{x+a}$$

behandeln.

§. 29.

Zu Anfang der Geschossbewegung hat bekanntlich der sich entwickelnde Gasdruck einen beträchtlichen Widerstand zu überwinden, der sich bei dem Einschneiden der Führungsringe und der Züge in das Geschoss und der damit eingeleiteten Rotation einstellt.

Die Aufzeichnungen der Geschossbewegung durch den Rücklaufmesser können die Größe dieses Widerstandes nicht zur Darstellung bringen, da hierbei nur die die translatorische Bewegung bewirkenden Kräfte ins Spiel treten. Der wirkliche Gasdruck ist also immer etwas größer, als der durch das Velocimeter ermittelte. Daher weichen dann auch die Angaben der an verschiedenen Stellen im Laderaume angebrachten Gasdruckmesser (Rodman- und Stauchapparat) nicht unerheblich von jenem errechneten Drucke ab, und man ist genöthigt, aus ihnen das Mittel zu nehmen.

Man kann nun annehmen, dass beim Beginne der Geschossbewegung ein gewisser Druck auch für die fortschreitende Bewegung vorhanden ist, den wir P_0 nennen wollen.

Es wird sich zeigen, dass die nachfolgende Druckgleichung

$$P = P_0 + A\left(1-\frac{x}{l}\right)^n \sqrt{\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)} \tag{66}$$

die Versuche ebenfalls gut wiedergibt. l bezeichnet den ganzen Geschossweg, also P_0 sowohl den Anfangs-, als auch den Mündungsdruck. Hierdurch erreichen wir es, dass ein schärferer Aufstieg zu Anfang der Bewegung in besserer Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen eingeleitet wird.

Das Druckmaximum liefert die Beziehung

$$\frac{x_1}{l} = \frac{1}{2n+2},$$

woraus

$$n = \frac{l}{2x_1} - 1.$$

Die Geschwindigkeit wird durch

$$v^2 = \frac{2r^2\pi g}{G}\left[P_0 x + 2Al\int_0^\varphi \cos\varphi^{2n+2}\sin\varphi^2 d\varphi\right]$$

ermittelt und es ist

$$\sin\varphi^2 = \frac{x}{l}.$$

Die Constante erhält man aus

$$P_1 = P_0 + A\frac{(2n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+2)^{n+1}},$$

so dass man hat

$$\left.\begin{aligned} P &= P_0 + \frac{(2n+2)^{n+1}}{(2n+1)^{n+1/2}}(P_1-P_0)\left(1-\frac{x}{l}\right)^n\sqrt{\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)},\\ v^2 &= \frac{2r^2\pi g l}{G}\Big[P_0\sin\varphi^2 + \\ &\quad + \frac{2(2n+2)_{n+1}}{(2n+1)^{n+1/2}}(P_1-P_0)\int_0^\varphi \cos\varphi^{2n+2}\sin\varphi^2 d\varphi\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Die Bestimmung der Mündungsgeschwindigkeit führt auf das Integral

$$2\int_0^1 (\cos \varphi^{2n+2} - \cos \varphi^{2n+4})\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2n+4}} \left[4(2n+2)_{(n+1)} - (2n+4)_{(n+2)}\right].$$

Die Binomialcoefficienten der letzten Klammer lassen sich in folgenden Ausdruck zusammenziehen:

$$4\,(2n+2)_{(n+1)} - (2n+4)_{(n+2)} = \frac{4(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots n.(n+1)(n+2)}. \qquad 68)$$

Die Mündungsgeschwindigkeit ist hiernach

$$v_0^2 = \frac{2r^2\pi g l}{G} \left[P_0 + \frac{\pi}{2^{n+1}} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}{1.2\ldots(n+2)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+1)^{n+1/2}} (P_1 - P_0)\right], \qquad 69)$$

und n wird durch

$$n = \frac{l}{2x_1} - 1$$

bestimmt.

Anwendung: Preußische $8 \cdot 8\, cm$ Kanone.

$G = 8 \cdot 135,\quad l = 1 \cdot 6,\quad x_1 = 0 \cdot 200,\quad P_1 = 1525,\quad P_0 = 485.$

Also ist

$$n = 3, \qquad A = 4694$$

und

$$v_0 = 456\, m \quad \text{(Versuch } 455\, m\text{)},$$

desgleichen

$l = 1 \cdot 58\, m,\ x_1 = 0 \cdot 197\, m,\ P_1 = 1705\, kg,\ P_0 = 330\, kg,\ n = 3.$

Es folgt

$$v_0 = 447\, m \quad \text{(Versuch } 446\text{)}.$$

Die theoretisch errechneten Mündungwerte stimmen mit den Versuchsdaten gut überein.

Man kann sich die Formeln für specielle Fälle vorher einrichten, da es genügt, das ungefähre Verhältnis zwischen dem ganzen Geschosswege l und der Strecke x_1 zu wissen.

Ist z. B. $\frac{l}{x_1} = 6$, so folgt $n = 2$, und man hat für jeden Wert von

$$\frac{x}{l} = \sin \varphi^2$$

die entsprechende Geschwindigkeitsformel

$$v^2 = \frac{2r^2\pi gl}{G}\Big[P_0 \sin\varphi^2 + 0\cdot06037\,(P_1 - P_0)\,\cdot$$
$$\cdot\left(5\varphi - \frac{5}{2}\sin 2\varphi \cos 2\varphi + \sin 2\varphi^3\left(\frac{8}{3} + \cos 2\varphi\right)\right)\Big]. \qquad 70)$$

Hieraus erhält man z. B. für den halben Geschossweg, also für

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2} = \sin\varphi^2, \qquad \varphi = 45^\circ$$

$$v_{\frac{1}{2}l} = \sqrt{\frac{2r^2\pi gl}{G}\left(\frac{P_0}{2} + 0\cdot398\,(P_1 - P_0)\right.}\cdot$$

Ist gegeben:

$G = 8\cdot135$, $2r = 8\cdot8$, $P_1 = 1130\,kg$, $P_0 = 360$, $l = 1\cdot58$,
$x_1 = 0\cdot260$, also n (circa) 2,

so folgt

$$v_{\frac{1}{2}l} = 335\,m,$$

und die Mündungsgeschwindigkeit wird für $n = 2$

$$v^2 = \frac{2r^2\pi gl}{G}\left(P_0 + 0\cdot4741\,(P_1 - P_0)\right),$$

$$v_0 = 409\,m \text{ (Versuch 408)},$$

während der Druck aus

$$P = P_0 + (P_1 - P_0).3\cdot8638\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\sqrt{\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}$$

folgt. So ist

$$P_{\frac{1}{2}l} = 742\,kg.$$

Diese Lösungen entsprechen, wie die Curven beweisen, den Thatsachen im ganzen gut.

Beträgt die Strecke x_1 $^1/_8$ des ganzen Geschossweges, so ist

$$n = \frac{l}{2x_1} - 1 = 3$$

und die Hauptformeln gehen über in

$$\frac{x}{l} = \sin\varphi^2,$$

$$v_0^2 = \frac{2r^2\pi gl}{G}[P_0 + 0\cdot 3877(P_1 - P_0)],$$

$$P = P_0 + 4\cdot 5135(P_1 - P_0)\left(1-\frac{x}{l}\right)^3\sqrt{\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)},$$

$$v^2 = 2r^2\pi gl\left(P_0\sin\varphi^2 + \left(\frac{8}{7}\right)^4\frac{\sqrt{7}}{32}(P_1 - P_0)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{7}{4}\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \frac{4}{3}\sin 2\varphi^3 - \frac{3}{32}\sin 8\varphi - \frac{\sin 2\varphi^5}{5}\right)\right).$$

Hieraus erhält man unter anderen auch das Verhältnis der Geschwindigkeiten nach halbem und ganzem Geschosswege

$$\frac{v_{\frac{1}{2}l}}{v_l} = \sqrt{\frac{0\cdot 1463P_0 + 0\cdot 3537P_1}{0\cdot 6123P_0 + 0\cdot 3877P_1}},$$

$$\frac{x_3}{l} = \frac{1+\sqrt{\frac{2n+1}{n}}}{2(n+1)}.$$

Auch der Fall $n = 4$, für welchen also $\frac{l}{x_1} = 10$, kann unter Umständen eintreten, und hiefür gelten die Ausdrücke

$$P = P_0 + 5\cdot 0805(P_1 - P_0)\left(1-\frac{x}{l}\right)^4\sqrt{\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)},$$

$$v_0^2 = \frac{2r^2\pi gl}{G}(P_0 + 0\cdot 3273(P_1 - P_0)).$$

Ebenso erhält man auf Grundlage der Hauptformeln für $n = 3^1/_2$, also

$$\frac{l}{x_1} = 9, \quad \frac{x}{l} = \sin\varphi^2,$$

$$P = P_0 + 3.\left(\frac{9}{8}\right)^4 (P_1 - P_0)\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{3\cdot 5} \sqrt{\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)},$$

$$v^2 = \frac{2r^2\pi gl}{G}\left(P_0 \sin\varphi^2 + 6\left(\frac{9}{8}\right)^4 (P_1 - P_0).\right.$$

$$\left.\left[\frac{1}{3}\sin\varphi^3 - \frac{4}{5}\sin\varphi^5 + \frac{6}{7}\sin\varphi^7 - \frac{4}{9}\sin\varphi^9 + \frac{1}{11}\sin\varphi^{11}\right]\right),$$

woraus

$$\frac{v_{\frac{1}{2}l}}{v_l} = \sqrt{\frac{0\cdot 168 P_0 + 0\cdot 332 P_1}{0\cdot 645 P_0 + 0\cdot 355 P_1}}.$$

Die allgemeine Formel für ungerade $\frac{l}{x_1}$, also für $n = 2^1/_2$, $3^1/_3$, $4^1/_2$ etc., lautet

$$v_0^2 = \frac{2r^2\pi gl}{G}\left(P_0 + \frac{2(2n+2)^{n+1}}{(2n+1)^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2.4\ldots(2n+1)}{1.3\ldots(2n+4)} \cdot (P_1 - P_0)\right).$$

Für $n = 3^1/_2$ oder $\frac{l}{x_1} = 9$ ist z. B.

$$v_0^2 = \frac{2r^2\pi gl}{G}\left(P_0 + \frac{2187}{6160}(P_1 - P_0)\right).$$

Der Ort des Wendepunktes ergibt sich aus

$$\frac{x_3}{l} = \frac{1 + \sqrt{\frac{2n+1}{n}}}{2(n+1)}, \qquad 71)$$

$$\frac{x_3}{x_1} = 1 + \sqrt{2 + \frac{1}{n}}$$

oder

$$\frac{x_3}{x_1} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{1 - \frac{2x_1}{l}}}.$$

Ist z. B. $\frac{l}{x_1} = 8$, also $n = 3$, so folgt

$$\frac{x_3}{l} = 0\cdot316 \quad \text{oder} \quad \frac{x_3}{x_1} = 2\cdot527.$$

§. 30.

Das günstigste Druckverhältnis $\frac{P_1}{P_m}$ lässt sich aus den obigen Hauptformeln wie folgt ermitteln.

Es ist nach 69)

$$P_1 = P_0 + \left(\frac{Gv_0^2}{2r^2\pi gl} - P_0\right) \frac{2^{n+1}\,1.2.3\ldots(n+2)(2n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{\pi(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)(n+1)^{n+1}}. \qquad 72)$$

Wie man sieht, stellt sich der höchste Gasdruck als Function von P_0, l, v_0 und n dar. Wir haben also dasjenige n zu nehmen, das den Ausdruck zur Rechten zu einem Minimum macht. Der von n allein abhängige Ausdruck erhält für $n = 0, 1, 2, 3$ die Werte

$$4; \quad 3\sqrt{3}, \quad \frac{80}{27}\sqrt{5}, \quad \frac{49}{16}\sqrt{7}.$$

Daher ist $n = 0$ zu nehmen und man findet als Bedingung des Druckminimums

$$P_1 = P_0 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{Gv_0^2}{2r^2\pi gl} - P_0\right), \qquad 73)$$

oder durch Einführung des mittleren Gasdruckes

$$\left.\begin{aligned} P_m &= \frac{Gv_0^2}{2gr^2\pi l}, \\ \frac{P_1}{P_m} &= \frac{4}{\pi} - \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)\frac{P_0}{P_m} = \frac{4/\pi}{1 + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)\frac{P_0}{P_1}}. \end{aligned}\right\} \qquad 74)$$

Dies günstigste Verhältnis findet in der Mitte des Geschossweges $x_1 = \frac{1}{2}\,l$ statt, was mit den früheren Bestimmungen harmoniert, und es ist unter Benützung des obigen ersten Beispieles

$$\frac{P_1}{P_m} = \frac{4}{\pi} - \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)\frac{485}{886} = 1 \cdot 123.$$

Hiernach ist der günstigste Gasdruck ungefähr $^1/_8$ größer als der mittlere. Es ist hiermit theoretisch der Nachweis geführt, dass die Verlegung des Maximaldruckes in die Mitte des Rohres für dieses und die Geschossarbeit das beste ist.

Wir wenden die Hauptgleichungen noch auf folgenden Versuch an.

Preußischer langer 15 *cm* Mörser.

$$G = 41\,kg,\ \ L = 0 \cdot 65\,kg,\ \ P_1 = 1385,\ \ P_0 = 200,\ \ x_1 = 0 \cdot 100.$$
$$l = 1 \cdot 17.$$

Es ist für $x_1 = 0 \cdot 098$

$$\frac{l}{x_1} = 12, \quad \text{also} \quad n = 5.$$

Da nun $r^2\pi = 180 \cdot 8\, cm^2$, so erhalten wir

$$v_1^2 = 101 \cdot 2[P_0 + 0 \cdot 283(P_1 - P_0)],$$

also

$$v_0 = 232\, m \quad \text{(Versuch } 230\, m\text{)},$$

desgleichen für $x_1 = 0 \cdot 098\, m$

$$P_1 = 910, \qquad P_0 = 125, \qquad L = 0 \cdot 60,$$

folgt

$$v_0 = 204 \cdot 8.$$

Wir haben bisher die Aufstellung von Gasdruckformeln lediglich um ihrer selbst und der daraus resultierenden Bewegungsverhältnisse willen als nächsten Zweck verfolgt. Wir werden später erkennen, dass bei Berechnung der Wärmewirkungen und der Widerstände im Rohre die Form der verschiedenen Gasdruckformeln von wesentlicher Bedeutung ist für eine erfolgreiche und klar übersichtliche Bearbeitung des Gegenstandes. Nicht alle eignen sich in gleicher Weise zur Grundlage für verwickelte Verhältnisse, und man muss eine gewisse Auswahl treffen, wenn man eines befriedigenden Erfolges sicher sein will. Wir werden also im folgenden unser Augenmerk auf solche Gleichungsformen zu richten haben, die

keine weiteren rechnerischen Schwierigkeiten auch in Verbindung mit neuen und complicierten Bewegungsfactoren verursachen, die vielmehr die gewünschte Einfachheit der Resultate mit herbeiführen helfen, die Bedingung ist für erfolgreichen weiteren Fortschritt. Dabei zeigt sich hier wie auch bei anderen Verhältnissen, dass mit größerer Einfachheit oft eine größere Genauigkeit verknüpft ist. Wir werden suchen, diese beiden wertvollen Eigenschaften in unseren Formeln zu vereinigen.

§. 31.

Der Verlauf der Gasdruckcurven lässt voraussehen, dass sie bei unendlich langen Geschützrohren sich asymptotisch der Druckaxe nähern werden. Die nachfolgende Gleichung gibt diesen Gang der Curven hinreichend genau wieder.

$$P = P_1 \left(\frac{x}{x_1}\right)^m e^{\rho m \left[1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]}. \qquad 75)$$

Bei $x = x_1$ tritt das Druckmaximum P_1 ein und bei $x = \infty$ ist $P = 0$. Die Wendepunkte ergeben sich aus

$$x = x_1 \left[1 - \frac{1 \mp \sqrt{1 + \frac{4m\rho}{(\rho-1)^2}}}{\frac{2m\rho}{\rho-1}}\right]^\rho, \qquad 76)$$

und es sind deren zwei, wenn $m > 1$. Wir werden stets $m < 1$ setzen, da alsdann die Curve senkrecht zur x-Axe aufsteigt und auch die Zeitintegrale endlich bleiben. Vermöge der Formel

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Pr^2\pi}{G/g}$$

erhält man das Geschwindigkeitsintegral

$$v^2 = \frac{2r^2\pi g}{G} P_1 x_1 \int \left(\frac{x}{x_1}\right)^m e^{\rho m \left[1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]} d\left(\frac{x}{x_1}\right).$$

Zur Vereinfachung der Integration führen wir die Bedingung ein

$$mp+p-1=i \qquad 77)$$

und substituieren

$$z=pm\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Es folgt dann, wenn i eine ganze Zahl ist:

$$\left.\begin{aligned} v &= V\sqrt{1-\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\ldots\frac{z^i}{i!}\right)e^{-z}}\,, \\ V &= \sqrt{\frac{2r^2\pi g P_1 x_1 e^{pm}\,1.2.3\ldots(i-1)i}{G\ m(pm)^i}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad 78)$$

Der Ausdruck V hat eine leicht angebbare Bedeutung. Er bezeichnet die Endgeschwindigkeit bei einem unendlich langen Rohre. Wir führen diese asymptotische Größe zur Bequemlichkeit der Rechnung ein. Die Werte m, p, i sind den Versuchen gemäß zu bestimmen. Das Zeitintegral ist

$$t=\frac{px_1}{(mp)^p V}\int\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{1-\left(1+z+\frac{z^2}{2}\ldots\frac{z^i}{i!}\right)e^{-z}}}, \qquad 79)$$

und muss in Reihenform dargestellt werden.

Specialfälle:

$$i=1, \text{ also } mp+p=2.$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{2r^2\pi g P_1 x_1 e^{pm}}{Gpm^2}}, \qquad v=V\sqrt{1-\frac{1+z}{e^z}}, \\ z &= pm\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{p}}, \\ t &= \frac{p\sqrt{2}\,x_1 z^{p-1}}{(p-1)(pm)^p V}\left[1-\frac{p-1}{3p}z+\frac{p-1}{24(p+1)}z^2+\right. \\ &\qquad \left.+\frac{p-1}{1080(p+2)}z^3+\ldots\right]. \end{aligned}\right\} \qquad 80)$$

Ferner:

$$i = 2, \qquad m\rho + \rho = 3.$$

$$V = \sqrt{\frac{4r^2 \pi g P_1 x_1 e^{\rho m}}{G\rho^2 m^3}}, \qquad v = V\sqrt{1 - \frac{1+z+\frac{z^2}{2}}{e^z}},$$

$$t = \frac{\rho\sqrt{6}\, x_1 z^{\rho-\frac{3}{2}}}{\left(\rho - \frac{3}{2}\right)(m\rho)^\rho V}\left[1 + \frac{3}{8}\frac{\rho - {}^3/_2}{\rho - {}^1/_2} z + \frac{39}{640}\frac{\rho - {}^3/_2}{\rho + {}^1/_2} z^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{73}{15360}\frac{\rho - {}^3/_2}{\rho + {}^3/_2} z^3 + \ldots\right]$$

Über m und ρ kann man insoferne willkürlich verfügen, als die Bedingungsgleichung zwischen ihnen gewahrt bleibt.

Da wir $m < 1$ annehmen, um, wie aus dem Differentialquotienten

$$\frac{dP}{dx} = \frac{mP_1}{x_1}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{m-1} e^{\rho m\left(1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)}\left[1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right] \qquad 81)$$

hervorgeht, gleich beim Beginne der Bewegung einen senkrechten Aufstieg der Curve zu erzielen, so muss immer

$$\frac{i+1-\rho}{\rho} < 1$$

sein. Wenn also $i = 1$, muss $\rho > 1$, und wenn $i = 2$, muss $\rho > {}^3/_2$ sein.

Theoretisch ist hiemit das Wesentliche erledigt. Man bemerke noch die Beziehung

$$\frac{Pr^2 \pi x}{v^2} =$$

$$= \frac{G(m+1)}{2g\left[1 + \frac{z}{2+i} + \frac{z^2}{(2+i)(3+i)} + \frac{z^3}{(2+i)(3+i)(4+i)} \ldots\right]}. \qquad 82)$$

Anwendung der Gleichungen

$$(i = 1, \; m = {}^1/_2, \; \rho = {}^4/_3).$$

8·8 *cm* preußische Feldkanone C./73.

$G = 8\cdot 135, \quad L = 0\cdot 76\,kg$ G. Bl. P., $\quad a = 0\cdot 267, \quad P_1 = 1990,$
$x_1 = 0\cdot 145^{+20}_{-15}, \quad x = 1\cdot 586.$

Die Gleichungen liefern zunächst

$$z = 4\cdot 0267, \qquad V = 497\cdot 2\,m,$$

also

	v_0	t_1	t	P_0
Theorie	474	0·00262	0·00648	229
Versuch	472	0·00266	0·00650	390

Die t-Werte folgen aus

$$t = 6\sqrt{2}\,.\,\frac{x_1}{V}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1/4}\left[1 + \frac{1}{18}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{3/4} + \frac{1}{378}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{6/4} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{36450}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{9/4} + \ldots\right]. \quad 83)$$

Der Vergleich beider Resultate zeigt eine fast vollständige Übereinstimmung zwischen den beiderseitigen M. G. und den Geschosszeiten, dagegen eine starke Abweichung in den Mündungsgasdrucken.

Diese Abweichung ist in den unvermeidlichen Unterschieden zwischen den theoretischen und den Versuchscurven begründet, die durch genauere Bestimmung der Parameter (mp) zwar vermindert, niemals aber ganz beseitigt werden können. Die Versuchsresultate sind eben mehr oder weniger individuell. Da ferner der Ort des höchsten Gasdruckes oft sehr schwer anzugeben ist, da die P-Curve zuweilen hier der x-Axe streckenweise nahezu parallel läuft, so ist selbst das Mittel aus verschiedenen Versuchen zuweilen noch mit Ungenauigkeiten behaftet. In vorliegender Rechnung lag als Mittelwert $x = 0\cdot 145$ zugrunde, und zwar als Mittel zwischen 35^{+20}_{-15}. Die Annahme $x_1 = 0\cdot 170\,m$ liefert

$$\frac{x}{x_1} = 9, \qquad V = 538\cdot 32$$

und

$$v_0 = 499, \quad t_1 = 0\cdot 00283, \quad t = 0\cdot 00633, \quad P_0 = 364.$$

Durch die Verlegung des Ortes des höchsten Gasdruckes um 25 *mm* nach vorne ist also der Mündungsdruck um 135 Einheiten gewachsen. Damit ist aber auch die Mündungsgeschwindigkeit beträchtlich in die Höhe gegangen, während die Zeiten sich nicht besonders geändert haben. Sind die Versuchsresultate durchaus genau, so erklärt sich die theilweise Übereinstimmung und Abweichung zwischen den beiden Werten daraus, dass die P-Curve zuweilen über, zuweilen unter der Versuchscurve hinweggeht, deren Ausgleich gleiche Geschwindigkeiten liefert. Bemerkenswert ist die aus der obigen Rechnung fließende Folgerung, dass die Verlegung des höchsten Druckes nach vorne eine Vermehrung der Mündungsgeschwindigkeit mit sich führt.

Wir geben ein weiteres Beispiel für dieselbe Kanone.

$$G = 8\cdot 135, \quad L = 0\cdot 58 \text{ G. Bl. P.}, \quad x_1 = 0\cdot 165 + 70 \pm 35,$$
$$x = 1\cdot 618, \quad P_1 = 1290, \quad m \quad {}^1/_2, \quad \rho = {}^4/_3.$$

Gesucht: V, v_0, t_1, t, P_0.

Die Rechnung und der Versuch liefern $V = 427$, also

	v_0	t_1	t	P_0
Rechnung	401	0·0035	0·00808	196
Versuch	402	0·00348	0·00799	250

Um den Druck im Wendepunkte zu bestimmen, setzen wir den betreffenden x_2-Wert in die Druckgleichung und erhalten

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= P_1(1+\sigma)^{m\rho} e^{-m\rho\sigma}, \\ \sigma &= \frac{\sqrt{1+\frac{4m\rho}{(\rho-1)^2}}-1}{\frac{2m\rho}{\rho-1}}, \\ x_2 &= x_1(1+\sigma)^\rho. \end{aligned}\right\} \quad 84)$$

Im vorliegenden Falle ist

$$m = \frac{1}{2}, \quad \rho = \frac{4}{3}, \quad \sigma = 1$$

und daher

$$x_2 = 2^{3/2} . x_1 = 2 \cdot 88 x_1, \qquad P_2 = \frac{1290}{\left(\frac{1}{2} e\right)^{2/3}} = 1051,$$

was mit dem Versuchswerte übereinstimmt.

Die Constanten mpi lassen eine gewisse Beweglichkeit der Formeln zu, die es ermöglicht, die theoretischen Curven den Versuchswerten nahe anzuschmiegen. Bei größeren ρ-Werten nimmt auch P und v zu. Wählen wir z. B. $i = 2$, $m = {}^2/_3$, also $\rho = {}^9/_5$, so erhält man für die Data:

$$G = 8 \cdot 135, \quad L = 0 \cdot 70, \quad x_1 = 0 \cdot 123, \quad P_1 = 1890, \quad x = 1 \cdot 615$$

die entsprechenden Werte:

$$V = 490\, m$$

und damit

$$v_0 = 459 \cdot 2 \quad \text{(Versuch 458).}$$

Dieselben Constanten stehen in Abhängigkeit oder in Function der Verbrennungsweise der verschiedenen Pulverarten, mit deren Verhalten sie wachsen oder abnehmen.

Aus der Form der Gasdruckgleichung erkennt man schon sogleich, dass sie gegenüber den früher aufgestellten verschiedene Vorzüge besitzt, wovon die wichtigere die ist, dass sie den unendlich abnehmenden Druck zur Darstellung zu bringen vermag, was für Geschütze von beliebiger Länge von wesentlicher Bedeutung ist. Indem sie außerdem auch rechnerisch einigermaßen entlastet, wird sie uns für das folgende von großem Nutzen sein.

Es darf hier allerdings nicht unterlassen werden, wiederholt darauf hinzuweisen, dass alle gemessenen Gasdruckcurven etwas individuelles an sich haben, das keine Formel wiederzugeben vermag und uns nöthigt, eine Menge Parameter in die Gleichungen einzuführen, um formell wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Curven gerecht werden zu können. Die Pulververbrennung geht eben nicht in der mathematisch genauen Gesetzmäßigkeit vor sich, wie sie eigentlich Bedingung wäre, und man muss deshalb bei der Wahl der unterzulegenden Versuchsresultate die von Störungseinflüssen irgendwelcher Art

verunstalteten Curvenelemente entweder ausscheiden oder modificieren.

§. 32.

Wir wollen auch bei der vorliegenden Curve das günstigste Druckverhältnis P_1/P_m ermitteln, um festzustellen, inwieweit die Resultate mit den früheren übereinstimmen.

Wie wir schon bemerkt haben, liegt es im Interesse des Rohres, das genannte Verhältnis möglichst klein zu halten. In dieser Hinsicht haben die langsam verbrennenden Treibmittel vor den rasch verbrennenden den Vorzug eines kleineren Druckmaximums. Das ideale Verhältnis 1 : 1, das eine gleichmäßige Beanspruchung des Rohr- und Geschossmateriales bedingen würde, kann nicht in ganzer Ausdehnung erreicht werden. Wir fanden

$$\frac{Gv^2}{2g} = r^2\pi P_1 \cdot \int \left(\frac{x}{x_1}\right)^m e^{\rho m \left[1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]} dx,$$

$$\frac{Gv^2}{2g} = r^2\pi P_m x.$$

Hieraus folgt

$$\frac{P_1}{P_m} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho m}{e}\right)^{m\rho} \frac{z}{\int z^i e^{-z} dz}, \qquad z = \rho m \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Das Minimum verlangt die Bedingung

$$z^{1+i} e^{-z} = \rho \int z^i e^{-z} dz$$

und integriert

$$\frac{z^{1+i} e^{-z}}{\rho i!} = 1 - \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots \frac{z^i}{i!}\right) e^{-z}.$$

Wählen wir wieder $i = 1$, so resultiert

$$1 + z + \frac{1}{\rho} z^2 = e^z,$$

woraus, wenn kurz $z = 1$ genommen wird, die Werte

$$\rho = \frac{1}{e-2} = 1 \cdot 392, \qquad m = 2e - 5 = 0 \cdot 436$$

folgen.

Damit erhalten wir als Ort des kleinsten Druckmaximums

$$x = x_1 \left(\frac{e-2}{2e-5}\right)^{\frac{1}{e-2}} = 2x_1 \tag{85}$$

oder

$$x_1 = \frac{1}{2} x.$$

Das Minimum liegt also in der Mitte des Geschossweges. Das Verhältnis selbst ist

$$\frac{P_1}{P_m} = \frac{\left(\frac{\rho m}{e}\right)^{m\rho}}{z^{m\rho} e^{-z}}, \quad \text{also} = e\left(\frac{2e-5}{e(e-2)}\right)^{\frac{2e-5}{e-2}} = 1 \cdot 1094. \tag{86}$$

Bei Einführung der früheren Werte $m = 1/_2$, $\rho = 4/_3$ würde folgen

$$z = 1 \cdot 11, \quad \frac{x}{x_1} = 1 \cdot 973 \quad \text{oder} \quad x_1 = 0 \cdot 506 x,$$

$$P_1 / P_m = 1 \cdot 1098,$$

die ebenfalls das frühere Resultat mit großer Annäherung bestätigen.

Die allgemeine Gleichung der Druckcurve liefert in ihren Integrationen Formeln, die, wie man bemerkt haben wird, mit den Gamma-Functionen zusammenhängen. Bemerkenswert für die späteren Drallberechnungen ist der Fall $i = 0$, also

$$\rho(m+1) = 1.$$

Die entsprechenden Gleichungen hierfür sind

$$\left.\begin{aligned} & P = P_1 z^m e^{\frac{m}{m+1}(1-z^{m+1})}, \quad z = \frac{x}{x_1}, \\ & V = \sqrt{\frac{2r^2 \pi g P_1 x_1 e^{\frac{m}{m+1}}}{Gm}}, \quad v = V\sqrt{1-e^{-\frac{m}{m+1} z^{m+1}}}, \\ & t = \frac{x_1 z^{\frac{1-m}{2}}}{V} \sqrt{\frac{m+1}{m}} \left(\frac{2}{1-m} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+1} \frac{z^{m+1}}{m+3} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{48} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \frac{z^{2m+2}}{3m+5} - \frac{1}{192} \left(\frac{m}{m+1}\right)^3 \frac{z^{3m+3}}{5m+7} - \frac{1}{5120} \text{ etc.}\right) \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Beispiel: 8·8 *cm* Kanone.

$$G = 8 \cdot 135, \quad L = 0 \cdot 64, \quad r^2\pi = 62 \cdot 9,$$

P_1 nach dem Rodman-, Stauch- und dem Rücklaufapparate beziehungsweise 1213, 1271, 1360 At. Wir wählen

$$P_1 = 1300\,kg, \quad G = 8 \cdot 135 + 0 \cdot 32, \quad x_1 = 0 \cdot 200, \quad x/x_1 = 8,$$

also $x = 1 \cdot 6\,m$.

Die Annahme $m = {}^1/_5$ liefert

$$P_0 = 309 \text{ (gem. } 310\,kg), \quad V = 473 \cdot 4, \quad v_0 = 415 \text{ (gem. } 415)\,m.$$

Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch ist befriedigend. Die Zeitformel liefert etwas kleinere Werte, als der Versuch, der allerdings Differenzen bis zu 10 Einheiten aufweist.

Man bemerke noch das bekannte Verhältnis zwischen dem mittleren und dem höchsten Drucke

$$\frac{P_m}{P_1} = \frac{e^{\frac{m}{1+m}}}{m} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{m}{1+m} z^{m+1}}}{z}, \tag{88}$$

dessen Minimum nahe bei $x_1 = \frac{1}{2} x$ liegt.

Wir geben noch P in Function von v.

$$P = P_1 \left(\frac{1+m}{m} \cdot e\right)^{\frac{m}{1+m}} \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{v^2}{V^1} + \frac{1}{2}\frac{v^4}{V^4} + \frac{1}{3}\frac{v^6}{V^6} + \ldots\right)^{\frac{m}{1+m}} \tag{89}$$

(vergl. §. 28).

§. 33.

Wir haben in den bisherigen Druckgleichungen meist die Form $P = f(x)$ bevorzugt. Es liegt nahe, den Druck in Function der Zeit darzustellen, wie dies schon durch v. Wuich in seinem »Beitrag zur Theorie der Gasspannungsmesser« (Mitth. über Art. und Gen., 27, 1—27) mittels der Form $p = p_0 e^{\alpha P_1 t}$, und von Vallier in: »Sur la loi des pressions dans les bouches à feu«

mittels der Gleichung $P = ate^{-bt}$ geschehen ist. Ein Referat über die letztere Abhandlung liefert Heydenreich in der »Kriegstechn. Zeitschrift«, Berlin 1900, S. 287 ff.).

Die Anwendung dieser und der daraus resultierenden Gleichungen geben zwar in einzelnen Fällen brauchbare Resultate, zeigen indessen im allgemeinen nicht die wünschenswerte Übereinstimmung mit den Versuchsresultaten. Der Grund liegt darin, dass die theoretische Curve nicht immer den steilen Abfall der Versuchscurve wiedergeben kann, an welchem Mangel zum Theile auch unsere Formeln leiden. Hierzu kommt noch, dass die Vallier'sche Formel im aufsteigenden Aste der Curve einen Wendepunkt hat, während die Versuche dies durchaus nicht immer zu erkennen geben. Einen solchen besitzt auch die durch

$$P = \frac{At^n e^{-ct}}{t+a} \qquad 90)$$

charakterisierte Druckcurve. Aus der Bedingung des Maximums resultiert hieraus die Gleichung

$$(n-ct_1)(a+t_1) = t_1,$$

aus welcher, wenn über n und a verfügt worden ist, c berechnet werden kann. Daher ist

$$\frac{P}{P_1} = \frac{t_1+a}{t+a}\left(\frac{t}{t_1}\right)^n e^{-\left(n-\frac{t_1}{t_1+a}\right)\frac{t-t_1}{t_1}}. \qquad 91)$$

In Anwendung auf die Krupp'sche $7 \cdot 5\,cm$ Schnellladekanone L./30 (siehe die Tafel, Fig. 2), wo

$$G = 6 \cdot 35, \quad L = 0 \cdot 55\,kg, \quad l = 1 \cdot 805\,m, \quad r^2\pi = 45 \cdot 52\,cm^2,$$

führt die Annahme $n = 2$, $a = 0 \cdot 0025$ auf die Druckcurve

$$P = P_1 \frac{0 \cdot 0045}{t+0 \cdot 0025} e^{-\frac{14}{9}\frac{t-0 \cdot 0020}{0 \cdot 0020}}, \qquad t_1 = 0 \cdot 0020.$$

Für $P_1 = 1800$ At. $= 1860\,kg$ und $t = 0 \cdot 0060''$ erhält man hieraus $P_0 = 382$ At., was mit dem Versuch (380) gut übereinstimmt.

Die Geschwindigkeitsformel

$$v = \frac{r^2 \pi g}{G} \int P dt \qquad \frac{t}{t_1} = z$$

liefert mit Hilfe von Quadraturen den Wert

$$v = 2836 \int_0^z \frac{z^2 e^{-\frac{14}{9} z} dz}{z + 1 \cdot 25} = 495 \qquad \text{(Versuch 490).}$$

Die wirkliche und die theoretische Arbeitsfläche sind also fast einander gleich. Die weiteren Integrationen übergehen wir, doch möge noch die Formel für V bei unendlich langem Rohre bemerkt werden.

$$V = \frac{Ar^2 \pi g a}{Gc} \left(\frac{1}{ac} - \frac{1}{ac+1} + \frac{1}{(ac+1)(ac+2)} - \frac{2}{(ac+1)(ac+2)(ac+3)} + \dots \right). \qquad 92)$$

Sie liefert $V = 523\ m$.

Die nachstehende Übersicht

	t					
	0·0005	0·0010	0·0020	0·0030	0·0040	0·0060
P (Versuch)..	1080	1500	1800	1300	780	380
P (Formel)...	542	1260	1800	1573	1036	382

zeigt deutlich den Verlauf und die Abweichung beider Druckcurven von einander nebst der Thatsache, dass die theoretische Curve einen Wendepunkt hat, der der Versuchscurve fehlt. Daher muss auch des geringeren Druckes wegen der errechnete v_1-Wert von 166 m kleiner, als der wirkliche (200 m) sein. Die Folge davon ist ein kleineres x_1, so dass also das Druckmaximum dem Anfangspunkte näher steht. Da im absteigenden Ast die errechneten Druckwerte größer sind, so gleichen sich die Geschwindigkeitsdissonanzen des ersten Theiles im zweiten wieder aus.

§. 34.

Vielleicht dürfte die folgende Druckcurve in Function der Zeit, deren weiterer Verlauf erlöschende Wellenzüge liefert,

nämlich

$$P = Ae^{-nt}\sin\beta t, \qquad n = \beta \operatorname{cotg}\beta t_1,$$

bei welcher im aufsteigenden Aste kein Wendepunkt vorkommt, einiger Aufmerksamkeit wert sein, da sie alle Integrationen zulässt. Das einzig lästige bei solchen Gleichungen ist die Bestimmung der Constanten. Die obige Formel, deren Ausdehnung natürlich beschränkt ist ($\beta t < \pi$), da sonst die Geschwindigkeit abnimmt, liefert die folgenden Ausdrücke für die Geschwindigkeit und den Geschossweg:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{P_1 r^2 \pi g}{G\beta} e^{nt_1}(\sin\beta t_1 - e^{-nt}\sin\beta(t_1+t)), \\ x &= \frac{P_1 r^2 \pi g}{G\beta^2} \sin\beta t_1\, e^{nt_1}(\beta t - \sin 2\beta t_1 + e^{-nt}\sin\beta(2t_1+t)). \end{aligned}\right\} \quad 93)$$

Wiewohl diese Gleichungen etwas weitläufige Berechnungen beanspruchen, wollen wir doch des Vergleiches halber ein Rechenexempel durchführen.

Wir wählen wieder das vorherige Beispiel und bemerken vorab, dass der Wendepunkt dieser Curve im absteigenden Ast liegt und vom Geschosse, d. h. Geschossboden in dem Moment erreicht wird, wenn die Zeit $t = 2t_1$ verflossen ist. Diese Zeit ist also doppelt so lang, als die Zeit bis zum Druckmaximum.

Indem wir also setzen

$$t_1 = 0\cdot 0020, \quad t_0 = 0\cdot 0060, \quad P_1 = 1800 \text{ At.} = 1860\, kg,$$
$$G = 6\cdot 35\, kg, \quad L = 0\cdot 55\, kg,$$

erhalten wir aus

$$\frac{P}{P_1} = e^{-n(t-t_1)}\frac{\sin\beta t}{\sin\beta t_1} \qquad 94)$$

unter der Annahme $\beta = 400$, woraus $n = 388$, die nachstehenden Werte:

$$t_1 = 0\cdot 0020 | P_1 = 1800 | v_1 = 182\cdot 4 \qquad x_1 = 0\cdot 149,$$
$$t = 0\cdot 0060 | P_0 = 357 | v_0 = 511\cdot 8 \qquad x = 1\cdot 687,$$

die für den Fall, dass $G+\frac{1}{2}L$ anstatt G gesetzt wird, die entsprechenden Geschwindigkeiten

$$v_1 = 174\cdot 8, \qquad v_0 = 490\,m$$

liefern, welch letztere mit dem Versuche übereinstimmt.

Eine genauere Bestimmung der Constanten dürfte wahrscheinlich bessere Resultate bringen, wiewohl eine vollständige Congruenz zwischen Beobachtung und Formel aus mancherlei Gründen ausgeschlossen ist.

Die vorstehenden Formeln lassen sich übrigens noch leicht um einige vermehren. Hierzu geben auch verschiedene der von uns mitgetheilten Veranlassung.

So z. B. Formel 89), die erkennen lässt, dass auch eine Druckfunction von der Form

$$P = A\left(\frac{v}{V}\right)^m\left(1-\left(\frac{v}{V}\right)^n\right)$$

mit Vortheil eingeführt werden kann. Die Ausführung würde aber hier zu weit führen.

Auch die Function

$$P = a\,\frac{1-e^{-nx}}{-b+e^{nx}}$$

leistet unter Umständen gute Dienste. Man kann setzen

$$P_0 = ae^{-nl}.$$

Da die Ausführungen leicht sind, so stellen wir die Lösungen für einen speciellen Fall hier zusammen:

$G = 6\cdot 35\,kg,\quad r^2\pi = 45\cdot 42\,cm^2,\quad P_1 = 1800\,kg,\quad x_1 = 0\cdot 200,$
$l = 1\cdot 8\,m,\quad P_0 = 300\,kg,\quad a = 1000,\quad b = 0\cdot 915,\quad n = {}^1/_{780},$

also allgemein

$$P = 3000\,\frac{1-e^{-\frac{x}{780}}}{-0\cdot 915+e^{\frac{x}{780}}}$$

und endlich

$$v_0 = 494 \quad (\text{Versuch } 490\,m).$$

§. 35.

Kurz nach der eingeleiteten Vergasung ist die Zunahme des Gasdruckes sehr groß. Die Kenntnis dieser Zunahme und ihres größten Wertes ist von großem Interesse, da die Stabilität des Rohres davon abhängt. Wir haben also das Verhältnis dP/dt zu bilden und den größten Wert davon festzustellen. Es ist

$$\frac{dP}{dt} = \frac{mPv}{x}\left(1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right). \qquad 95)$$

Hienach ist die Zunahme des Druckes dem Drucke selbst, der Geschossgeschwindigkeit direct, dem Geschosswege nahe umgekehrt proportional. Beträgt z. B. in einem beliebigen Momente der Bewegung $P = 1000\,kg$, $v = 66\,m$, $x = \frac{1}{3}x_1 = 0{\cdot}050\,m$, so ist für $m = {}^1/_2$, $\rho = {}^4/_3$,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1000.66}{0{\cdot}050}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{3/4}\right) =$$
$$= 370.000\,kg = 370 \text{ Metertonnen pro Secunde.}$$

Die Differentiation des obigen Ausdruckes liefert das Maximum der Druckentwickelung. Am schnellsten wird dies ermittelt, wenn man die Formeln 15) zugrunde legt.

Bezüglich des weiteren Antriebes der Geschossbewegung vor der Mündung durch die nachdringenden Pulvergase verweisen wir auf §. 5, wo die betreffenden Bewegungszustände behandelt sind. Ihre Grundlage beruht auf der Annahme $dP/dx = -nP$, wonach die Abnahme des Druckes diesem proportional ist.

§. 36.

In Beziehung zu Formel 95) steht die Bestimmung der Verbrennungsgeschwindigkeit des Pulvers. Dieselbe ist von der Art und der Form der Pulverkörner in besonderem Grade abhängig und verlangt wegen der Wichtigkeit dieses Processes für das ganze System eine besondere Aufmerksamkeit seitens der technischen Versuchsanstalten. Man findet die

Berichte über diese wichtigen und kostspieligen Versuche in den von Zeit zu Zeit veröffentlichten Publicationen dieser Anstalten.

Entzündung und Verbrennung ist bekanntlich nicht dasselbe. Die Entzündung kann sich sehr rasch durch die gesammte Pulverladung verbreiten, während die Verbrennung der einzelnen Körner ein Vorgang für sich ist, der sich in ganz normaler Weise abspielt und nach einer bestimmten Zeit beendet ist. Die Erforschung und Regelung dieses Processes liegt den Explosionstechnikern ob.

Die Grundlage der Berechnung der Pulververbrennung liefert die Gleichung

$$\frac{L_y}{L} = \frac{P\frac{x}{a}}{f\Delta-(1-\alpha\Delta)P},$$

worin Δ die Ladedichte $\frac{10L}{r^2\pi a}$ bezeichnet (a in Metern, $r^2\pi$ in Quadratcentimetern).

Die Differentiierung führt schließlich auf folgenden Ausdruck

$$\frac{dL_y}{dt} = \frac{LPv}{a} f\Delta \frac{1-\frac{(1-\alpha\Delta)P}{f\Delta}+m\left(1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}{(f\Delta-(1-\alpha\Delta)P)^2}. \qquad 96)$$

Die Verbrennungsgeschwindigkeit ist also dem Gasdrucke und der Geschossgeschwindigkeit nahezu proportional, wächst also mit diesen wie mit der Kraft des Sprengstoffes f. Das zusammengesetzte zweite Glied des obigen Ausdruckes gibt an, wie im Verlaufe der Bewegung diese Verhältnisse sich verändern.

Haben die einzelnen Pulverkörner die Dicke e, so können wir, da das Pulver in parallelen Schichten abbrennt, die lineare Verbrennungsgeschwindigkeit mit de/dt bezeichnen, und multiplicieren wir dieselbe mit der jeweiligen, mit der Zeit veränderlichen Gesammtoberfläche ω (Emissionsfläche), so erhalten wir das entsprechende verbrannte Pulverquantum pro Secunde, wenn wir dL/dt durch das specifische Gewicht s der Ladung dividieren. Daher ist

$$\frac{\omega de}{dt} = \frac{dL_y}{sdt}. \qquad 97)$$

Da L in kg angenommen ist, so gilt die Beziehung

$$\frac{\omega de}{dt} = \frac{1000}{s} \frac{dL_y}{dt}. \qquad 98)$$

Wird nun auch die Emissionsfläche, der die Vergasungsstoffe entströmen, in Quadratcentimetern ausgedrückt, so erhält man durch Einsetzen der Gleichung 96) in 98) die folgende

$$\frac{de}{dt} = 1000 \frac{Pv.L}{a\omega s} \frac{f\Delta-(1-\alpha\Delta)P+mf\Delta\left(1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(f\Delta-(1-\alpha\Delta)P)^2}. \qquad 99)$$

Anwendung:

Preußisches 8·8 *cm* Feldgeschütz. $G = 8 \cdot 135$, Ladung $L = 0 \cdot 65\ kg$ Würfelpulver ($s = 1 \cdot 6$), $f = 9100\ kg$, $\alpha = 0 \cdot 84$, $\Delta = 0 \cdot 65/1 \cdot 85 = 0 \cdot 35$ Ladedichte. Es wurde ermittelt für $x = 0 \cdot 050\ m$, $P = 1000\ kg$, $v = 69\ m$, $x_1 = 0 \cdot 190$. $a = 0 \cdot 235$, $m = {}^1/_2$, $\rho = {}^4/_3$, $\frac{x}{x_1} = \frac{0 \cdot 050}{0 \cdot 190} = \frac{5}{19}$.

Das Pulverkorn hat den Inhalt $2.2.0 \cdot 75\ mm^3 = 0 \cdot 003\ cm^3$ und ein Gewicht von $0 \cdot 003.1 \cdot 6 = 0 \cdot 0048\ g$. Seine Oberfläche beträgt $2(2.2+2.0 \cdot 75+2.0 \cdot 75) = 14\ mm^2 = 0 \cdot 14\ cm^2$. Die Anzahl der Körner bei $0 \cdot 65\ kg$ Ladung ist daher $\frac{0 \cdot 65.1000}{0 \cdot 0048} =$ $= 135.400$ und ihre Gesammtoberfläche $135.400.0 \cdot 14\ cm^2$, also die anfängliche Emissionsoberfläche $\omega = 18.950\ cm^2$. Indem wir für den genannten Moment $\omega = 10.000\ cm^2$ setzen, erhalten wir als Verbrennungsgeschwindigkeit in diesem Augenblicke

$$\frac{de}{dt} = \frac{1000.1000.69.0 \cdot 65}{0 \cdot 235.10.000.1 \cdot 6} \cdot$$

$$\cdot \frac{9100.0 \cdot 35-(1-0 \cdot 3)1000+\frac{1}{2} \cdot 9100.0 \cdot 35\left(1-\left(\frac{5}{19}\right)^{3/4}\right)}{(9100.0 \cdot 35-0 \cdot 7.1000)^2}.$$

Die Ausrechnung ergibt $de/dt = 6 \cdot 73\ cm$.

Hienach beträgt die mittlere Verbrennungsgeschwindigkeit des Würfelpulvers $6 \cdot 73\ cm$, sofern die Seitenlängen der Körner die Abmessungen $\lambda = 2\ mm$, $\mu = 2\ mm$, $\nu = 0 \cdot 75\ mm$

betragen. Je gröber das Korn, umso kleiner ist bei constantem L die gesammte augenblickliche Emissionsoberfläche ω und umso größer ist bei gleicher Verbrennungsdauer de/dt oder die Verbrennungsgeschwindigkeit. Wir bemerken, dass anstatt des Ausdruckes $1000 \frac{PvL}{a\omega s}$ der gleichwertige

$$\frac{Pv}{20\,a\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right)}$$

gesetzt werden kann (λ etc. in Millimetern), wobei $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}$ noch mit einem mittleren Coefficienten zwischen 0 und 1 zu multiplicieren ist (in obiger Rechnung mit 10/19). Die Gleichungen gelten für isothermische Verbrennung; für die adiabatische ist die allgemeinere Druckformel zu benutzen.

Man kann de/dt auch in Function von $\frac{dP}{dt}$ darstellen, wenn man die Formel 95) in 99) einführt. Eine Function von P etwa in der Form kP^{λ}, wie sie Vieille annimmt, scheint die Verbrennungsgeschwindigkeit nicht zu sein, wenigstens nicht im Verbrennungsraume eines Geschützes.

Die Formel 99) lässt erkennen, dass eine kleinere Gasspannung, Geschossgeschwindigkeit und Ladung unter sonst gleichen Umständen die Verbrennungsgeschwindigkeit vermindert, während ein kleinerer Verbrennungsraum a dieselbe erhöht. Die von der fortschreitenden Entzündung abhängige, zuerst wachsende, dann abnehmende Emissionsoberfläche ist variabel, und die jeweilige Größe derselben ist eine Function der Zeit und der Form des Kornes, im obigen Falle der durch die schichtweise Verbrennung des prismatischen Kornes stetig abnehmenden Oberfläche. Die Art dieser Begrenzung, sowie der Entzündung bestimmt wesentlich den davon abhängigen Gasdruck und damit die Geschossgeschwindigkeit u. a. m. Die Klarstellung dieser mannigfachen und ineinander greifenden Bewegungsmomente ist schwierig, und es sind überhaupt die Versuche auf dem Gebiete der Verbrennungsweise noch lange nicht abgeschlossen. Weitere theoretische Entwickelungen können daher erst später gegeben werden.

V. Theil.

Die Wärmewirkungen im Geschützrohre.

§. 37.

Die treibende Kraft bei der Geschossbewegung im Rohre ist die Verbrennungswärme der entstehenden Gase, und sie wird definiert durch die Anzahl Calorien, die in einem Kilogramm Ladung der betreffenden Pulversorten bei deren Entzündung zur Umsetzung gelangen. Die Bestimmung dieser Werte ist schwierig und wichtig, da die Leistung des Geschützes wesentlich durch die Eigenschaften der Treibmittel bedingt ist. Die Berichte der Militärversuchsanstalten enthalten die Methoden und die Versuchsdata der Experimentaluntersuchungen in physikalischer, chemischer u. a. Richtung, die ihrerseits wieder die Grundlage zu bilden haben für weitergehende theoretische Entwickelungen.

Die Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie sind:

$$dQ = \frac{c_v}{R} vdp + \frac{c_p}{R} pdv,$$

$$dQ = c_v dT + Apdv, \qquad 100)$$

$$pv = RT, \qquad c_p - c_v = AR, \qquad A = \frac{1}{425}.$$

In Anwendung dieser Formeln auf unseren Gegenstand bemerken wir Folgendes: Da v Raumeinheiten sind und p den Druck auf die Flächeneinheit bezeichnet, so ist bei einer Druckfläche ω anstatt vdp einzuführen $\omega x dp = xd(\omega p)$. Es genügt also, anstatt v und p die Werte x und $r^2 \pi P$ zu setzen.

Die specifischen Wärmen c_v und c_p sind für hohe Temperaturen nicht mehr constant, indem sie mit diesen zunehmen. Dadurch erhalten die Hauptglieder der obigen Formeln noch Correctionszusätze, die bei hohen Temperaturen merklich ins Gewicht fallen. Für Blättchenpulver ist nach den Angaben der Versuchsanstalten

$$C_v = 0 \cdot 22 + 0 \cdot 000075 T = c_v + eT,$$

und die zweite der obigen Gleichungen liefert das schärfere Integral

$$Q = c_v T + \frac{1}{2} e T^2 + \frac{AG}{2g} v^2. \qquad 101)$$

Das letzte Glied bestimmt die Wärmemenge, die zur Entwickelung der lebendigen Kraft oder der Arbeit der Geschossbewegung erforderlich ist.

Fällt dies Glied aus, d. h. ist der Laderaum ($1\,dm^3$) von festen Wänden eingeschlossen, so repräsentiert die aus Q Einheiten entwickelte Temperatur den höchsten Wert

$$T = \frac{2Q_c}{c_v\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Qe}{c_v^2}}\right)}. \qquad 102)$$

Nehmen wir $Q = 770$ cal. an und benützen die obigen Constanten, so folgt als Verbrennungstemperatur von 1 *kg* Blättchenpulver

$$T = 2460° \text{ C.}$$

Für Würfelpulver würde unter Benützung der Angaben

$$T = 3300, \qquad c_v = 0{\cdot}21, \qquad e = 0{\cdot}000085$$

als Wärmepotential für 1 *kg*

$$Q = 1156 \text{ cal.}$$

folgen.

§. 38.

Die verwickelten Vorgänge bei der Geschossbewegung gestalten die aus den theoretischen Formeln abgeleiteten Beziehungen nicht so einfach. Abgesehen von kleineren Wärmeverlusten ist es besonders die durch Wärmeabgabe an das Rohr verbrauchte Arbeit, die einen sehr wesentlichen Procentsatz von Calorien beansprucht. Die Berechnung dieser Wärmemengen stößt deshalb bezüglich der letzteren auf Schwierigkeiten, weil eine Reihe von Begleiterscheinungen, wie z. B. die Vibrationen des Rohres, auftretende Molecularbewegungen etc. den an sich einfachen Vorgang der Wärmeleitung mit beeinflussen, und dass auch die letztere bei hohen Temperaturen

anders verläuft als bei kleinen. Es fehlt hier die für die Berechnung dieser Zustände nothwendige Kenntnis der betreffenden Constanten. Immerhin aber ließe sich durch im Wasser abgegebene Schüsse die vom Rohre aufgenommene Wärmequantität ermitteln, und es wäre von Interesse, ob die von Saint Robert ausgesprochene Ansicht, dass die an ein Gewehr abgegebene Wärmemenge ein Drittel der gesammten aufgewandten Wärme sei, sich mit den Beobachtungen deckt. Für ein Geschütz mit stärkeren Wandungen wird dieser Bruchtheil kleiner sein.

Von geringerer Bedeutung sind die durch die fortschreitende Bewegung der Ladung und die Rotation des Geschosses etc. verursachten Wärmeausgaben. Die Berechnung dieser Werte ist ziemlich einfach. Die im Verbrennungsraume ωa vertheilt gedachte Ladung zerlegen wir in parallele Schichten $\omega dz . s$, deren erste an der Mündung die Geschwindigkeit v_0, deren letzte die Geschwindigkeit 0 hat. Die mittleren stehen in ungefährem Verhältnis der Abstände z/a, wo z von 0 bis a geht. Die lebendige Kraft der einzelnen Schichten bis zu ihrer Grenzlage der Bewegung ist also $\frac{1}{2} \frac{\omega dzs}{g} \left(\frac{v_0}{a} z\right)^2$ und die der gesammten Schichten

$$\int_0^a \frac{\omega dzs}{2g} \frac{z^2}{a^2} v_0^2 = \frac{1}{6} \frac{L}{g} v_0^2. \tag{103}$$

Im Wärmemaß sind dies

$$Q_3 = \frac{AL}{6g} v_0^2 \text{ cal.} \tag{104}$$

Ist z. B. $L = 0{\cdot}70\ kg$, $v_0 = 459\ m$, $A = \frac{1}{425}$, so folgt

$$Q_3 = 5{\cdot}9 \text{ cal.}$$

Hinsichtlich des Wärmeverbrauches durch die Rotation des Geschosses, die durch den Drall der Züge bewirkt wird, ist die lebendige Kraft desselben definiert durch

$$\frac{1}{2} J \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad \text{(vergl. 139)},$$

wo J das Trägheitsmoment des Geschosses und $\frac{d\varphi}{dt}$ seine Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Da nun

$$J = \frac{G}{g} k^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{r d\varphi}{dt} = v \operatorname{tg} \tau,$$

so erhalten wir unter Annahme von $\frac{k^2}{r^2} = {}^1/_2$ die durch die Rotation verbrauchte Wärmemenge

$$Q_4 = \frac{AG}{4g} v_0^2 \operatorname{tg} \tau^2. \qquad 105)$$

Mit wachsendem Drallwinkel τ steigt dieselbe allerdings rasch; indessen verglichen mit der durch die Geschossarbeit

$$Q_1 = \frac{AG}{2g} v_0^2$$

verbrauchten ist sie so klein, dass sie im Verhältnisse zu dieser vernachlässigt werden kann. Beispielsweise erhält man für $\tau = 7°$ unter Benützung der Werte $G = 8\,kg$, $v_0 = 459\,m$,

$$Q_4 = 1 \cdot 5 \text{ cal.}$$

§. 39.

Bei der Gasentwickelung im Geschützrohre äußert sich der Gasdruck nach allen Richtungen mit gleicher Stärke, also auch in Richtung auf den Seelenboden des Geschützes. Diese durch die Reaction auf das Rohr selbst ausgeübte Bewegung nennt man den Rückstoß, da damit eine rückgängige Bewegung des Geschützes verknüpft ist. Nimmt man an, dass das Rohr mit einem Schlitten fest verbunden sei und auf einer glatten Unterlage ohne Reibung gleite, so bleibt beim Schuss der Schwerpunkt des ganzen bewegten Systems in Ruhe, weil nur innere Kräfte wirken, deren Gesammtresultante $\Sigma mv =$ Null ist. Das Gewicht des Rohres nebst Schlitten sei R. Der Schwerpunkt S des zur Rohraxe symmetrischen Systems habe von einem festen Punkte den Abstand $r + r_0$, worin r_0 den Abstand des Schwerpunktes vom Seelenboden bezeichnet. r ist also die

variable Entfernung des im Raume festen Punktes vom Seelenboden. Die entsprechende Momentankraft ist also $R\frac{dr}{dt}$. Bezeichnen wir noch die Entfernung des Geschossbodens vom festen Punkte mit x_1, so ist $\frac{1}{2}(r+x_1)$ der Abstand des Schwerpunktes der vergasten Ladung L vom festen Punkte, und also die Momentankraft der letzteren

$$Ld\frac{\frac{1}{2}(r+x_1)}{dt},$$

während diejenige des Geschosses $G\frac{dx_1}{dt}$ ist. Daher ist

$$R\frac{dr}{dt}+\frac{1}{2}L\left(\frac{dr}{dt}+\frac{dx_1}{dt}\right)+G\frac{dx_1}{dt}=0, \tag{106}$$

woraus

$$\frac{dr}{dt}\left(R+\frac{1}{2}L\right)+\frac{dx_1}{dt}\left(G+\frac{1}{2}L\right)=0$$

folgt.

Es sei $V=-\frac{dr}{dt}$ die Geschwindigkeit des Rohrkörpers und $\frac{dx_1}{dt}=v'$ die des Geschosses, dann ist

$$V=\frac{G+\frac{1}{2}L}{R+\frac{1}{2}L}v'. \tag{107}$$

Da das Rohrgewicht das des Geschosses weit übertrifft, so ist die Rücklaufsgeschwindigkeit nahezu im Verhältnisse dieser Gewichte kleiner als die Geschossgeschwindigkeit. Eine schärfere Bestimmung derselben würde sie als eine Function der Zeit darstellen, innerhalb deren die Vergasung erfolgt. Hiedurch aber würde die Rechnung weitläufiger und kaum genauer ausfallen. Differentiieren wir die letzte Gleichung und beachten,

dass $\frac{R}{g} \frac{dV}{dt}$ den Druck P_r auf den Stoßboden des Geschützes,

$P_g = \frac{G}{g} \frac{dv_1}{dt}$ den Druck auf den Geschossboden bedeutet,

so ist

$$\frac{P_g}{P_r} = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{L}{R}}{1 + \frac{1}{2} \frac{L}{G}}. \tag{108}$$

Daher ist im allgemeinen der Druck auf den Geschossboden etwas kleiner, als auf den Stoßboden des Rohres. Bei unendlichem Rohrgewicht z. B. ist, wenn noch $L = G$:

$$P_g = \frac{2}{3} P_r.$$

Bei den Geschwindigkeitsmessungen mit dem Velocimeter kommt es auf die Lage des Geschosses in Bezug auf den Seelenboden an. Nennen wir diesen Abstand x, so ist $x_1 = r + x$ und daher

$$\frac{dr}{dt}(R+G+L) + \frac{dx}{dt}\left(G + \frac{1}{2} L\right) = 0,$$

woraus

$$V = \frac{G + \frac{1}{2} L}{R+G+L} v \tag{109}$$

folgt.

Es ist also $v > v'$.

Diese Bestimmungen gelten mit großer Annäherung. Doch ist zu bemerken, dass hiebei die nicht zu vermeidenden äußeren Reibungsverhältnisse in Verbindung mit den Stößen, Drehungen, Reibungen im Inneren als Folge der Züge oder des Dralls die obigen Gleichungen in etwas modificieren. Je mehr diese störenden Ursachen beseitigt werden, umso reiner kommen die oben sehr einfachen und bekannten Rücklaufgesetze zum Ausdrucke.

Die durch den Rückstoß aufgewendete Arbeit des Rohres ist im Wärmemaß

$$Q = A\frac{R}{2g}\left(\frac{G+\frac{1}{2}L}{R+\frac{1}{2}L}\right)^2 v'^2, \qquad 110)$$

oder, wenn man der Übersicht wegen $L = 0$ setzt,

$$Q = A\cdot\frac{G}{R}\cdot\frac{1}{2}\frac{G}{g}v'^2. \qquad 111)$$

Sie ist also im Verhältnisse des Geschossgewichtes zum Rohrgewichte kleiner, als die im Geschosse selbst aufgespeicherte Arbeit.

Ist z. B. das Geschütz 1000 *kg*, das Geschoss 7·5 und die Ladung 0·58 *kg* schwer, und beträgt die Mündungsgeschwindigkeit 455 *m*, so beansprucht der Rückstoß eine aufzuwendende Wärmemenge von $Q = 1\cdot477$ Calorien.

§. 40.

Wir berechnen noch die Größe des Luftwiderstandes auf das Geschoss während seiner Bewegung im Rohre.

Legen wir das quadratische Gesetz unter und bezeichnen mit W den Luftwiderstand pro Quadratcentimeter, so ist $\frac{W}{W_0} = \frac{v^2}{v_0^2}$, wo W_0 den Widerstand an der Mündung bezeichnet. Derselbe ist z. B. für $v_0 = 520$ *m* nach unserer Formel 20) im 1. Theil 1·227 *kg*. Die Gleichung

$$vdv = \frac{r_2\pi g}{G}\left(P - W_0\frac{v^2}{v_0^2}\right)dx$$

lasst sich nun leicht integrieren, wenn v in Function von x gegeben ist. Um gleich ein bestimmtes Beispiel zu geben, wählen wir den folgenden Versuch.

Krupp'sche 8 *cm*-Kanone $L/29$. $G = 7\cdot5$ *kg*, $L = 0\cdot71$ *kg*. Man erhielt: $P_1 = 2050$ Atm., $P_0 = 525$ Atm., $v_0 = 520$ *m*. Ferner zeigt die graphische Darstellung

$$v_{0\cdot2} = 224, \qquad v_{0\cdot9} = 435, \qquad v_{1\cdot8} = 520\ m.$$

Die Formel

$$v^2 = 263.460x - 62.100x^2$$

liefert

224 432 .522,

entspricht also gut der Geschwindigkeitscurve.

Die Integration ergibt

$$v'^2 = v^2 - \frac{2r^2\pi g}{G}\,\frac{W_0}{v_0^2}\,x^2(131730 - 20700x), \qquad 112)$$

wo v die Geschwindigkeit für $W =$ Null bezeichnet.

An der Mündung $x = l$ ist

$$v_0'^2 = v_0^2 - \frac{2r^2\pi g}{G}\,\frac{W_0}{v_0^2}\,l^2(131730 - 20700l)$$

und nach Einführung der genannten Constanten $l = 1\cdot 8$ etc.

$$v_0' = 520^2 - 181\cdot 67, \text{ also } v_0' = 519\cdot 82\,m.$$

Der Luftwiderstand hat also die Mündungsgeschwindigkeit um $0\cdot 18\,m$ verringert, was fast unmerklich ist. Die Differenz würde sich übrigens auf etwa $3/4 . 0\cdot 18$ vermindern, wenn wir statt des quadratischen Gesetzes, das in unserem Falle zu große Widerstände zwischen 0 und 520 liefert, das hier etwas genauere biquadratische benützt hätten. Im Wärmemaße würde der Luftwiderstand hier 0·16 Cal. beanspruchen.

Im ganzen sind die einzelnen Störungs- und Hemmungsfunctionen bei der Geschossbewegung nicht besonders einflussreich, aber vereinigt immerhin wirksam genug, um die Hauptfactoren der Bewegung unter Umständen nicht unbedeutend zu modificieren. Es gibt kaum ein Problem, bei welchem so viele Nebenerscheinungen die Hauptaction begleiten, als bei der Geschossbewegung im Geschützrohre.

Gleichwohl bietet die Untersuchung dieser Einflüsse einen besonderen Reiz.

§. 41.

Infolge des rasch verlaufenden Vorganges der Bewegung im Geschützrohre sind die Zustände derselben schwer controlierbar. Daher werden wir, wenn wir überhaupt nicht auf die

Berechnung der Wärmeverhältnisse verzichten wollen, einige Vereinfachungen vornehmen müssen, die insofern gestattet sind, weil die Gesetze der Wärmebewegung wenigstens unter den hier auftretenden extremen Verhältnissen noch nicht völlig sichergestellt werden konnten.

In Bezug auf die Wärmeleitung nehmen wir an, dass bei einer Temperaturdifferenz von 1° durch 1 cm^2 der inneren Oberfläche des Rohres in 1 Secunde k Cal. hindurchtreten. Demnach werden durch die Fläche $2r\pi x$ in dt Secunden $2r\pi xkdt$ Cal. hindurchgehen. Der Einfachheit nehmen wir ferner an, dass die Wärmeabgabe der absoluten Temperatur proportional sei, und wir erhalten also den Gesammtverlust durch Leitung vermittels

$$Q_2 = 100.2r\pi k \int_0^t xTdt \quad (r \text{ in Centim., } x \text{ in Metern}). \tag{113}$$

Bei einer Ladung von L kg verfügt das Geschütz über LQ Calorien. Durch Versuche hat man bezüglich des Geschützblättchenpulvers für 1 kg den Wert von $Q = 770$ Cal. festgestellt. Bei einer Ladung von $L = 0 \cdot 70$ kg besitzt also das Geschütz einen Wärmefonds von $0 \cdot 70.770 = 539$ Cal. oder im Arbeitsmaß $539.425 = 229.000$ mkg.

Hievon werden verbraucht für die Arbeit der Geschossbewegung

$$Q_1 = \frac{A}{2g} Gv^2 \text{ Cal.,} \tag{114}$$

außerdem noch diejenigen (Q_3), die durch Reibung, Einpressen des Geschosses in die Züge, Rotation desselben, Rückstoß des Geschützes, Bewegung der Ladung im Gaszustande beim Austritte aus der Mündung, Überwindung des Luftdruckes etc. beansprucht werden. Was von der ursprünglichen Kraftquelle noch übrig bleibt, bestimmt die beim Geschossaustritte an der Mündung herrschende Temperatur. Dabei ist zu unterscheiden, ob die Wärmemenge LQ direct voll zur Verwendung kommt oder ob sie sich erst im Laufe der Bewegung entwickelt. Falls also erst in einem beliebigen Moment L_y verbrannt sind, so ist die Bedingungsgleichung

$$L_y Q - Q_1 - Q_2 - Q_3 = Q_4,$$

wo

$$Q_4 = c_v T + \frac{e}{2} T^2.$$

Die Differentiierung ergibt

$$Q \frac{dL_y}{dt} - Ar^2 \pi P v - 100.2 r \pi k x T - \text{etc.} = c_v \frac{dT}{dt} + eT \frac{dT}{dt} \cdot \qquad 115)$$

Nach Formel 8) haben wir

$$P = \frac{10f}{r^2 \pi T_m} \cdot \frac{T}{x + a(1 - \alpha\Delta)}.$$

Die Einführung dieses Ausdruckes in das obige zweite Glied liefert, wenn noch alle Glieder mit dt/T multipliciert werden, nach einer Integration

$$Q \int \frac{dL_y}{c_v T} - \frac{10 Af}{c_v T_m} ln(x + a(1 - \alpha\Delta)) - \frac{100.2 r \pi k}{c_v} \int \frac{x dx}{v} - \ldots =$$

$$= ln T + \frac{e}{c_v} T. \qquad 116)$$

Da unsere Gleichungen die Möglichkeit bieten, v in Function von x darzustellen, z. B. die folgenden

$$P = P_1 \left[\frac{x}{x_1} e^{\left[\frac{1}{1+m} 1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m}\right]} \right]^m, \quad v = V \sqrt{1 - e^{-\frac{m}{1+m}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m}}},$$

$$V = \sqrt{\frac{2 r^2 \pi g}{mG} P_1 x_1 e^{\frac{m}{1+m}}}, \qquad 117)$$

so ist auch das dritte Glied integrierbar, und auch das erste würde es sein, wenn über die Art, wie die Ladung in Gaszustand übergeht, Näheres bekannt wäre. In Ermangelung dieser Kenntnis gehen wir, um dieser Integration überhoben zu sein, von dem Punkte aus, an welchem voraussichtlich alles Pulver verbrannt ist. Damit fällt das erste Glied überhaupt weg, und das der obigen Gleichung geht nach Bestimmung der Constanten über in

$$T = T_a \left(\frac{1-\alpha\Delta}{\frac{x}{a}+1-\alpha\Delta} \right)^{\frac{10Af}{c_v T_m}} e^{\frac{e}{c_v}(T_a-T)} e^{-100.\frac{2r\pi k}{c_v} \int \frac{x dx}{v}} . \quad 118)$$

Der Exponentialausdruck des letzten, sich auf die Wärmeleitung beziehenden Ausdruckes lässt eine rasche Temperaturabnahme erkennen. Infolge dessen ist auch der Gasdruck im gleichen Verhältnisse kleiner geworden, wie man findet, wenn man T in 9) einsetzt

$$P = \frac{f\Delta}{1-\alpha\Delta} \left(\frac{1-\alpha\Delta}{\frac{x}{a}+1-\alpha\Delta} \right)^{k'} e^{\frac{e}{c_v}(T_a-T)} e^{-100.\frac{2r\pi k}{c_v} \int \frac{x dx}{v}}, \quad 119)$$

$$k' = 1 + \frac{10Af}{c_v T_m}.$$

T_a bezeichnet die absolute Temperatur an jenem Orte x_a, in welchem die Ladung L vollständig vergast ist.

Von Interesse ist die Bestimmung der Leitungsconstanten k. Wir benützen hiezu den folgenden Versuch.

Geschütz: 8·8 *cm* preußische Feldkanone C/73. Geschossgewicht $G = 8\cdot135$ *kg*, Ladung $L = 0\cdot70$ *kg*. Querschnitt im Rohr $r^2\pi = 63$ *cm*^{2}. Länge des Ladungsraumes 0·235 *m*. Geschossweg bis zur Mündung 1·615 *m*, höchster Gasdruck $P_1 = 1890$ *kg*, Ort: $0\cdot125 \pm^{15}_{0}$, Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 459$ *m*.

Die graphische Darstellung der betreffenden Curve lässt bei $x_a = 0\cdot365$ *m* einen Wendepunkt der Druckcurve erkennen, so dass annähernd dort die Verbrennung ihr Ende erreicht haben mag. Wir verlegen also den Anfangspunkt der Bewegung hierhin und benützen nunmehr die vorhergehenden Gleichungen. Die Temperatur an diesem Punkte, der nun 0·365+0·325 = = 0·600 *m* vom Seelenboden entfernt ist, ergibt sich aus 9).

Wir modificieren die Formel für unsere Zwecke, indem wir benützen $\Delta = \frac{10L}{r^2\pi a}$ ($r^2\pi$ in Quadratcentimetern, a und x in Metern).

Dabei bedeutet $\frac{r^2\pi a}{10}$ den Laderaum in Quadratdecimetern oder Litern. Es folgt

$$T = P\left(\frac{r^2\pi x}{10} + \frac{r^2\pi a}{10} - \alpha L\right)\frac{T_m}{f},$$

oder kürzer

$$T = P(w - \alpha L)\frac{T_m}{f}, \tag{120}$$

wo w den vollen Raum zwischen Seelen- und Geschossboden in Cubikdecimetern oder l bedeutet. Wie aus den Geschützdimensionen folgt, ist w_a nahe $4\cdot 2\ dm^3$, und da hier der Gasdruck $P = 1460\ kg$ beträgt und den Constanten gemäß $T_m = 2400°$, $f = 7800\ kg$, $\alpha = 0\cdot 92$, $L = 0\cdot 7$ ist, so erhalten wir

$$T_a = 1595°$$

als absolute Temperatur der vollständig vergasten Ladung am bezeichneten Orte $x_a = 0\cdot 365\ m$. Dieser entsprechen

$$Q_a = 0\cdot 22\,.\,1595 + 0\cdot 000075 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1595)^2 = 447 \text{ Cal.}$$

Da die Ladung im Maximum 539 Cal. hat, so sind bis zu jenem Moment, nach welchem das Geschoss $0\cdot 365\ m$ zurückgelegt hat, 539—447 = 92 Cal. für die eingeleitete Bewegung etc. verbraucht worden. Letztere hätte, da bei x_a diese Geschwindigkeit $v_a = 300$ (ca.) ist,

$$\frac{1}{2}\,\frac{8\cdot 135}{9\cdot 81}\cdot\frac{300^2}{425} = 86 \text{ Cal.}$$

beansprucht. 6 Cal. giengen also gleich anfangs durch Stoß, Pressung, Leitung verloren.

Nach diesen vorläufigen Bestimmungen schreiten wir nun zur Berechnung der Mündungstemperatur T. Die modificierte Formel 118) gibt

$$T = T_a\left(\frac{\omega_a - \alpha L}{\omega - \alpha L}\right)^{\frac{10Af}{c_v T_m}} e^{\frac{e}{c_v}(T_a - T)}\, e^{-\frac{100.2 r\pi k}{c_v}\int\frac{x\,dx}{v}}. \tag{121}$$

Sämmtliche Constanten bis auf k sind bekannt: $T_a = 1595$. $\omega_a = 4\cdot 2\,dm^3$, ω_0 oder das Volumen des Rohrinneren $= 11\cdot 57\,dm^3$, $\alpha = 0\cdot 92$, $L = 0\cdot 7$, $A = \frac{1}{425}$, $f = 7800$, $c_v = 0\cdot 22$, $T_m = 2400$. $e = 0\cdot 000075$.

Die Ausführung der Rechnung ergibt für die Mündungstemperatur

$$T_0 = \frac{1595}{3\cdot 073^{0\cdot 348}} e^{\frac{0\cdot 000075}{0\cdot 22}(1595-T)} e^{-J},$$

wo J zur Abkürzung dient.

Nehmen wir nun an, dass keine Wärmeableitung erfolgt sei, setzen also k oder $J = 0$, so ergibt die letzte Gleichung

$$T = 1224°,$$

welcher Temperatur

$$Q = 0\cdot 22 . 1224 + 0\cdot 000075 \cdot \frac{1}{2}(1224)^2 = 324 \text{ Cal.}$$

entsprechen.

Die thatsächliche Mündungstemperatur aber ist, da $P_0 = 318\,kg$,

$$T_0 = 318(11\cdot 57 - 0\cdot 92 . 0\cdot 7)\,\frac{2400}{7800} = 1069°.$$

Dieser Temperatur entsprechen $Q_0 = 235 + 43 = 278$ Cal.

Daher sind $324 - 278 = 46$ Cal. für die Wärmeleitung, Vibration der Rohrmolecüle, Rotation etc. verbraucht worden. Setzen wir $T_0 = 1069$ ein in die obige Gleichung für T_0, so folgt

$$1069 = 1079\, e^{\frac{0\cdot 000075}{0\cdot 22}(1595-1069)} e^{-J} = 1291\, e^{-J},$$

woraus

$$J = 0\cdot 1886 = 100 \cdot \frac{2r\pi k}{c_v}\int_0^x \frac{x\,dx}{v}$$

folgt. Es bedarf also nur noch der Kenntnis des Integrals zur rechten, um k zu finden.

Anstatt der scharfen Formel für v wählen wir für das betrachtete Stück der Bewegung die folgende kürzere Formel

$$v = \frac{298}{1-0\cdot 325\,x^{1/3}},$$

die den thatsächlichen v-Werten der Geschwindigkeitscurve sehr gut genügt. Für $x = 0$, d. h. $x_2 = 0\cdot 365$, folgt $v_a = 298$ und für den betreffenden Geschossweg $x = 1\cdot 250$, $v_0 = 459$ und so auch die zwischenliegenden Werte. Das Integral geht damit über in

$$\int_0^x \frac{xdx}{298}(1-0\cdot 325\,x^{1/3}) =$$

$$= \frac{x^2}{298}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{7}\cdot 0\cdot 325\,x^{1/3}\right) = 0\cdot 001836$$

und man hat

$$0\cdot 1886 = 100\cdot\frac{2r\pi k}{c_v}\cdot 0\cdot 001836.$$

Damit erhalten wir vermöge der Werte $c_v = 0\cdot 22$, $2r =$ $= 8\cdot 8$ die verhältnismäßig hohe Constante

$$k = 0\cdot 00818.$$

Indem wir das Ganze noch einmal übersichtlich zusammenfassen, erhalten wir Folgendes:

Beim vorliegenden Schuss kamen 539 Cal. zur Umsetzung. Hievon entfielen auf die Geschossarbeit der fortschreitenden Bewegung 206 Cal., auf die Wärmeleitung etc. 46+6 Cal. und auf die fortschreitende Bewegung der Ladung im Rohre 5·8 Cal. An der Mündung waren also noch gegen 275 Cal. vorhanden, die ungenützt verloren giengen. Die durch das Rohr absorbierte Wärme repräsentierte ungefähr ein Zehntel des ganzen Wärmepotentials. Theoretisch kann dieser Verlust in der Weise charakterisiert werden, dass man sagt, dass bei 1° Temperaturdifferenz durch den Quadratcentimeter pro Secunde 0·00818 Cal. hindurchfließen. Es ist bekannt, dass schon nach wenigen Schüssen ein Kanonenrohr sich ganz bedeutend erhitzt und leichte Metalle zum Schmelzen bringt.

Bei der Beurtheilung der obigen Constante k ist zu berücksichtigen, unter welchen Bedingungen sie erhalten wurde. Wir haben hypothetisch die Wärmeleitung der absoluten Temperatur T proportional angenommen, um die Rechnung zu vereinfachen. Die Annahme $t = T - 273$ führt zu etwas anderen Werten. Die Stärke der Wandung und die Qualität des Materials des Geschützes sind natürlich mit maßgebend bei der Bildung der Constanten, die z. B. bei dünnerem Rohre größer sein wird. Da die oben berechneten 46 Cal. nicht nur durch die cylindrische Geschützwandung, sondern auch zum Theile durch das Geschoss und den Seelenboden, durch die Rotation und den Luftwiderstand etc. aufgebraucht worden sind, so würde, wenn lediglich die Wirkung auf der inneren Mantelfläche in Betracht käme, der entsprechende k-Wert etwas anders ausfallen. Die Ursachen, welche diesen Coefficienten bedingen, werden wahrscheinlich sehr compliciert sein und bedürften eigentlich einer besonderen Untersuchung. Nachdem wir k annähernd ermittelt haben, können wir jetzt die Berechnung des Integrals der Wärmeleitung

$$Q_2 = 100.2 r\pi k \int_0^t xTdt \tag{122}$$

direct vornehmen. Wir führen ein $dt = dx/v$ und T und P aus 87) und 120), wobei wir $a(1-\alpha\Delta)$ vernachlässigen, beziehungsweise $\Delta\alpha = 1$ setzen. Es resultiert

$$Q_2 = 10.r\pi k \frac{Gx_1^2}{fg} VT_m \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{2}{m+1}} \int_0^z \frac{z^{\frac{2}{m+1}} e^{-z} dz}{\sqrt{1-e^{-z}}}, \tag{123}$$

$$z = \frac{m}{m+1}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{m+1}.$$

Dabei ist zu benützen

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{-z}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z}}\left(1 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{96}z^2 - \frac{1}{384}z^3 - \frac{1}{10240}z^4 + \ldots\right). \tag{124}$$

Das Endresultat hat folgende Form

$$Q_2 = Cz^{\frac{2}{1+m}+\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{5+m} - \frac{3z}{4(7+3m)} + \right.$$

$$\left. + \frac{25z^2}{96(9+5m)} - \frac{7z^3}{128(11+7m)} + \frac{79z^4}{10240(13+9m)}\right], \quad 125)$$

$$C = 20r\pi k \frac{G}{fg} VT_m x_1^2 m\left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{2}{1+m}+1}.$$

Anwendung auf die Krupp'sche 8 *cm*-Kanone $L/29$, Nr. 5:

Geschossgewicht $G = 7 \cdot 5$ *kg*, Ladung $L = 0 \cdot 58$ *kg* W.P. (3).

Verbrennungsraum $a = 0 \cdot 246$ *m*, Geschossweg $l = 1 \cdot 820$. Höchster Gasdruck in $x_1 = 0 \cdot 200$, $P_1 = 1500$ *kg*, Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 455$ *m*, Gasdruck an der Mündung $P_0 =$ $= 490$ *kg*.

Zur Controle berechnen wir diese Data aus den Formeln 87) und setzen $x/x_1 = 9$, $m = {}^1/_6$, $G = 7 \cdot 5 + 0 \cdot 4 = 7 \cdot 9$, $r^2\pi = 50$. Es folgt $P_0 = 390$, $V = 507$, $v_0 = 459$ *m*. Die theoretische Curve liefert also nahezu dieselbe Endgeschwindigkeit, dagegen einen kleineren Enddruck. Die Ansicht der graphischen Curven lässt den Eindruck gewinnen, als ob an der Mündung der Verbrennungsprocess noch nicht beendet sei. Wenigstens besitzen die Curven in ihrem letzteren Theile nur eine schwache Krümmung, die ihrem anfänglich steileren Abstiege nicht völlig entspricht. Das Würfelpulver gehört bekanntlich den langsamer verbrennenden Pulversorten an. Infolge der hinreichend genauen Übereinstimmung der Geschwindigkeiten compensieren sich die entsprechenden Druckcurven in ihren jeweiligen Unterschieden zu einem nahezu gleichen Gesammtresultat. Die nach 87) berechnete Zeitdauer t_1 vom Beginne der Geschossbewegung bis zum Eintritte des höchsten Gasdruckes ist $t_1 = 0 \cdot 00253^s$, die gemessene Zeit war $0 \cdot 00257^s$, also fast dieselbe. Nunmehr berechnen wir Q_2 und benützen $z = \frac{1}{7} 9^{7/6} = 1 \cdot 8543$, $T_m = 3300°$, $G = 7 \cdot 5$, $f = 9130$, $k = 0 \cdot 00818$, $V = 507$, $x_1 = 0 \cdot 2$.

Es folgt

$$Q_2 = 108 \text{ Cal.}$$

Wir verbinden dieses Resultat mit dem folgenden, aus einem Versuche abgeleiteten, wobei wir folgende Angaben machen:

1 *kg* Würfelpulver enthält 1190, die Ladung $L = 0 \cdot 58\, kg$, also $Q = 690$ Calorien. Hievon wurde für die Geschossbewegung $Q_1 = \frac{1}{2} \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 81} \cdot \frac{459^2}{425} = 190$ und für die Ladungsbewegung $\frac{1}{3} \frac{L}{G}$ davon oder 5 Calorien entnommen. Die Rotation würde höchstens 1 Cal. beanspruchen.

Zur Bestimmung der Mündungstemperatur T_0 benützen wir die Daten: Druck $P_0 = 390$, Volumen $10 \cdot 53 - 0 \cdot 48$, und man hat

$$T_0 = 390(10 \cdot 53 - 0 \cdot 48) \frac{3300}{9130} = 1416°$$

oder

$$Q_0 = 0 \cdot 21 . 1416 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 000085 . (1416)^2 = 382 \text{ Cal.}$$

Vom ursprünglichen Wärmefonds bleibt also für die Wärmeleitung nur übrig

$$690 - 190 - 50 - 1 - 382 = 112 \text{ Calorien.}$$

Da noch einige Calorien für die oben angegebenen Wärmeverluste im Ladungsraume, Geschosse und Seelenboden, die wir bei Berechnung von Q_2 nicht berücksichtigt haben, letzterer Größe hinzuzufügen sind, so ist das Endresultat unserer Rechnung hinreichend befriedigend.

§. 42.

Wir haben den Verhältnissen gemäß angenommen, dass die Temperatur mit Null anfange, wie ja auch der Gasdruck, der eine Folge der sich steigernden Wärmeentwickelung ist, mit Null beginnt. Die Aufgabe der Wärmebewegung wird schwieriger, wenn der fortschreitende Process der Pulververbrennung, der nicht immer mit dem Geschossaustritte beendet ist, in Rechnung gezogen werden soll. Von Interesse ist

es nun, mittels der allgemeinen Zustandsgleichung der Gase in Verbindung mit der Druckgleichung das Maximum der Temperatur im Rohre zu bestimmen.

Ist w' der Inhalt des anfänglichen Verbrennungsraumes (in Cubikdecimetern), so lässt sich die betreffende Gleichung wie folgt schreiben:

$$T = r^2\pi \frac{PT_m}{10f}(x+\xi), \qquad \xi = \frac{10(w'-\alpha L)}{r^2\pi}. \tag{126}$$

Hieraus folgt, wenn wir von den Wärmeverlusten absehen,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{r^2\pi T_m}{10f}\left(Pv+(x+\xi)\,\frac{dP}{dt}\right),$$

also in Verbindung mit den Formeln 95)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{r^2\pi T_m}{10fx}\left[x-m(x+\xi)\left(\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}-1\right)\right]Pv. \tag{127}$$

Das Temperaturmaximum tritt ein für

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} = 1+\frac{x}{m(x+\xi)}. \tag{128}$$

Sind die Constanten $x_1 \rho m \xi$ gegeben, so erhält man den Ort des Maximums durch näherungsweise Auflösung dieser Gleichung. Für den speciellen Fall $\rho = \frac{1}{1+m}$ wird dieselbe

$$y^{1+m} = 1+\frac{1}{m\left(1+\frac{\xi}{x_1 y}\right)}, \qquad y = \frac{x}{x_1}. \tag{129}$$

Das letzte Rechnungsbeispiel lieferte $w' = 1{\cdot}258$, $\alpha L = 0{\cdot}84$, $0{\cdot}58 = 0{\cdot}487$, also $\zeta = 0{\cdot}15$, und da $x_1 = 0{\cdot}200$, $m = {}^1/_6$, so ergibt sich aus

$$y^{7/6} = 1+\frac{6}{1+\frac{3}{4y}}$$

die Wurzel $y = 4 \cdot 75$ oder $x = 0 \cdot 950\, m$ als Ort des Maximums. Theoretisch herrscht hier ein Druck von

$$P = 1500 . \left[\frac{x}{x_1} e^{\frac{1}{m+1} \left(1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m}\right)} \right] = 1500 \left[\frac{4 \cdot 75}{e^{6/7 (4 \cdot 75^7/_6 - 1)}} \right]^{1/6}$$

oder $P = 930\, kg$ und also eine Temperatur von 1880°, wenn der Verlauf der Bewegung unserer Curve folgt. Da indessen die graphische Curve des Versuches hier etwas kleinere Gasdrucke liefert, ist die Temperatur in demselben Verhältnisse kleiner. Die unregelmäßige Entwickelung der thatsächlichen Druckcurven, die oft wie Wellenzüge aussehen, lässt eine vollständige Congruenz zwischen Theorie und Versuch nicht zu. Nur sehr wenige Curven dieser Art entsprechen annähernd den ideellen Verhältnissen mathematischer Linien. Fügen wir noch hinzu, dass die graphischen Darstellungen ihrerseits wieder Resultate von sehr umständlichen Rechnungsverfahren und deshalb mit unvermeidlichen Fehlern behaftet sind, so lässt sich daraus schon die ganze Schwierigkeit der Aufstellung einer Wärmetheorie im Geschützrohre erkennen, die, wie auch in vielen anderen Fällen, sich mit Mittelwerten begnügen muss.

Man kann den obigen Entwickelungen noch eine interessante Seite abgewinnen, wenn man den Ausdruck für ξ, der übrigens für $w' = \alpha L$ in Null übergeht, für einen Augenblick vernachlässigt. Nach Einführung des Wertes für

$$\frac{x}{x_1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{p}$$

und des P-Wertes aus 75) in die Temperaturgleichung geht diese über in

$$T' = \frac{T_m}{10 f p i!} \left(\frac{1+i}{e}\right)^{1+i} \frac{G}{2g} \cdot V^2. \tag{130}$$

Das Maximum der Temperatur der Gase im Rohre ist demnach dem Quadrate der Geschwindigkeit im unendlich langen Rohre proportional.

Je nach den Constanten mp etc. ist der Ort dieser Temperatur von dem entsprechenden Curvengefälle mehr oder weniger abhängig.

Für $m = {}^1/_2$, $\rho = {}^4/_3$, also $m = {}^1/_2$ würde sein

$$\frac{x}{x_1} = 3^{4/3} = 4 \cdot 3267,$$

vorausgesetzt, dass die wirkliche Druckcurve der in 75) untergelegten genau folgt. Der Ort der berechneten höchsten Temperatur hängt von den eingeführten Constanten ab und ändert sich mit diesen und also mit dem Verlaufe der Verbrennung, deren wirkliche höchste Temperatur schon etwas früher stattfinden dürfte, da wir die starken Wärmeverluste zu Anfang der Bewegung außeracht gelassen haben.

§. 43.

Man kann fragen, in welcher Weise die Druckcurven den adiabatischen Wärmeverhältnissen genügen. Nehmen wir an, dass bei dem Orte $x = 4x_1$ der adiabatische Zustand eintritt und berechnen wir hienach den Druck am Orte $x = 9x_1$, so ergibt die Vergleichung des Druckverhältnisses an den bezeichneten Orten

$$\frac{P_9}{P_4} = \left(\frac{4}{9}\right)^{km},$$

wo k_m einen Mittelwert des Ausdehnungsverhältnisses c_p/c_v bedeutet.

Nach unserer Druckcurve folgen aber aus den beiden Werten für $\frac{x}{x_1} = 4$ und $\frac{x}{x_1} = 9$ vermöge der Gleichung

$$P = P_1 \left(\frac{x}{x_1}\right)^{1/2} e^{2/3 \left(1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{3/4}\right)}$$

die entsprechenden

$$P_4 = 2P_1 e^{-\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}, \qquad P_9 = 3P_1 e^{-\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)},$$

woraus

$$\frac{P_9}{P_4} = 0 \cdot 31$$

folgt.

Setzen wir beide Verhältnisse einander gleich, so ergibt sich aus

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{k_m} = 0\cdot 31$$

die Constante $k_m = 1\cdot 44$, die, wie man sieht, für die Strecke von $4x_1$ bis $9x_1$ der Geschossbewegung annähernd genau dem adiabatischen Bewegungszustande entspricht. Die untergelegte Curve gehorcht also im ganzen den Wärmebedingungen, die im letzten Theile der Geschossbewegung maßgebend sind.

VI. Theil.

Die Widerstände bei der Geschossbewegung.

§. 44.

In den bisherigen Untersuchungen wurde auf die durch den Drall hervorgerufenen Widerstände im Kanonenrohre keine Rücksicht genommen, was zunächst auch nicht nothwendig war, da die hiedurch erlittenen Kräfteverluste im Vergleiche zu den Hauptkräften verhältnismäßig klein sind und die Einführung derselben den ohnedies schon umfangreichen Formelapparat noch mehr belastet hätte. Die Formeln gelten also eigentlich nur für glatte Geschütze. Bei den gezogenen Kanonen spielt aber die Geschossrotation und die durch die Züge beeinflusste Reibung keine gerade unwesentliche Rolle, und man hat diese Einflüsse schon deshalb in Rechnung zu ziehen, um procentualisch wenigstens die Größe ihrer Wirkung übersehen zu können. Die Forderung der Stabilität des Geschosses während seines Fluges zwingt dazu, demselben in der Bohrung diejenige Bewegung zu ertheilen, die bei einer ausreichenden Treffsicherheit am Ziele die Widerstandsfähigkeit des Geschützes und Geschosses nicht mehr als nöthig beansprucht. Denken wir uns das Rohr in Längsrichtung aufgeschnitten und in einer Ebene ausgebreitet, so erscheinen die Züge beim gleichförmigen Drall als gegen die Seelenaxe schräg liegende Geraden, beim ungleichförmigen Drall als Curven. Dieselben üben auf den Gang der Bewegung denjenigen Einfluss aus, den in der Gewalt zu haben die besondere Aufmerksamkeit der Constructeure

beansprucht. Jedes Mehr oder Weniger in der Rotationsbeschleunigung, im Drucke und in der Reibung etc. können für Geschütz und Geschoss derartige nachtheilige Folgen herbeiführen, dass das ganze Instrument vor der Zeit unbrauchbar wird. Die Aufgabe der Technik in diesem Falle ist also dahin zu präcisieren: mit möglichst geringen Kräfteverlusten und damit bedingter mäßiger Inanspruchnahme der Festigkeit des Materials eine möglichst große Geschossarbeit unter stabilen Flugverhältnissen zu gewinnen.

In Fig. 2 sind die geometrischen Beziehungen des Dralls in der Bohrung dargestellt. Ohne Drall würde ein Geschosspunkt des Umfanges in gerader Linie verlaufen. Die durch den Drall bewirkte Drehung $r\varphi$ bringt ihn aber nach P und P_1. In der Ebene der Bohrung stellt sich $r\varphi$ als die Ordinate der Drallcurve dar, deren x-Axe der fortschreitenden Bewegung des Geschosses parallel ist. Den Anfangspunkt der Schraubenlinie

$$y = r\varphi = f(x) \tag{131}$$

kann man den Bedürfnissen gemäß passend wählen.

Dreht sich das Geschoss um den Bogen $dy = rd\varphi$, so bewegt es sich in der Axe um dx vorwärts. Die Richtung der Curve ist also durch

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau = \frac{rd\varphi}{dx} \tag{132}$$

bestimmt.

Der Geschossdruck auf die Züge heiße N. Die x-Componente des Druckes ist also $-N \sin\tau$. Bezeichnen wir den Reibungscoefficienten mit f, so ist die Reibung fN und ihre x-Componente $-Nf \cos\tau$, so dass also die Gesammtcomponente des Druckes und der Reibung in der Schraubenlinie gleich

$$N(\sin\tau + f\cos\tau) \tag{133}$$

ist, die auf die Geschossmasse G/g einwirkt.

Die Differentialgleichung der fortschreitenden Bewegung ist daher

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Pr^2\pi g}{G} - \frac{Ng}{G}(\sin\tau + f\cos\tau). \tag{134}$$

Da nun das Drehungsmoment des Druckes $= N \cos \tau r$ und das der Reibung $= Nfr \sin \tau$ und die Drehungsbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ des Geschosses gleich ist dem Moment der Kraft durch Trägheitsmoment (G/gk^2), so ergibt sich hieraus

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{rN(\cos\tau - f\sin\tau)}{G/gk^2}. \qquad 135)$$

Die Umfangsgeschwindigkeit

$$rd\varphi/dt = dy/dt = dy/dx . dx/dt = v \operatorname{tg}\tau$$

ist also gleich der Geschossgeschwindigkeit mal Tangente des Drallwinkels. Die Elimination von N aus beiden Formeln führt auf

$$\frac{rd^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot \operatorname{tg}\tau + v^2\frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx} \qquad 136)$$

und

$$N(\cos\tau - f\sin\tau) = \frac{G}{g}\left(\frac{k^2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\operatorname{tg}\tau + v^2\frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx}\right).$$

Die Hauptgleichung der Geschossbewegung in den Zügen lautet daher

$$\frac{d^2x}{dt^2}\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\,\frac{\operatorname{tg}\tau^2 + f\operatorname{tg}\tau}{1 - f\operatorname{tg}\tau}\right) =$$
$$= \frac{Pr^2\pi g}{G} - \frac{k^2}{r^2}\,\frac{\operatorname{tg}\tau + f}{1 - f\operatorname{tg}\tau}\,\frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx}\cdot v^2. \qquad 137)$$

Diese für alle Drallcurven giltige Differentialgleichung bildet die Grundlage der durch Rotation und Reibung beeinflussten Geschossbewegung in der Bohrung.

Die Integralrechnung zeigt nun, dass Gleichungen von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) - \varphi(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

integrierbar sind. Ihr erstes Integral lautet

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = e^{-2\int\varphi(x)\,dx}\left[C + 2\int f(x)\,dx\, e^{2\int\varphi(x)\,dx}\right].$$

Da nun in unserer Gleichung $\operatorname{tg}\tau$ und P Functionen von x sind, so ist das Integral

$$2\int\varphi(x)\,dx = \frac{2k^2}{r^2}\int\frac{(\operatorname{tg}\tau+f)\,d\operatorname{tg}\tau}{1-f\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{tg}\tau+\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau^2}$$

darstellbar in

$$\frac{2f}{n}\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\left(2\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau-f\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)\right)+$$
$$+ln\left(1-f\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{tg}\tau+\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau^2\right),$$

so dass das allgemeine Integral übergeht in

$$v^2 = \frac{C+\frac{2gr^2\pi}{G}\int P(1-f\operatorname{tg}\tau)\,dx\,.\,e^{2\frac{f}{n}\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{arctg}S/n}}{\left(1-f\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{tg}\tau+\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau^2\right)e^{2\frac{f}{n}\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{arctg}S/n}}, \quad 138)$$

$$n = \sqrt{\frac{4k^2}{r^2}-f^2\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)^2}, \qquad S = \frac{2k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau-f\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right).$$

Um den Einfluss der Geschossdrehung allein, also ohne Rücksicht auf die Reibung festzustellen, setzen wir $f = 0$ und erhalten, wenn der Anfangsdrall Null ist,

$$v'^2 = \frac{v^2}{1+\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau^2}.$$

Die Geschossgeschwindigkeit wird also durch die Geschossdrehung vermindert und die durch die letztere absorbierte Arbeit ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}(v^2-v'^2) = \frac{G}{2g}\,\frac{k^2}{r^2}\,v^2\operatorname{tg}\tau^2. \qquad 139)$$

Um dies auch hier in Zahlen auszuwerten, nehmen wir als erlangten Enddrall $\tau = 10, 15, 20, 30, 45°$ an und setzen

$k^2/r^2 = {}^1/_2$. Man findet $\frac{v_1}{v} = 0\cdot9923,\ 0\cdot9825,\ 0\cdot9684,\ 0\cdot9258,$ $0\cdot8165$, also wenn v etwa $= 500\,m$: $v' = 496\cdot15,\ 491\cdot25,\ 484\cdot20,\ 462\cdot90,\ 408\cdot25\,m$. Die Verluste sind also nur bei größeren Drallwinkeln, die übrigens über 10 bis 12° hinaus kaum Anwendung finden, ziemlich beträchtlich.

Die Rotationsgeschwindigkeit ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v \operatorname{tg} \tau}{r\sqrt{1+\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau^2}} \qquad 140)$$

v ist hier wie oben der von der Rotation unabhängige größere Wert der Geschwindigkeit. Hienach macht ein 8 *cm*-Geschoss bei 10° Enddrall und $v = 500\,m$ gegen $2182/2\pi = 347$ Drehungen in der Secunde.

Diese Drehungen nehmen mit dem Drallwinkel zu und verschwinden bei axenparallelen Zügen. Man sieht, dass bei gleichförmigem Drall ($\tau =$ Const.) die Rechnungen einfacher werden.

Um noch für den constanten Drall $\tau = \tau_0$ die entsprechenden Drehungs- und Reibungskräfte zahlenmäßig festzusetzen, wählen wir die Krupp'sche 7·5 *cm* Schnellade-Kanone $L/30$. In Bezug auf die Reibungsconstante f nehmen wir den von der Gusstahlfabrik Krupp abgeleiteten Wert 0·16 an und setzen $k^2/r^2 = {}^1/_2$ und $\tau = 10°$.

Das Integral wird damit für den constanten Drall

$$v_1^2 = \frac{2gr^2\pi}{G}\,\frac{(1-f\operatorname{tg}\tau)\int P dx}{1-f\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{tg}\tau+\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau^2} \qquad 141)$$

oder wegen $r^2\pi\int P dx = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2$

$$v_1^2 = 0\cdot970\,v^2.$$

Hienach vermindert sich die durch Drehung und Reibung beanspruchte Geschossarbeit um 3% der letzteren. Die

Geschwindigkeit wird also um etwa $1^1/_2{}^0/_0$, d. i. bei $v_0 = 500$ um circa $7 \cdot 5\, m$ verringert.

Da die höheren Potenzen der Werte für f und $\operatorname{tg} \tau$ vernachlässigt werden können, so geht das allgemeine Integral 138) über in den einfacheren Ausdruck

$$v^2 = \frac{C + \frac{2gr^2\pi}{G}\int P\left(1+\frac{1}{2}f \operatorname{tg}\tau - \frac{3}{4}f^2\right)dx}{1+f\operatorname{tg}\tau + \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}f^2\right)\operatorname{tg}\tau^2}. \qquad 142)$$

Hierin hat man die Ausdrücke für P und τ aus den entsprechenden Formeln einzusetzen und zu integrieren. Beim parabolischen, mit Null beginnenden Drall hat man wegen $x^2 = 2py$ den Ausdruck $\operatorname{tg}\tau = x/p$ zu benützen. Soll der Drall mit einem bestimmten Winkel α beginnen, so ist allgemein die Parabelgleichung

$$(x+m)^2 = 2p(y+n)$$

zugrunde zu legen. Aus ihr resultieren die Beziehungen

$$x+m = p\operatorname{tg}\tau, \qquad y+n = \frac{1}{2}p\operatorname{tg}\tau^2,$$

$$m = p\operatorname{tg}\alpha, \qquad n = \frac{1}{2}p\operatorname{tg}\alpha^2.$$

Bezeichnet ε den Drallwinkel am Ende des Geschossweges l, so ist

$$x = p(\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha), \quad l = p(\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\alpha), \quad \frac{x}{l} = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\alpha}, \qquad 143)$$

woraus

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + (\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\alpha)\frac{x}{l}, \qquad \frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx} = \frac{1}{l}(\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\alpha)$$

folgt. Es ist also bei bestimmtem α und ε der Drallwinkel für jeden Punkt x bekannt. Die Curvengleichung lautet

$$y = \frac{x}{2}\left[2\operatorname{tg}\alpha + \frac{x}{l}(\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\alpha)\right].$$

In der obigen Integralformel kann man tg τ durch x und P vermittels einer der früheren Gleichungen ausdrücken und man erhält schließlich den durch Reibung und Drehung des Geschosskörpers modificierten Ausdruck für die Geschwindigkeit.

§. 45.

Von Interesse ist die Bestimmung des Verhältnisses zwischen Reibung und Gasdruck. Die Formeln 134) und 137) liefern

$$\frac{fN}{Pr^2\pi} = \frac{fk^2}{r^2 \cos\tau} \frac{\operatorname{tg}\tau + \frac{G}{r^2\pi g}\frac{v^2}{P}\frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx}}{1-f\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{tg}\tau + \frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau^2}. \qquad 144)$$

Unter Einführung des Ausdruckes für v^2/P aus 82) erhalten wir bei parabolischem Drall für den speciellen Fall $m = {}^1/_2$, $i = 1$, $\rho = {}^4/_3$, $\alpha = 0$, $z = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{3/4}$

$$\frac{fN}{r^2\pi P} = \frac{fk^2}{r^2\cos\tau} \frac{1+\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{3}z+\frac{1}{12}z^2+\ldots\right)}{1+\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau^2 - f\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{tg}\tau^2} \cdot \operatorname{tg}\tau. \qquad 145)$$

Das Verhältnis zwischen Reibung und Gasdruck wächst also fast proportional der Tangente des Drallwinkels und ist außerdem besonders im weiteren Verlaufe der Bewegung noch abhängig von dem wachsenden Einflusse der Klammergröße, also vom Geschosswege, beziehungsweise von den höheren Potenzen von tg τ, da

$$z = \frac{2}{3}\left(\frac{l}{x_1}\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\varepsilon}\right)^{3/4}.$$

In jedem Moment ist demnach das genannte Verhältnis leicht zu berechnen. Bei gleichförmigem Drall ist das Verhältnis von Reibung zum Gasdruck constant. Das Integral $\int fNds$ über die ganze Drallinie liefert die Reibungsarbeit, die beim gleichförmigen Drall leicht angebbar ist.

Der volle Geschossdruck auf die Züge in der 7·5 *cm*-Kanone $L/30$ am Orte des höchsten Gasdruckes erreicht

nach den Angaben in §. 23 bei $\tau = 5°$ Drall die Höhe von $N = 9770\,kg$, wie aus 145) hervorgeht.

In Bezug auf die Anstrengung, die die in Anspruch genommenen Züge und das Geschoss zu erleiden haben, ist der aus dieser Formel errechnete Druck und dessen Druckfläche maßgebend.

Die Beanspruchung des Geschützrohres auf seine Festigkeit ist abhängig von dem jeweiligen Gasdruck und den durch das zusammengepresste Geschoss und dessen Rotation verursachten Reactionen und ist am größten im Raume zwischen Geschützboden und Ort des höchsten Gasdruckes. Die Stärke der Rohrwandung und damit der äußere Halbmesser des Rohres ist hienach eine Function des momentan herrschenden Druckes und kann, wenn nur der Gasdruck berücksichtigt wird, für die in radialer Richtung wirkenden Druckkräfte, die hier vorzugsweise in Betracht kommen, entweder nach der Winkler'schen oder auch der folgenden Formel (vergl. C. Bach, Die Maschinenelemente, S. 31)

$$r_x = r\sqrt{\frac{k_z + 0\cdot 4P}{k_z - 1\cdot 3P}}$$

berechnet werden. Hierin bedeutet k_z die zulässige Zuganstrengung in kg/cm^2, deren Größe von der Qualität des Materials bedingt ist.

Beim Krupp'schen Tiegelgusstahl geht die Proportionalitätsgrenze noch über 3000 kg hinaus, während die Zugfestigkeit bis zum Bruch die Grenze von 8000 bis 9000 kg noch überschreitet. Die Einführung der Druckformel aus 87) in die obige Gleichung liefert

$$r_x = r\sqrt{\frac{k_z + 0\cdot 4P_1 z^m e^{\frac{m}{1+m}(1-z^{1+m})}}{k_z - 1\cdot 3P_1 z^m e^{\frac{m}{1+m}(1-z^{1+m})}}} + a,$$

wo a ein Zuschlagsglied bedeutet. Im vorstehenden Ausdrucke haben wir die Curvengleichung des äußeren Meridianschnittes des Geschützrohres erhalten. Die hiernach berechneten Rohrstärken $r_x - r$ entsprechen an jedem Punkte $z = \frac{x}{x_1}$ den

jeweiligen Druckkräften der Pulvergase, wobei allerdings der äußere Mündungsradius nicht unter eine gewisse, durch extreme Gasdrucke und andere Forderungen bedingte Grenze heruntergehen darf. Praktisch verlaufen die Normalschnitte meist in geraden Linien.

§. 46.

Die durch die Geschossrotation und Reibung beeinflusste Geschossgeschwindigkeit ist, wie das allgemeine Integral 138) zeigt, beim ungleichförmigen Drall eine verwickelte Function dieser Widerstände und des sie mitbedingenden variablen Gasdruckes. Trotz dieser zahlreichen Schwierigkeiten wollen wir dennoch der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen das Integral zu bestimmen suchen. Denn es ist z. B. nothwendig, zu wissen, ob namentlich bei längeren Rohren die Bewegungshindernisse schließlich größer werden, als die treibende Kraft. Wenn dieser Moment eintritt, so ist bei langen Rohren eine Abnahme der Geschwindigkeit zu erwarten, die vermieden werden muss. Es ist jedenfalls nützlich, die Bedingungen auch für diesen neuen kritischen Moment festzustellen, um unter Umständen sich darnach richten zu können.

Um die Einfachheit und Übersicht über die Entwickelungen nicht zu verlieren, nehmen wir den Anfangsdrall gleich Null an. Um überhaupt den Formelapparat zu vermindern, setzen wir die Trägheitsconstante $\frac{k^2}{r^2} = \frac{1}{2}$ und also $n = \sqrt{2}$. Damit ist

$$S = \operatorname{tg}\tau - \frac{1}{2}f.$$

Indem wir noch die Reihe $\operatorname{arctg}\varphi = \varphi - \frac{1}{3}\varphi^3$ benützen und das fast unmerkliche zweite Glied vernachlässigen, verwandelt sich die betreffende Potenz in Formel 138) in

$$e^{\frac{3}{2}f\operatorname{tg}\tau - \frac{3}{4}f^2}.$$

Unter Benützung und Umgestaltung der Reihe

$$e^{-f\operatorname{tg}\tau} = 1 - f\operatorname{tg}\tau + \frac{1}{2}f^2\operatorname{tg}\tau^2 - \dots,$$

woraus

$$1-f\,\mathrm{tg}\,\tau = e^{-f\,\mathrm{tg}\,\tau}\left[1-\frac{1}{2}f^2\,\mathrm{tg}\,\tau^2\left(1-\frac{1}{3}f\,\mathrm{tg}\,\tau+\ldots\right)e^{f\,\mathrm{tg}\,\tau}\right],$$

gelingt es, den linksseitigen Ausdruck zum Theile in dieselbe Potenz zu bringen, wobei man den Klammerausdruck $1-R$ vor das Integralzeichen setzen kann, falls man R noch mit einem echten Bruch σ multipliciert. Also haben wir

$$(1-\sigma R)\int P dx e^{\frac{1}{2}f\,\mathrm{tg}\,\tau-\frac{3}{4}f^2},$$

$$R=\frac{1}{2}f^2\,\mathrm{tg}\,\tau^2+\frac{1}{3}f^3\,\mathrm{tg}\,\tau^3.$$

Wir führen nun die für unsere Untersuchungen geeignetste Drallcurve ein.

Wir wählen aus Gründen, die sich im folgenden rechtfertigen, die folgende höhere parabolische Drallcurve:

$$y = ax^{2+m}.$$

Indem wir den Mündungsdrallwinkel, beziehungsweise denjenigen wählen, den das Geschoss nach $x=l$ Weg passiert, und ihn mit ε bezeichnen, resultieren aus der Gleichung die folgenden

$$y=\frac{l\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}{2+m}\left(\frac{x}{l}\right)^{2+m},\qquad \mathrm{tg}\,\tau=\mathrm{tg}\,\varepsilon\left(\frac{x}{l}\right)^{1+m}.$$

Da m ein kleiner Bruch sein wird, so entfernt sich dieser Drall nur wenig vom gebräuchlichen parabolischen.

Als Druckfunction wählen wir die schon früher benützte einfachere Formel

$$P=P_1\left(\frac{x}{x_1}\right)^m e^{\frac{m}{1+m}}\,e^{-\frac{m}{1+m}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m}},$$

woraus

$$v^2=V^2\left(1-e^{-\frac{m}{1+m}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m}}\right), \tag{146}$$

$$V^2=\frac{2r^2\pi g P_1 x_1}{mG}\,e^{\frac{m}{1+m}}.\qquad \frac{x}{x_1}=z.$$

Die Einführung von P in das Integral 138) lässt augenblicklich die Integrierbarkeit desselben erkennen. Bezeichnen wir den Nenner im Integral mit N' und setzen

$$\lambda = \frac{1+m}{2m} f \operatorname{tg} \varepsilon \left(\frac{x_1}{l}\right)^{1+m} = \frac{1+m}{2m} f . \operatorname{tg} \tau_1,$$

so erhalten wir schließlich den folgenden Ausdruck

$$v^2 = \frac{2r^2\pi g P_1 x_1}{mGN'} \frac{1-\sigma R}{1-\lambda} e^{\frac{m}{1+m} - \frac{3}{4}f^2} \left[1 - e^{-\frac{m}{1+m}(1-\lambda)z^{1+m}}\right]. \quad 147)$$

Wir werden diese Gleichung, welche den Einfluss der Rotation und Reibung auf die Geschossbewegung charakterisiert, noch etwas umgestalten. Es empfiehlt sich, das folgende Verhältnis zugrunde zu legen:

$$\frac{v^2}{V^2} = \frac{1-\sigma R}{1-\lambda} \frac{e^{-\frac{3}{4}f^2}}{N'} \left[1 - e^{-\frac{m}{1+m}(1-\lambda)z^{1+m}}\right], \quad 148)$$

wo

$$N' = 1 + f \operatorname{tg} \tau + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tau^2 - \frac{3}{4} f^2,$$

wie man nach Entwickelung des betreffenden Ausdruckes für N' finden wird.

Um alle Glieder durch Exponentialausdrücke darzustellen, formen wir auch N' um in einen solchen

$$1 + f \operatorname{tg} \tau + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tau^2 - \frac{3}{4} f^2 =$$
$$= e^{f \operatorname{tg} \tau + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tau^2 - \frac{3}{4} f^2} \left(1 - \frac{1}{2} f^2 \operatorname{tg} \tau^2 - \text{etc.}\right),$$

und durch Einsetzen in den obigen Ausdruck erhalten wir

$$\frac{v^2}{V^2} = \frac{1 - \sigma \frac{1}{2} f^2 \operatorname{tg} \tau^2}{1 - \frac{1}{8} f^2 \operatorname{tg} \tau^2} \frac{e^{-f \operatorname{tg} \tau - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tau^2}}{1-\lambda} \left[1 - e^{-\frac{m}{1+m}(1-\lambda)\frac{\operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg} \tau_1}}\right]. \quad 149)$$

τ_1 bezeichnet den Drallwinkel am Orte des höchsten Gasdruckes, wofür die Gleichungen

$$\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\tau_1} = \left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m} = z^{1+m}$$

gelten.

Den ersten Bruch zur Rechten der Hauptgleichung, der noch weitere Potenzen von f und τ als die angegebenen enthält, fassen wir summarisch in den Ausdruck

$$1-\beta f^2 \operatorname{tg}\tau^2 = e^{-\beta f^2 \operatorname{tg}\tau^2}$$

zusammen und gewinnen damit die folgende Gleichung

$$\frac{v^2}{V^2} = \frac{1-e^{-\frac{m(1-\lambda)}{1+m}\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\tau_1}}}{(1-\lambda)e^{f\operatorname{tg}\tau+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\tau^2+\beta f^2\operatorname{tg}\tau^2}}. \tag{150)}$$

Vermittels dieser Formel lässt sich für jeden Punkt die entsprechende Geschossgeschwindigkeit berechnen, wobei man sich entweder der einen oder der anderen Variabeln τ, x unter Beachtung von

$$\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\tau_1} = \left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m} \tag{151)}$$

bedienen kann. Damit haben wir die Geschwindigkeit in Function z. B. des Dralls dargestellt.

§. 47.

Man kann die Frage aufwerfen, ob die Geschwindigkeit im beliebig langen Kanonenrohre eines Maximums fähig ist. Findet keine Rotation und Reibung statt, so geht die Formel in die frühere über, und die Geschwindigkeit strebt dem asymptotischen endlichen Grenzwerte V zu. Nun lässt sich schon äußerlich aus der Formel erkennen, dass die Widerstände schließlich so anwachsen werden, dass die Bewegung zur Ruhe kommt. Demnach muss ein Geschwindigkeitsmaximum vorhanden sein.

Durch Differentiieren erhalten wir die folgende Bedingungsgleichung für die Maximalgeschwindigkeit

$$e^{\frac{m(1-\lambda)}{1+m}\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\tau_1}} = 1+\frac{\frac{m}{1+m}\operatorname{cotg}\tau_1(1-\lambda)}{f+\operatorname{tg}\tau+2\beta f^2\operatorname{tg}\tau}, \tag{152)}$$

oder wenn wir für β den Mittelwert $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\tau}{f}$ einführen, wobei es wegen des kleinen λ auf dessen Berücksichtigung hier nicht wesentlich ankommt:

$$e^{\frac{m}{1+m}\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\tau_1}} = 1 + \frac{\frac{m}{1+m}\cot\tau_1(1-f\operatorname{tg}\tau)}{f+\operatorname{tg}\tau}. \qquad 153)$$

Sobald man hieraus durch Versuche $\operatorname{tg}\tau$ ermittelt hat, ist der Ort der größten Geschwindigkeit nach 151) bekannt.

Bevor wir eine Anwendung von dieser Formel geben, wollen wir sie zuerst auf ihre Richtigkeit prüfen.

Demzufolge erinnern wir daran, dass, weil im Punkte der größten Geschwindigkeit $dv/dt =$ Null ist, nach 134) die Beziehung

$$Pr^2\pi = N(\sin\tau + f\cos\tau)$$

erfüllt sein muss, welche Relation die Bedingung: Druck gleich Widerstand erfüllt. Die Einführung dieser Formel in 144) und die Substitution der Werte für P, v etc. lässt aus der Grenzgleichung

$$\frac{k^2}{r^2}\frac{d\operatorname{tg}\tau}{dx} = \frac{(1-f\operatorname{tg}\tau)}{f+\operatorname{tg}\tau}\cdot\frac{r^2\pi g P}{Gv^2}$$

die folgende Bedingungsgleichung

$$e^{\frac{m}{1+m}\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\tau_1}} = 1 + \frac{\frac{m}{1+m}\cot\tau_1(1-f\operatorname{tg}\tau)}{f+\operatorname{tg}\tau} \qquad 154)$$

für den Punkt höchster Geschwindigkeit hervorgehen.

Man erkennt die schöne Übereinstimmung dieses Ausdruckes mit dem wohl durchaus einwandfrei abgeleiteten vorigen in 153), womit man das bezeichnete Problem wohl als vollständig gelöst betrachten kann.

Anwendung auf die preußische schwere Feldkanone *C*/73. Die Constanten mögen folgende Werte haben, wobei man sich indessen das Rohr beliebig verlängert denken muss. Bei der Lauflänge $x = l = 1{\cdot}6$ z. B. sei der Drallwinkel

$\varepsilon = 9° 27' 40''$ oder $\operatorname{tg} \varepsilon = {}^1/_6$, ferner (nach einer Mittheilung Krupps) $f = 0 \cdot 16$, und m setzen wir wie früher $= {}^1/_5$ und endlich $x_1 = 0 \cdot 200$, also $l/x_1 = 8$.

Die Berechnung liefert als Drallwinkel am Orte der größten Geschwindigkeit $\operatorname{tg} \tau = 0 \cdot 28$ oder $\tau = 15° 40'$ und

$$x = 1 \cdot 54 \,.\, 1 \cdot 6 = 2 \cdot 064 \, m.$$

Hienach würde die etwa durch Anschrauben weiterer Rohrtheile verlängerte Kanone nach einem Geschosswege von über 2 m die unter den gegebenen Bedingungen zulässige höchste Geschwindigkeit, deren sie fähig ist, erreichen.

Da $V = 473 \cdot 4$, so müsste die gesuchte Geschwindigkeit nach 146)

$$v = V \sqrt{0 \cdot 8699} = 441 \, m$$

betragen, die die Mündungsgeschwindigkeit von 415 m noch um 26 m übersteigt. Von diesem Moment an nimmt die Geschwindigkeit in der Bohrung unendlich ab.

Die 42 cm-Kanone von Krupp hat 12·7 m Seelenlänge. Es ist klar, dass diese Ausdehnung groß genug ist, um nach dem oben Entwickelten, für den Fall eines unzweckmäßigen Dralls auf die Geschossführung und -Arbeit einen nachtheiligen Einfluss auszuüben.

Wir bemerken noch, dass es im Interesse der Theorie läge, wenn die im Rohr thatsächlich herrschenden Drucke einwandfrei bestimmt werden könnten.

§. 48.

Die entwickelten Beziehungen über die Widerstandskräfte in der Bohrung geben noch Veranlassung zu weiteren Folgerungen der Bewegung.

Man denke sich in zwei Rohren dieselben Druckkräfte auf gleich schwere Geschosse in dem Sinne ausgeübt, dass im ersten Rohre keine, im zweiten dagegen die genannten Widerstände wirksam sind. Trotzdem also die Druckkräfte an allen homologen Punkten dieselbe Größe haben, sind die Geschwindigkeiten ungleich, und die betreffende Geschwindigkeitscurve des zweiten Rohres liegt tiefer, als die des ersten. Construieren

wir nun rückwärts aus der Geschwindigkeitscurve des ersten Rohres die Druckcurve, so kommen wir wieder genau auf die ursprüngliche Druckcurve zurück, dagegen würde die analoge des zweiten Rohres nicht mehr eben dieselbe, sondern eine andere, und zwar eine tieferliegende Curve liefern. Der Unterschied in den Druckordinaten kommt auf Rechnung der Widerstandskräfte. Man erkennt, dass es die Ordinaten der kleineren Druckcurve sind, die durch den Rücklaufmesser angezeigt werden, da ja die gemessenen translatorischen Geschwindigkeiten nur auf diese zurückgeführt werden können. Die obigen Formeln gewähren die Möglichkeit, die Druckkräfte unter Berücksichtigung der durch die Rotation hervorgerufenen zu berechnen und die Größe der Widerstände an jedem Orte festzustellen. Es ist klar, dass man nur die Gleichung für v nach τ oder x zu differentiieren hat, um die den wirklichen Verhältnissen entsprechende Druckcurve zu erhalten, die nunmehr auch eine Function der Widerstände ist. Führen wir die Rechnung aus und bezeichnen mit P' den entsprechenden (kleineren) und wie früher mit P den ursprünglichen Druck im Punkte x, so ist

$$\frac{P'}{P} = \frac{1 - \frac{2\lambda}{1-\lambda}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\tau}{f}\right)\left(e^{\frac{1-\lambda}{2\lambda} f \operatorname{tg}\tau} - 1\right)}{e^{\frac{1}{2} f \operatorname{tg}\tau + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\tau^2}}. \qquad 155)$$

Diese noch sehr einfache Formel lässt das Verhältnis des durch den Rücklaufmesser oder Velocimeter errechneten Druckes zu dem durch den Stauch- oder Schnittapparat gemessenen leicht berechnen, wobei man sich der Formeln

$$\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\tau_1} = \left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m}, \quad \lambda = \frac{1+m}{2m} f \operatorname{tg}\tau_1, \quad \operatorname{tg}\tau_1 = \operatorname{tg}\varepsilon\left(\frac{x_1}{l}\right)^{1+m}$$

bedienen kann. Es ist der Mündungsdrallwinkel der Curve

$$y = \frac{l \operatorname{tg}\varepsilon}{2+m}\left(\frac{x}{l}\right)^{2+m}. \qquad 156)$$

In welcher Weise die Drallcurve, beziehungsweise der Exponent m von der Druckcurve abhängt, zeigt die Druckgleichung.

Um nun in Zahlen das obige Verhältnis festzustellen, benützen wir wieder die gegebenen Werte: $f = 0 \cdot 16$, $\operatorname{tg} \varepsilon = {}^1/_6$, $m = {}^1/_5$, $l = 1 \cdot 6$, $x_1 = 0 \cdot 2$, woraus $\lambda = {}^1/_{150}$, und man hat an der Mündung

$$\frac{P_0'}{P_0} = 0 \cdot 803.$$

Hienach ist durch die Einwirkung der Rotation und Reibung an der Mündung nur noch ${}^4/_5$ des Gasdruckes vorhanden, der dort herrschen würde, wenn keine Widerstände dieser Art eingewirkt hätten. Da nun nach den Messungen mit dem Rücklaufmesser der betreffende Mündungsgasdruck $P_0' = 310\,kg$ betrug, so musste ein um $25\,^0/_0$ größerer Überdruck von $388\,kg$ vorhanden sein, um die durch jene Widerstände verursachten Arbeitsverluste zu decken.

Indem wir so an allen Punkten der Druckcurve verfahren und die betreffende Überdruckcurve mit der gemessenen graphisch eintragen, erhalten wir ein lehrreiches Bild über die Wirkungsweise dieser Kräfte. Die Differenz der Druckflächen repräsentiert die durch diese Widerstände herbeigeführte verbrauchte Arbeit. Die Geschwindigkeitsverhältnisse ergeben sich aus

$$\frac{v'^2}{v^2} = \frac{1}{(1-\lambda)\, e^{f \operatorname{tg} \tau + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tau^2}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{1-\lambda}{2\lambda} f \operatorname{tg} \tau}}{1 - e^{-\frac{f \operatorname{tg} \tau}{2\lambda}}}. \qquad 157)$$

Wir haben auch hiebei $\beta = 0$ angenommen, da das betreffende Correctionsglied fast belanglos ist. Will man es einführen und β etwa $= 1$ setzen, so würde das Glied $f \operatorname{tg} \tau + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tau^2$ noch um $f^2 \operatorname{tg} \tau^2$ vermehrt werden, was wohl praktisch nicht ins Gewicht fällt.

Man findet

$$\frac{v_0'^2}{v_0^2} = 0 \cdot 977.$$

Bis zur Mündung wurde hienach gegen $2 \cdot 3\,^0/_0 = {}^1/_{43}$ an lebendiger Kraft oder Geschossarbeit eingebüßt, was verhältnis-

mäßig wenig ist und seinen Grund darin hat, dass die Druckcurven wegen des geringen Dralls zu Anfang sich nur wenig voneinander entfernen. So weicht am Orte des höchsten Gasdruckes das obige Druckverhältnis nur um $\frac{1}{380}$ von der Einheit ab. Im späteren Verlaufe wirkt der steigende Drall aber weit einflussreicher ein.

Will man beim obigen Druckverhältnisse die Beziehungen der einzelnen Elemente zueinander rascher übersehen, so empfiehlt es sich, die Glieder in Reihen aufzulösen. Man erhält sehr einfache Formeln. Es ist dabei nützlich, zu beachten, dass kleineren m-Werten Druckcurven langsamer verbrennenden Pulvers entsprechen, während die Drallcurven sich der gemeinen Parabel nähern.

§. 49.

Der vorhin behandelte Specialfall lässt sich erweitern, und wir erhalten, wenn wir die früheren und allgemeineren Druckgesetze benützen, eine Grundlage von großer Allgemeinheit. Wählen wir z. B. die Druckformel

$$P = P_1 z^m e^{\rho m\left(1-z^{\frac{1}{\rho}}\right)}, \qquad \rho(1+m) = 1+i \tag{158}$$

und führen sie ein in das Integral

$$N'v^2 = \frac{2gr^2\pi}{G}\int P dx(1-R)e^{\frac{1}{2}f \operatorname{tg}\tau - \frac{3}{4}f^2},$$

so lässt sich dasselbe unter leicht anzugebenden Bedingungen integrieren. Wir deuten indessen die Formel nur an, setzen aber größerer Allgemeinheit wegen einen Anfangsdrall α voraus. Beginnen die Züge mit $x =$ Null, so wird $C =$ Null. Es sei

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + Az^{\frac{1+m}{1+i}}, \qquad z = \frac{x}{x_1}, \tag{159}$$

woraus

$$A = \operatorname{tg}\tau_1 - \operatorname{tg}\alpha.$$

Dann ist die Drallgleichung

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + A x_1 z^{\frac{1+m}{1+i}+1},$$

die also wieder eine höhere Parabel darstellt.

Bezeichnen wir wieder mit λ den folgenden Ausdruck

$$\lambda = \frac{1+m}{2m} \frac{f(\operatorname{tg} \tau_1 - \operatorname{tg} \alpha)}{1+i},$$

so ergibt sich nach einer Reihe von Reductionen

$$\frac{v^2}{V^2} = (1-\sigma R) \frac{e^{\frac{1}{2} f \operatorname{tg} \alpha - \frac{3}{4} f^2}}{N' 1.2.3 \ldots i} \int \omega^i e^{-(1-\lambda)\omega} d\omega, \qquad 160)$$

$$\omega = m\rho \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1+m}{1+i}} = m\rho \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Da i eine ganze Zahl sein soll, so ist das Integral bestimmbar und man erhält damit die Lösung der verallgemeinerten Aufgabe. Für $i = 0$ und $\alpha = 0$ erhält man die vorhergehende. Die früher von uns vielbenützten Werte $\rho = \frac{4}{3}$, $m = \frac{1}{2}$, $i = 1$ geben als Drallcurve

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + (\operatorname{tg} \tau_1 - \operatorname{tg} \alpha) x_1 \left(\frac{x}{x_1}\right)^{7/4}.$$

Das Integral ist leicht angebbar.

Es lassen sich aus den allgemeinen Beziehungen z. B. zwischen Druck und Widerstand noch manche interessante Folgerungen ziehen. Man kann z. B. fragen, von welcher Art die Drallcurve sein müsste, wenn der gesammte Widerstand ein bestimmter Bruchtheil η des Gasdruckes sein soll. Hienach wäre also die Bedingung

$$\frac{N(\sin \tau + f \cos \tau)}{P r^2 \pi} = \eta \qquad 161)$$

in die Gleichung einzusetzen und dieselbe zu integrieren. Die Differentialgleichung der Drallcurve lautet

$$\frac{dv}{v}\left[\frac{\eta}{f+\operatorname{tg}\tau}\left(1-f\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)\operatorname{tg}\tau+\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau^2\right)-\frac{k^2}{r^2}\operatorname{tg}\tau\right]=$$

$$=\frac{k^2}{r^2}\,d\operatorname{tg}\tau \qquad 162)$$

und ergibt die Geschwindigkeit in Function von $\operatorname{tg}\tau$. Es ist dabei ein fester Anfangspunkt zu wählen, dem die Werte $v_1\tau_1$ entsprechen. Von Interesse ist der Fall $\eta=1$ oder η in Function von $\operatorname{tg}\tau$, wodurch die Rechnung erleichtert wird.

Die Gleichungen 146) haben sich bisher recht brauchbar erwiesen, und ihre Einfachheit gibt noch die Möglichkeit zur Bestimmung verschiedener Werte.

So lässt sich mit ihrer Hilfe das Verhältnis L_y/L in Function der Geschwindigkeit ausdrücken, und man hat nach einigen Entwickelungen

$$\frac{L_y}{L}=\frac{\frac{1+m}{m}\cdot P_1 x_1 e^{\frac{m}{1+m}}\frac{v^2}{V^2}\left(1-\frac{1}{1.2}\frac{v^2}{V^2}-\frac{1}{2.3}\frac{v^4}{V^4}-\frac{1}{3.4}\frac{v^6}{V^6}\cdots\right)}{f\Delta-a(1-\alpha\Delta)P_1\left(\frac{1+m}{m}e\right)^{\frac{m}{1+m}}\left(1-\frac{v^2}{V^2}\right)\left(\frac{v^2}{V^2}+\frac{1}{2}\frac{v^4}{V^4}\cdots\right)^{\frac{m}{1+m}}}.$$

Man erkennt schon an dieser ziemlich complicierten Gleichung, dass das jeweilig verbrannte Pulverquantum keiner einfachen Potenz irgendwelcher Variablen gleichgesetzt werden kann, weshalb auch durchaus von den durch Messung ermittelten Curven ausgegangen werden musste.

§. 50.

Von besonderem Interesse für den Constructeur ist die Kenntnis der Drehungsbeschleunigung des Geschosses, da durch diese die Festigkeit des Materials in besonderem Maße auf die Probe gestellt wird. Mit dem Drucke der Pulvergase und der anwachsenden Geschwindigkeit wächst diese Beschleunigung namentlich zu Anfang der Geschossbewegung sehr stark an. Bei unzweckmäßigem Drall ist eine rasche Abnützung der Züge und unsichere Geschossbewegung die unmittelbare Folge. In den meisten Artillerien und bei Krupp wohl ausschließlich wird die parabolische Drallcurve benützt,

da sie gegenüber anderen, z. B. dem gleichförmigen Drall, einige Vorzüge besitzt. Bei letzterem tritt am Orte des höchsten Druckes die Winkelbeschleunigung sehr stark auf, so dass die Gefahr des Zerdrückens und Zerdrehens des Geschosses hier sehr groß ist. Wiewohl nun beim parabolischen Drall die Curve der Winkelbeschleunigung nicht den gleichen hohen Anstieg aufweist und auch der Endtheil der Curve nur in mäßigem Bogen verläuft, wird trotzdem im ersten und wichtigsten Verlaufe der Bewegung, bei denen selbst Stöße nicht ausgeschlossen sind, Geschütz wie Geschoss sehr stark auf Druck- und Drehungsfestigkeit beansprucht, so dass eine Verringerung der durch Druck und Drehung hervorgerufenen Reactionskräfte wünschenswert erscheint. Eine directe Lösung dieser Aufgabe ist deshalb sehr schwierig, weil die Drallcurve, da sie selbst auf den Druck Einfluss ausübt, eine Function des veränderlichen Gasdruckes ist.

Aus der Differentialgleichung der Drallcurve

$$\frac{r d^2 \varphi}{dt} = \frac{P r^2 \pi g}{G} \operatorname{tg} \tau + v^2 \frac{d \operatorname{tg} \tau}{dx} \qquad 163)$$

ersieht man, wie bedeutsam das dritte Glied dieser Gleichung werden kann. Mit steigendem Drall wird sein Einfluss umso rascher wachsen, je größer die Geschwindigkeit wird. Bei parabolischen Zügen, bei welchen wegen $\operatorname{tg} \tau = x/p$ $d \operatorname{tg} \tau$ constant bleibt, ist der nachtheilige Einfluss der Steigung des Winkels nur mäßig groß, und er verschwindet hinsichtlich dieses Gliedes bei gleichförmigem Drall, da hier $d \operatorname{tg} \tau = 0$ ist, wobei dann aber wieder das zweite Glied gerade an der kritischen Stelle unliebsamen Einfluss ausübt. Allerdings fällt dann die Curve sehr rasch in gleichem Verhältnisse mit dem stark abnehmenden Gasdrucke.

In Bezug auf die Winkelbeschleunigung $\frac{d^2 \varphi}{dt}$ kann man nun passende Annahmen machen, z. B. die, dass sie constant sei oder mit der Zeit oder dem Orte stetig zunehme u. s. w. Führen wir aus 87) die Werte für P und v in 163) ein, so geht sie für $i = 0$ etc. über in

$$\frac{x_1 r}{V^2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m z^m e^{-\frac{m}{m+1} z^{m+1}} \operatorname{tg}\tau + \left(1 - e^{-\frac{m}{m+1} z^{m+1}}\right) \frac{d \operatorname{tg}\tau}{dx} \qquad 164.$$

$$\frac{r d\varphi}{dt} = v \operatorname{tg}\tau, \qquad y = r \int \frac{d\varphi}{v dt}.$$

Die erste Gleichung liefert $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ in Function des Geschossweges, sobald über die Art, wie die Züge verlaufen sollen, eine Annahme gemacht worden ist. Wird die Beschleunigung $=$ Null angenommen, was auf die Beziehung $\varphi = Ct$ oder eine gleichförmige Rotationsbewegung führt, so geht die obige zweite Gleichung über in

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{C}{V\sqrt{1-e^{-u}}}, \qquad u = \frac{m}{m+1}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{m+1}.$$

Die Bedingung gleichförmiger Bewegung ist also an eine fortgesetzte Abnahme des Drallwinkels geknüpft, deren jeweilige Größe aus dem vorstehenden Ausdrucke, und deren Gleichung aus dem Integral

$$y = \frac{C}{V} \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-u}}} \qquad 165$$

herzuleiten ist. Der Anfangspunkt ist nicht bei $x = 0$, sondern eine Strecke weiter anzusetzen, und man hat hiefür den Drallwinkel $\tau = \tau_a$ als beliebig gegeben einzuführen und die Constante darnach so zu bestimmen, dass die Winkelgeschwindigkeit φ_a ihre bestimmte Größe hat. Die constante Rotation entlastet zwar das Geschütz hinsichtlich der auftretenden Widerstände im Rohre, sie vermag aber infolge des abnehmenden Dralls dem Geschosse nicht die nothwendige Anzahl der Umdrehungen zu geben, die zur Flugstabilität nothwendig sind.

Die Annahme einer gleichmäßig beschleunigten Rotationsgeschwindigkeit führt auf die Beziehung

$$\varphi = \frac{1}{2} c t^2, \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = c, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = v \operatorname{tg}\tau$$

und auf die entsprechende Gleichung für $\operatorname{tg}\tau = \frac{ct}{v}$. Auch hier ist die Bewegung am geeigneten Orte in die Wege zu leiten und der Anfangspunkt passend anzusetzen. In die letzte Gleichung sind die v- und t-Werte aus den entsprechenden Gleichungen einzusetzen, wodurch man $\operatorname{tg}\tau$ in Function von x erhält.

Die Winkelbeschleunigung beim parabolischen Drall ergibt sich aus 163), wenn darin die Formeln $\operatorname{tg}\tau$ etc. aus 143) eingesetzt werden:

$$\frac{r d^2\varphi}{dt^2} = \frac{P r^2 \pi g}{G}\left[\operatorname{tg}\tau_a + \frac{x}{l}(\operatorname{tg}\tau_e - \operatorname{tg}\tau_\alpha)\right] + \\ + \frac{v^2}{l}(\operatorname{tg}\tau_e - \operatorname{tg}\tau_\alpha). \quad 166)$$

Man kann hierin die allgemeinen Gleichungen für P und v aus den früheren Entwickelungen einführen oder auch, wenn der Verlauf der Druck- und Geschwindigkeitscurven graphisch fixiert ist, diese Werte den letzteren entnehmen. Da P erst zu- und dann abnimmt, so ist der Verlauf der durch die Formel charakterisierten Curve zu Anfang der Bewegung ein rasch aufsteigender, während Mitte und Ende der Curve eine ruhigere Tendenz behaupten, indem sie mehr der x-Axe parallel laufen. Immerhin aber ist die Drehbeschleunigung am Orte des höchsten Gasdruckes sehr hoch.

Differentiieren wir die obige Gleichung und benützen die Formel 95), so erhalten wir

$$\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\tau_\alpha}{\operatorname{tg}\tau_e - \operatorname{tg}\tau_\alpha} \cdot \frac{l}{x}\right)\left(\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} - 1\right) = \frac{3}{m}. \quad 167)$$

Unter Anwendung auf die 1. Aufgabe in §. 41 wollen wir hiefür den Ort des Maximums der Winkelbeschleunigung rechnerisch bestimmen.

Es sei $\tau_\alpha = 4°$, $\tau_e = 7°$, $l = 1{\cdot}615$, dann führt die Annahme $m = {}^2/_3$, $\rho = {}^9/_5$ bezüglich der Gleichungen in 80) auf die in jenem Beispiele gefundenen Werte für v etc. Da nun

$x_1 = 0 \cdot 125\, m$, so ergibt die obige Gleichung durch ein Annäherungsverfahren, dass der gesuchte Ort der maximalen Winkelbeschleunigung durch $x = 0 \cdot 250\, m$ bestimmt ist, wie dies auch den bekannten Curven der Winkelbeschleunigung des parabolischen Dralls sehr gut entspricht.

Ist bei gleichem Enddrall der Anfangsdrall kleiner, z. B. statt 4° nur 3°, so rückt das Maximum weiter vorwärts, was ebenfalls durch die graphischen Darstellungen erwiesen wird. Bei gleichförmigem Drall fällt das Maximum mit dem des Druckes zusammen, wie das auch aus der obigen Gleichung hervorgeht, wenn $\tau_e = \tau_\alpha$ gesetzt wird.

§. 51.

Man kann die Frage aufwerfen, ob nicht bestimmte andere Curven aufgefunden werden könnten von der Eigenschaft, dass die durch sie bedingte Winkelbeschleunigung in der Nähe des höchsten Gasdruckes auf ein kleineres Maß sich reduciere, als es thatsächlich noch immer beim parabolischen Drall der Fall ist, und zwar unbeschadet der sicheren Geschossführung und der Stabilität überhaupt. Die zu suchende Drallcurve dürfte also hinsichtlich der Winkelbeschleunigung beim Druckmaximum eine gewisse Größe nicht überschreiten und müsste bei beliebigem Anfangsdrall einen solchen Enddrall aufweisen, wie er durch die Stabilitätsbedingungen des Geschosses geboten ist.

Vielleicht führen die nachstehenden theoretischen Erwägungen zu einem praktisch nützlichen Resultate.

Die Curve hätte folgende Bedingungen zu erfüllen:

Sie beginnt mit einem gewissen Anfangsdrall von übrigens beliebigem Grade. Ihr anfänglicher Verlauf wird charakterisiert durch einen abnehmenden Drallwinkel, dessen Minimum so zu wählen ist, dass der weitere Verlauf in steigender Tendenz zu dem gewünschten Enddrall an der Mündung führt. Diese Bedingungen führen, wie man sieht, zu einer Curve mit einem Wendepunkte. Wir werden denselben so legen, dass das die Winkelbeschleunigung sehr beeinflussende Glied

$$v^2 \frac{d \operatorname{tg} \tau}{dx}$$

im ersten Verlaufe einen negativen Wert besitzt. Die Gleichung der Curve ist

$$(y+a)^2 = be^{\frac{x}{c}}+d. \tag{168}$$

Wir leiten aus ihr, ohne die Zwischenrechnungen hier auszuführen, die nothwendigen Beziehungen zwischen den genannten Größen ab.

Die Drallwinkel zu Anfang, im Wendepunkte und zu Ende der Züge mögen heißen $\tau_a\, \tau_1\, \tau_e$. Für die laufenden Coordinaten $xy\tau$ gewinnen wir dann aus der Definitionsgleichung die folgende

$$\frac{y}{x_1} = \frac{\operatorname{tg}\tau_1\sqrt{2c^{\frac{x}{x_1}-1}-1}-\operatorname{tg}\tau_a(2-c)}{lnc},$$

$$c = 1+\sqrt{1-\frac{\operatorname{tg}\tau_1^2}{\operatorname{tg}\tau_a^2}}. \tag{169}$$

Der Tangentenwinkel im Punkte xy ergibt sich aus

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\operatorname{tg}\tau_1 . c^{\frac{x}{x_1}-1}}{\sqrt{2c^{\frac{x}{x_1}-1}-1}}, \tag{170}$$

woraus noch

$$c^{\frac{x}{x_1}-1} = \frac{1}{1\pm\sqrt{1-\frac{\operatorname{tg}\tau_1^2}{\operatorname{tg}\tau^2}}} \tag{171}$$

folgt, und bezieht sich das obere Zeichen auf den aufsteigenden, und das untere Zeichen auf den absteigenden Ast der Curve. Die letzte Gleichung liefert x in Function von τ. Weiter ist

$$\frac{x}{x_1} = 1-\frac{ln\left(1\pm\sqrt{1-\frac{\operatorname{tg}\tau_1^2}{\operatorname{tg}\tau^2}}\right)}{lnc}, \tag{172}$$

$$\frac{y}{x_1}\cdot lnc = \operatorname{tg}\tau \mp\sqrt{\operatorname{tg}\tau^2-\operatorname{tg}\tau_1^2}-\operatorname{tg}\tau_a+\sqrt{\operatorname{tg}\tau_a^2-\operatorname{tg}\tau_1^2},$$

welche Gleichungen x und y in Function von τ geben. Die Ordinate der Drallcurve im Wendepunkte und der Differentialquotient folgen aus

$$\frac{y_1}{x_1} lnc = \sqrt{\operatorname{tg} \alpha^2 - \operatorname{tg} \tau_1^2} - (\operatorname{tg} \tau_\alpha - \operatorname{tg} \tau_1), \tag{173}$$

$$\frac{d \operatorname{tg} \tau}{dx} = \frac{\operatorname{tg} \tau . lnc}{x_1 \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg} \tau_1^2}{\operatorname{tg} \tau^2}}}\right)}. \tag{174}$$

Die Gleichung für die Winkelbeschleunigung wird also nach Einführung dieses Ausdruckes

$$\frac{rd^2\varphi}{dt^2} = \frac{r^2\pi g}{G} P \operatorname{tg} \tau + \frac{lnc}{x_1} \frac{v^2 \operatorname{tg} \tau}{1 \mp \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg} \tau_1^2}{\operatorname{tg} \tau^2}}}}. \tag{175}$$

Damit haben wir die für die Rechnung wesentlichen Gleichungen aufgestellt, und es erübrigt noch, dieselben auf einen speciellen Fall anzuwenden und mit den für den parabolischen Drall erhaltenen Resultaten zu vergleichen.

Führt man ein

$$c^{\frac{x}{x_1} - 1} = \sigma, \qquad \left(\frac{x}{x_1} - 1\right) lnc = ln\sigma,$$

so ergibt sich

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\sigma \operatorname{tg} \tau_1}{\sqrt{2\sigma - 1}}, \tag{176}$$

und

$$\frac{rd^2\varphi}{dt^2} = \left(\frac{r^2\pi g}{G} P + \frac{lnc}{x_1} \frac{\sigma - 1}{2\sigma - 1} \cdot v^2\right) \operatorname{tg} \tau.$$

Hienach sind alle Vorbereitungen so weit getroffen, um die Berechnung der Winkelgeschwindigkeit vornehmen zu können. Denn c ist bekannt durch den gegebenen Anfangs- und entsprechenden Mitteldrall τ_1, also auch σ und damit für jedes x das zugehörige τ. Die am besten aus den graphischen

Darstellungen zu entnehmenden Werte von P und v lassen schließlich die entsprechende Winkelbeschleunigung für jeden Punkt des Geschossweges berechnen. Die Curvengleichung der Züge ist

$$\frac{y}{x_1} = \frac{\operatorname{tg}\tau_1\sqrt{2\sigma-1}-\operatorname{tg}\tau_a(2-c)}{lnc}. \qquad 177)$$

Um den Verlauf dieser durch die vorstehenden Formeln definierten Curve mit dem durch den parabolischen Drall bedingten zu vergleichen, haben wir auf Grundlage der schon oft benützten Krupp'schen Data der 7·5 *cm*-Kanone die nachfolgende Tabelle berechnet, deren graphische Darstellung in Fig. 2 den Überblick erleichtert.

Wir benützen: $G = 6\cdot35\,kg$, $r^2\pi = 45\cdot42\,cm^2$, $l = 1\cdot8\,m$.

Im Geschütze verlaufen die Züge in einer Parabel: Anfangsdrall $\tau_a = 3°\,35'40''$, Enddrall $\tau_e = 5°\,58'41''$.

Die erste Verticalspalte gibt die Geschosswege, die zweite die entsprechenden Gasdrucke in Kilogrammen und die dritte die Geschossgeschwindigkeiten an.

Die vierte enthält die Drehbeschleunigungen für den parabolischen Drall, nach welcher die Curve D entworfen ist.

Die fünfte Verticalspalte enthält die Tangentenwinkel unserer Curve von gleichem Anfangs- und Enddrall $\tau_a = \tau_e = 5°\,58'41'$. Ihr Drall nimmt zuerst bis auf $\tau_1 = 4°\,59'13''$ ab und dann wieder zu. Der Wendepunkt liegt im Abstande $x_1 = 0\cdot6363\,m$ vom Anfangspunkte.

Die sechste Spalte gibt die entsprechenden Drehbeschleunigungen dieser Curve E wieder, deren Figur erkennen lässt, dass sie zu Anfang etwas rascher und höher als die parabolische ansteigt, dann aber im langen Laufe beträchtlich unter die letztere hinuntergeht.

$x\,(m)$	$P\,(kg)$	$v\,(m)$	$\frac{rd^2\varphi}{dt^2}\,(km)$ Parabel	τ	$\frac{rd^2\varphi}{dt^2}\,(km)$ Curve E
0·1	1750	140	8·453	5° 34′ 40″	10·914
0·15	1850	180	10·939	5 26 20	10·939
0·2	1860	215	9·881	5 19 40	10·550
0·3	1680	270	10·194	5 10 —	9·042

$x(m)$	$P(kg)$	$v(m)$	$\frac{rd^2\varphi}{dt^2}(km)$ Parabel	τ	$\frac{rd^2\varphi}{dt^2}(km)$ Curve E
0·4	1530	310	9·979	5° 4′ —″	8·248
0·6	1136	367	9·254	4 59 —	6·726
0·8	847	405	8·656	5 1 —	6·198
1·0	680	430	8·410	5 7 —	6·353
1·2	578	450	8·392	5 16 —	6·875
1·4	496	465	8·351	5 28 —	7·493
1·6	434	477	8·341	5 42 —	8·185
1·8	392	490	8·467	5 58 —	9·071

Verändern wir die Constanten der letzten Curve, etwa so, dass wir einen kleineren Anfangsdrall einführen, so zeigt die veränderte Curve zu Anfang zwar einen mäßigeren Anstieg, aber zu Ende einen umso höheren Aufstieg, der sich auch schon in obiger Curve andeutet. Derselbe wird in allen Fällen umso größer, je kleiner bei constantem Enddrall der Geschossweg ist. Es führt also zu nichts, etwa durch kleineren Drall beim Beginne der Bewegung das Geschütz und Geschoss um einen Theil seiner Drehbeanspruchung zu entlasten. Denn die Bedingung, dass das Geschoss an der Mündung die für die Flugstabilität erforderliche Anzahl der Umdrehungen zu machen hat, die ihrerseits wieder eine vorgeschriebene Höhe des Enddralls voraussetzen, verlangt eine umso stärkere Drehbeschleunigung zu Ende des Rohres, je kleiner dieselbe zu Anfang war. Augenscheinlich wird der Constructeur diejenige Curve wählen, die zwischen beiden Extremen in der Mitte liegt. Daher wird, so lange nichts besseres bekannt ist, der parabolische Drall wohl noch einige Zeit die Züge der Seele beherrschen, weil er einen sehr ruhigen Verlauf und damit eine mäßige Beanspruchung des Materials auf Abdrehen und Zusammendrücken zur Folge hat

Inwieweit unsere Curve des ab- und zunehmenden Dralls praktischer Anwendung fähig wäre, vermögen wir nicht zu entscheiden. Ein Versuch verlohnte sich vielleicht der Mühe, die hauptsächlich in der schwierigeren Herstellung der Züge liegen dürfte.

§. 52.

Anstatt des indirecten Weges, aus den Eigenschaften einer gesetzmäßigen Drallcurve die unbekannten Eigenschaften der Curve der Drehbeschleunigung zu gewinnen, kann man auch umgekehrt sich des directen Weges bedienen: aus der vorgeschriebenen Beschleunigungscurve die entsprechende Dralllinie abzuleiten.

Die Grundlage hiefür bildet die Gleichung

$$\frac{r d\varphi}{dt} = v \operatorname{tg} \tau. \tag{178}$$

Die Beschleunigungscurve möge die folgende, den parabolischen höheren Curven angehörige Gleichung

$$\frac{r d^2\varphi}{dt^2} = A\left(\frac{x}{x_1}\right)^k. \qquad \frac{x}{x_1} = z \tag{179}$$

besitzen. Aus ihr folgt

$$\frac{r d\varphi}{dt} = A\int\frac{z^k}{v}\,dx,$$

woraus mit der obigen ersten die folgende

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{A x_1}{v}\int\frac{z^k}{v}\,dz, \tag{180}$$

die die Richtung der hypothetischen Curve, und die weitere

$$y = A x_1^2 \int\frac{dz}{v}\int\frac{z^k}{v}\,dz, \tag{181}$$

die die Gleichung derselben charakterisiert, hervorgeht.

Es bedarf also nur der Kenntnis der Geschossgeschwindigkeit, um die verlangte Curve im Integralausdrucke zu besitzen. Wir greifen auf die in §. 32 aufgestellten Formeln zurück, die sich durch ihre Einfachheit empfehlen und auch der Integration keine Schwierigkeiten machen.

$$v = V\sqrt{1-e^{-u}}, \qquad u = \frac{m}{1+m} z^{1+m}$$

$$V^2 = \frac{2r^2\pi g}{Gm} P_1 x_1 e^{\frac{m}{1+m}}. \qquad 182)$$

Über die Constanten A und k ist so zu verfügen, dass sie den Bedingungen des geforderten Verlaufes der Drehbeschleunigungscurve genügen. k ist im allgemeinen ein echter Bruch, der umso kleiner ist, je steiler die Curve aufsteigt.

Also haben wir

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{Ax_1}{V.v}\int \frac{z^k dz}{\sqrt{1-e^{-u}}} =$$

$$= \frac{Ax_1}{mV.v}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{k-m}{m+1}} \int \frac{u^{\frac{k-m}{m+1}}}{\sqrt{1-e^{-u}}} du$$

$$y = C\int \frac{u^{-\frac{m}{1+m}}}{\sqrt{1-e^{-u}}} du \int \frac{u^{\frac{k-m}{1+m}}}{\sqrt{1-e^{-u}}} du, \qquad 183)$$

$$C = \frac{Ax_1^2}{m^2V^2}\left(\frac{1+m}{m}\right)^{\frac{k-2m}{1+m}}.$$

Wie wir an einem früheren Beispiele nachgewiesen, ist auch der Coefficient m ein echter Bruch, der sich aus den entsprechenden Versuchen berechnen lässt. Derselbe hängt von den verschiedenen Pulversorten ab und muss im gegebenen Falle erst ermittelt werden. Ist der Anschluss an die Geschwindigkeitscurve nicht hinreichend genau, so hat man andere Formeln zu wählen, die den graphischen Darstellungen besser genügen.

Die Integration verlangt die Entwickelung der obigen Ausdrücke in Reihen nach Potenzen von u. Ist $m = {}^1/_5$, so wird $u = \frac{1}{6}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{6/5}$, also $= 2\cdot021$, wenn $x_1 = 0\cdot200$ und $x = l = 1\cdot600\, m$ angenommen wird. Bei der Reihenentwickelung kann man sich der Formel 124) bedienen.

Zum Zwecke einer schnellen Übersicht wählen wir $k = m$, dann ist

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{A x_1}{m V^2 \sqrt{1-e^{-u}}} \, ln \frac{1+\sqrt{1-e^{-u}}}{1-\sqrt{1-e^{-u}}}. \qquad 184)$$

Da für den Anfangswert $x = 0$ auch z und $u = 0$ ist, so ergibt sich nach einer leichten Rechnung der Anfangsdrall

$$\operatorname{tg} \tau_a = \frac{2 A x_1}{m V^2}. \qquad 185)$$

In Anwendung dieser Formeln gleichmäßigen Wachsens der Drehbeschleunigung auf Grundlage der Curve

$$\frac{r d^2 \varphi}{d t^2} = A \left(\frac{x}{x_1}\right)^m, \qquad 186)$$

und unter der Annahme, dass an der Mündung $l = 1 \cdot 6\, m$ die Drehbeschleunigung von 12000 m erreicht werden soll, erhalten wir, da $x/x_1 = 8$, $m = 1/_5$ aus $12000 = A 8^{1/5}$ den Coefficienten $A = 7917$ und infolge dessen für $V = 473 \cdot 4\, m$ den Anfangsdrall $\tau_a = 4° 2' 30''$ und den Enddrall $7° 25' 30''$.

Hiebei haben wir die 8·8 *cm*-Kanone nebst den Versuchsangaben in §. 32 zugrunde gelegt. Die Curve der Drehbeschleunigung ist in Taf. I, Fig. 1 punktiert gezeichnet und lässt die gleichmäßig wachsende Beanspruchung des Rohres deutlich erkennen.

Die berechneten Drallwinkel entsprechen ganz gut den normalen Anforderungen der ballistischen Technik. Die untergelegte Drehbeschleunigungscurve entlastet am Orte des höchsten Gasdruckes $x_1 = 0 \cdot 200$ das Rohr, da gemäß der Formel

$$\frac{r d^2 \varphi}{d t^2} = 7917 \left(\frac{x}{x_1}\right)^{1/5}$$

an dieser Stelle nur eine Drehbeschleunigung von 7917 m vorhanden ist. Ihr Maximum liegt an der Mündung.

Will man dasselbe vermindern, so muss nach den letzten Formeln A und damit auch der Anfangs- und Enddrall vermindert werden. Man bemerke noch den Einfluss des V-Wertes auf die Drallverhältnisse. Die Abnahme dieser Geschwindigkeit bedingt eine Zunahme des Anfangsdralls. Führen wir

$$V^2 = \frac{2r^2\pi g}{Gm} P_1 x_1 e^{\frac{m}{1+m}} \qquad 187)$$

in die obige Gleichung ein, so resultiert

$$\operatorname{tg} \tau_\alpha = \frac{AG}{r^2 \pi g P_1 e^{\frac{m}{1+m}}}. \qquad 188)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, dass mit schwererem Geschossgewichte und überhaupt mit wachsender Querschnittsbelastung eine Zunahme des Anfangsdralls verknüpft ist, während die Zunahme des Druckmaximums eine Abnahme desselben gestattet. Unendlicher Druck würde also den Anfangsdrall Null bedingen. Hieraus ergibt sich z. B. für Mörser im Gegensatze zu den Flachbahngeschützen die Nothwendigkeit größerer Drallwinkel. Beachten wir noch das Verhältnis des mittleren Druckes zum höchsten

$$\frac{P_m}{P_1} = \frac{e^{\frac{m}{1+m}}}{m} \frac{1-e^{-u}}{z}, \qquad z = \frac{x}{x_1} = \frac{l}{x_1} \qquad 189)$$

so kann die obige Gleichung in die folgende transformiert werden

$$\operatorname{tg} \tau_\alpha = \frac{AG}{P_m r^2 \pi g} \frac{1-e^{-u}}{mz}, \qquad 190)$$

die die Abhängigkeit des Anfangsdralls von den betreffenden constituierenden Größen zeigt. Das Drallverhältnis in seiner einfachsten Form ist

$$\frac{\operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg} \tau_\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{1-e^{-u}}} \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{-u}}}{1-\sqrt{1-e^{-u}}}, \qquad 191)$$

$$u = \frac{m}{1+m}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m},$$

und es kann darin der Ausdruck $1-e^u$ durch den entsprechenden des obigen Druckverhältnisses eliminiert werden, wobei allerdings noch die Variable z miteingeführt wird.

Man sieht aber, dass eine Möglichkeit vorliegt, zwischen Drallverhältnis und Druckverhältnis einen Zusammenhang herzuleiten, der einer weiteren Untersuchung wohl wert wäre.

Da z wegen der transcendenten Gleichung 189) nicht in einfacher Function von P_m/P_1 zu bestimmen ist, schreiben wir das Verhältnis wie folgt

$$\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\tau_\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{fz\frac{P_m}{P_1}}}\, ln \frac{1+\sqrt{fz\frac{P_m}{P_1}}}{1-\sqrt{fz\frac{P_m}{P_1}}}, \quad f = \frac{m}{e^{\frac{m}{1+m}}} \qquad 192)$$

worin P_1 der Maximal-, P_m der mittlere Druck für die zurückgelegte Strecke x oder l mit den entsprechenden Drallwinkeln τ_α und τ oder τ_e bedeutet, und die der Drehbeschleunigungscurve

$$\frac{rd^2\varphi}{dt^2} = A\left(\frac{x}{x_1}\right)^m$$

und der Gasdruckcurve

$$P = P_1\left(\frac{x}{x_1}\right)^m e^{\frac{m}{1+m}\left(1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m}\right)}$$

Genüge thut.

Man erkennt schon aus den bisherigen Gleichungen, inwieweit ein günstiges Druckverhältnis auf das entsprechende Drallverhältnis zurückwirkt. Dadurch, dass man die Form der Drehbeschleunigungscurve in der Gewalt hat, die ihrerseits wieder die Form der Drallcurve bestimmt, sind mathematisch die Bedingungsgleichungen zwischen sämmtlichen variablen und constanten Größen gegeben, die so gewählt werden können, dass sie die möglichst sichere Geschossführung innerhalb und außerhalb des Rohres gewährleisten und zugleich auch das Geschütz nicht mehr beanspruchen, als nöthig ist. Indem wir auf Grund der vorhergehenden theoretischen Entwickelungen es in der Hand haben, die Drehbeschleunigung, die auf das ganze System einen so maßgebenden Einfluss ausübt, in bestimmten Grenzen zu halten und damit ihre nachtheiligen Wirkungen zu verhindern, geben dieselben Entwickelungen den Weg an, dem das Geschoss im Rohre zu folgen

hat, wenn jene Vortheile erreicht werden sollen. In diesem Sinne bringen sie die vollständige allgemeine Lösung des Problems der Drallcurven, da z. B. der Exponent m der Druckcurve sich ungezwungen allen Versuchen mit allen Pulversorten, vom brisanten bis zum milden, anschließen lässt. Dies hindert natürlich nicht, auch hier diejenigen Gleichungen einzuführen, die noch weitere Parameter haben, sofern sie den Gang der Untersuchung nicht erschweren.

Die Gleichung der Drallcurve lässt sich nur darstellen in Reihenform:

$$y = \frac{2Ax_1^2}{mV^2}\left(\frac{1+m}{m}\right)^{\frac{1}{1+m}} u^{\frac{1}{1+m}}\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{u}{3(2+m)}+\frac{u^2}{30(3+2m)}-\frac{u^3}{630(4+3m)}-\ldots\right), \qquad 193)$$

und da $u = \frac{m}{1+m}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1+m}$ und ferner $A = 7917$, $V = 473\cdot4$, $m = \frac{1}{5}$, $x_1 = 0\cdot200$, so lässt sich die Drallcurve der in 186) vorausgesetzten Winkelbeschleunigung vermittels der Formel

$$y = \frac{2Ax_1^2}{mV^2}\cdot\frac{x}{x_1}\left(1+\frac{u}{3(2+m)}+\frac{u^2}{30(3+2m)}-\ldots-\ldots\right)$$

sehr leicht graphisch bestimmen. Die Curve lässt erkennen, wie sehr sie die Züge zu Anfang entlastet. Der Gleichungsausdruck bildet keine solche einfache Reihe, die nach ganzen Potenzen der Variablen fortschreitet, sondern erscheint in einer complicierteren Gestalt, die außerdem noch abhängig ist von dem Brisanzexponenten m der Druckgleichung. Für verschiedene Treibmittel und Geschützarten sind die m-Werte also verschieden und müssen auf Grundlage der Versuche ermittelt werden. Einen Wendepunkt besitzt die Curve nicht. Die Tangente wächst langsam und stetig an und lässt sich leicht trigonometrisch umformen.

Die Annahme $k = m$ führt übrigens nur zu einer speciellen Art der Curve, die wir der Einfachheit der Rechnung wegen eingeführt haben, und die Form ändert sich, wenn $k \gtrless m$ ist. Anstatt der höheren parabolischen Curve kann man auch jede

beliebige passende Curve für die Drehbeschleunigung wählen und aus der Integralgleichung 181) die zugehörige Drallcurve berechnen. Indessen, je zusammengesetzter die eine Curve ist, umso umständlicher wird die Rechnung für die andere. Die oben gewählte Form 186) dürfte für die meisten Fälle ausreichen. Aber auch der Fall $k = 2m$ oder $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = A\left(\frac{x}{x_1}\right)^{2m}$, sowie auch die Function $A\sqrt{1-e^{-u}}$ führen zu einfachen Gleichungen. Aus den entwickelten Formeln lassen sich noch manche interessante Folgerungen ziehen. Wir erwähnen noch die folgenden. Betrachtet man die Gleichung für den Anfangsdrall, so zeigt der Ausdruck $e^{\frac{m}{1+m}}$ im Nenner desselben, dass τ_α wesentlich von dem Werte von m mitbedingt ist, der die Form der Druckcurve bestimmt. Mit zunehmender Brisanz, d. h. mit rascher verbrennendem Pulver, das einen steileren Abfall der Druckcurve zur Folge hat, nimmt m verhältnismäßig zu, also der obige Ausdruck und damit der Anfangs- und Enddrall ab, während mit langsamer verbrennendem Pulver der Wert von m immer kleiner wird, so dass ein größerer Anfangsdrall gewählt werden kann. Die Erfahrung bestätigt diese Theorie.

Bemerkt man ferner, dass das Geschossgewicht durch $G = r^2\pi hs$, in welchem h und s eine gewisse mittlere Geschosslänge und mittleres specifisches Gewicht bezeichnet, gegeben ist, so ergibt die Einführung derselben in 188) die Beziehung

$$\operatorname{tg}\tau_\alpha = \frac{Ahs}{gP_1 e^{\frac{m}{1+m}}}$$

und damit die Thatsache, dass die Zunahme der Geschosslänge und Geschossdichte eine Zunahme des Anfangsdralls zur Nothwendigkeit macht, womit freilich eine Vergrößerung des Maximaldruckes P_1, jedenfalls aber eine Verminderung von v verknüpft ist. Eliminiert man in den Formeln für $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ und $\operatorname{tg}\tau$ den Ausdruck A, so folgt

$$\frac{rd^2\varphi}{dt^2} = \frac{P_1 r^2\pi g}{G} e^{\frac{m}{1+m}} \left(\frac{x}{x_1}\right)^m \operatorname{tg}\tau_\alpha. \qquad 194)$$

Eine Verminderung des höchsten Druckes und eine Vergrößerung von x_1, d. h. eine langsamere Verbrennung, die zugleich den Modul m verkleinert, bewirken eine Abnahme der auf Abdrehen und Zusammendrücken des Geschosses gerichteten Drehungsbeschleunigung, sofern sie durch die obige Curve definiert ist.

Da die Beanspruchung mit der Seelenlänge zunimmt, so muss der Anfangsdrall, wenn die Drehungsbeschleunigung eine bestimmte Größe nicht überschreiten soll, entsprechend herabgesetzt werden, soweit dies mit der geforderten Endgeschwindigkeit des Geschosses vereinbar ist.

Führt man diese auf alle Fälle maßgebende Größe in die vorhergehenden Gleichungen, so ergibt die leicht ableitbare Gleichung zwischen den genannten Elementen die Bedingungen und die Art an, unter welchen die jeweilige Veränderung der einen oder anderen Größe vor sich zu gehen hat.

Wie man sieht, lässt sich der Ausdruck für $\operatorname{tg}\tau$ oder

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{Ax_1}{mVv} \, ln \frac{V+v}{V-v} \tag{195)}$$

leicht in eine Reihe entwickeln:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{2Ax_1}{mV^2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{V}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{V}\right)^4 + \ldots\right), \tag{196)}$$

wodurch auch der allgemeinere Ausdruck für

$$\frac{rd^2\varphi}{dt^2} = \frac{r^2\pi g P_1 e^{\frac{m}{1+m}} \left(\frac{x}{x_1}\right)^m \operatorname{tg}\tau}{G\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{V}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{V}\right)^4 \ldots\right)} \tag{197)}$$

übersichtlicher wird.

Liegt die Veranlassung vor, den Drall mit Null zu beginnen, so kann man sich der Gleichung

$$\frac{rd^2\varphi}{dt^2} = A\sqrt{1-e^{-\varkappa}} \tag{198)}$$

bedienen, die auch zu sehr einfachen Gleichungen führt, die die vorhin gezogenen Consequenzen der Drehbewegung bestätigend wiederholen.

Die entwickelten Beziehungen sind giltig für alle Arten von Feuerwaffen und können bei der Bestimmung der die Bohrung betreffenden Verhältnisse mit Erfolg benützt werden. Es lassen sich aus den Gleichungen noch eine Menge einfacher Sätze oder Relationen des einen Elementes zum anderen herauslesen, die aber mehr specielle Dinge berühren, worauf wir hier nicht eingehen können. In dieser, aber auch in allgemeiner Hinsicht verweisen wir auf die eingangs genannten Berichte der zum Theile unter staatlicher Aufsicht stehenden technischen, artilleristischen u. a. Institute, die eine reiche Fülle von Material, Beobachtungsdaten und Erfahrungen enthalten, die aber meist im Schoße der Commissionen begraben bleiben und nur wenigen zugänglich sind.

VII. Theil.

Zur Theorie der äußeren Ballistik.

§. 53.

Wir liefern im nachfolgenden noch einen Nachtrag zur äußeren Ballistik in der Absicht, einige der früher aufgestellten Methoden etwas schärfer zu präcisieren. Wie in den anderen exacten Wissenschaften spricht die Integralrechnung auch hier das letzte Wort. Die Unmöglichkeit indessen, alle Integrationen ausführen zu können, zwingt dazu, diejenigen der aus den Versuchen abgeleiteten Curven zu wählen, die eine Integration der Differentialgleichungen gestatten und zugleich den Versuchsergebnissen in dem Sinne praktisch genügen, dass die Abweichungen oder die Fehlergrenzen zu übersehen und leicht angebbar sind. Indem wir also auch hier die Absicht haben, die Möglichkeit der Integration nicht verloren gehen zu lassen, um möglichst zu geschlossenen und einfachen Resultaten zu kommen, werden wir im Anschlusse an unsere früheren Entwickelungen den Verlauf der ballistischen Luftwiderstandscurve durch eine Parabel zu charakterisieren suchen, da die-

selbe, wie wir nachweisen werden, den Versuchen hinreichend genau entspricht und auch die Bedingung, die wir daran knüpfen, die Integrationsfähigkeit, im ganzen erfüllt. Dabei beschränken wir uns naturgemäß auf diejenige Zone, die durch die Versuche hinreichend klargestellt worden ist. Die Gleichung des Luftwiderstandes in ihrer einfachsten Form lautet

$$y = (a\sqrt{x} - b)^2 + c \qquad x = v. \tag{199}$$

Sie ist eine Parabel mit nach oben gerichteter Öffnung, deren Axe etwas schief gegen die x-Axe der Geschwindigkeiten gerichtet ist. Die Gerade $y_1 = c$ ist Tangente der Curve im tiefsten Punkte, von welchem aus wir den Widerstand $y = U$ rechnen, der also hier mit einem gewissen kleinsten Werte $U = c$ beginnt, der übrigens ziemlich willkürlich gewählt ist und der der aus

$$a\sqrt{v} - b = 0$$

zu ermittelnden Geschwindigkeit $v_1 = b^2/a^2$ entspricht.

Hienach geht die Curve nicht durch den Coordinatenanfangspunkt, sondern durch den Punkt $v_1 c$; den linken Ast der Parabel schließen wir von der Rechnung aus.

Indem wir nun die Curve so legten, dass sie möglichst viele Versuchsresultate aufnahm und darauf die Constanten passend bestimmten, erhielten wir die folgende Widerstandsgleichung

$$U = (0\cdot 88\sqrt{v_x} - 11\cdot 4)^2 + 2\cdot 89, \qquad a = 0\cdot 88, \quad b = 11\cdot 4, \quad c = 2\cdot 89. \tag{200}$$

Sie entspricht einem speciellen Falle, und zwar bedeutet U die Verzögerung, die ein Geschoss von 10 *cm* Durchmesser und 10 *kg* Gewicht in der Secunde erleiden würde, wenn der Widerstand constant wirkte und die Luftdichte $\Delta = 1\cdot 206$ *kg* wäre. Die allgemeine Gleichung würde sein

$$U = \frac{\Delta}{1\cdot 206} \cdot i \frac{(2R)^2}{10G} \left[\left(8\cdot 8\sqrt{\frac{v_x}{100}} - 11\cdot 4\right)^2 + 2\cdot 89\right], \tag{201}$$

worin i ein Formcoefficient ist, der sich mit den verschiedenen Formen der Geschosspitzen ändert. Wir wählen im folgenden

die Krupp'schen Geschosse und Versuchsergebnisse zur hauptsächlichsten Grundlage und werden die von Siacci aus englischen (E), russischen (R), holländischen (H) und Krupp'schen (Meppen) Versuchen zusammengestellten Resultate stets auf die letzteren reducieren.

§. 54.

Um gleich eine vorläufige Anwendung der obigen Formel zu geben, wählen wir $2R = 10\,cm$, $G = 10\,kg$, $\Delta = 1{\cdot}206$, $i = 1$ und $v = 250\,m$. Damit erhalten wir $U = 9{\cdot}14\,m$ Verzögerung bei $250\,m$ Geschwindigkeit pro Secunde. Hojel ermittelte durch seine zahlreichen Versuche $U = 9{\cdot}86$.

Die nachstehende Tabelle bringt einen Auszug aus den genannten Versuchen in einer Ausdehnung von $v = 167{\cdot}8$ bis $v = 910$ und außerdem die aus der obigen Gleichung abgeleiteten Werte nebst den Differenzen zwischen diesen und den mit $0{\cdot}9$ multiplicierten Tabellenzahlen Siaccis.

Die kleinste Geschwindigkeit, mit welcher wir beginnen, ist $v_x = 100\left(\frac{11{\cdot}4}{8{\cdot}8}\right)^2 = 167{\cdot}8\,m$, welcher die negative Beschleunigung $U = 2{\cdot}89$ entspricht.

Luftwiderstandstabelle.

Versuchs-land und -Ort	v (m)	$U\,{}^{9}/_{10}$ (m) Vers.	U (m) Formel	Diff. (m)
—	167·8	(2·89)	2·89	—
R	172	3·06	2·91	+ 0·15
H	200	4·00	3·97	+ 0·03
R	207	4·05	5·45	— 1·40
R	239	5·85	7·73	— 1·88
R	247	7·2	8·69	— 1·49
H	250	8·9	9·14	— 0·24
E	291	14·5	15·92	— 1·42
H	300	13·7	17·63	— 3 93
E	300	14·3	17·63	— 3·33

Versuchsland und -Ort	v (m)	$U\ ^9/_{10}$ (m) Vers.	U (m) Formel	Diff. (m)
E	316	21·5	20·78	+ 0·72
E	320	21·1	21·72	— 0·62
R	329	25·3	23·68	+ 1·62
R	337	25·3	25·35	+ 0·0
H	350	29·9	27·89	+ 2·0
E	355	31·7	29·62	+ 2·0
M	368	34·2	31·72	+ 2·5
H	400	47·7	41·33	+ 6·5
M	438	54·0	51·89	+ 2·1
M	488	71 0	67·37	+ 3·7
H	500	77·5	71·23	+ 6·3
H	550	91·4	88·1	+ 3·3
M	581	104·4	98·9	+ 5·5
M	582	102·6	99·3	+ 3·3
H	600	113·1	105·9	+ 7·2
H	650	124·4	123·9	+ 0·5
M	664	128·7	129·9	— 1·2
M	672	133 2	132·8	+ 0·4
M	681	140	136·0	+ 4·0
M	717	152	149·6	+ 2·4
M	759	166·5	167·9	— 1·4
M	780	169·2	174·5	— 5·3
M	783	175·5	177·1	— 1·6
M	840	207·4	201·7	+ 5·7
M	871	204·3	214·7	—10·4
M	910	236·7	227·8	+ 8·9

Vergleichen wir die Formel- und Versuchswerte miteinander oder construiert man sich die entsprechenden Curven, so ergibt sich Folgendes:

Die Parabel geht bis etwa $v = 200$ ein wenig unterhalb, von da bis ungefähr $v = 300$ etwas stärker oberhalb der Versuchs-, beziehungsweise der Krupp'schen Curve hinweg, bleibt

darauf bis etwa $v = 750$ unterhalb der letzteren, um von da bis 1000 über sie wieder hinweg zu schreiten. Innerhalb der Strecke von 225 bis 325 entspricht sie weniger gut den Krupp-schen, dagegen etwas besser den Hojel'schen Daten, die sich übrigens auch durch Genauigkeit auszeichnen. Beide Curven haben im ganzen vier Durchschnittspunkte gemeinsam, und ihre Züge gehen, wie wir uns constructiv überzeugt haben, sehr nahe aneinander vorbei. Auch zeigen die Differenzen einen häufigen Wechsel ihrer Vorzeichen. Durch eine Änderung der Constanten der Formel kann man übrigens die Schnittpunkte der Curven willkürlich verlegen, wozu man sich zweier Gleichungen von der Art

$$\delta U = 2\sqrt{U} - c\left[\sqrt{v_x}\,\delta a - \delta\beta\right] \qquad 202)$$

bedienen kann, die bei constantem c bei gegebenen δU etc. die Variationen da und db leicht berechnen lassen. Auf diese Weise haben wir zunächst mittels einer festen Parabel, die wir den Versuchen passend anschmiegten, die obige Formel gefunden, die nach dem Vorstehenden eine genügende Genauigkeit besitzt. Die Starrheit der Parabel gegenüber der Streckbarkeit der Hyperbel lässt eine vollständige Congruenz zwischen Versuch und Formel weniger gut zu und ist dieselbe auch nicht ganz unabhängig von dem gewählten Anfangspunkte. Die Abweichungen nehmen zu, je weiter Anfangs- und Endpunkt auseinanderstehen.

Wir bemerken noch, dass die Bezeichnung ln den natürlichen, und log den Brigg'schen Logarithmus bezeichnet.

§. 55.

Verfahren wir bei der Integration wie früher und setzen

$$u = v_x \frac{\cos\tau}{\cos\alpha}, \qquad a\sqrt{u} - b = z,$$

so erhalten wir

$$t = \frac{20}{Ca^2\cos\alpha}\int\frac{b+z}{c+z^2}\,dz, \qquad x = -\frac{20}{Ca^4}\int\frac{(b+z)^3}{c+z^2}\,dz,$$

$$\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha = \frac{20g}{C\cos\alpha^2}\int\frac{dz}{(c+z^2)(b+z)}.$$

Diese Gleichungen sind leicht zu integrieren. Führen wir noch ein

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{u}-b}{\sqrt{c}}, \qquad C = \frac{\Delta}{1\cdot 206}\, i\, \frac{(2R)^2}{G} \tag{203}$$

und benützen

$$\frac{1}{(c+z^2)(b+z)} = \frac{1}{b^2+c}\left[\frac{1}{b+z} + \frac{b-z}{c+z^2}\right],$$

so ergeben sich die folgenden Integralgleichungen

$$t = -\frac{20v}{Ca^2\cos\alpha}\left(\frac{b}{\sqrt{c}}\cdot\varphi - \ln\cos\varphi\right) + C_1,$$

$$x = -\frac{20}{Ca^4}\left[\frac{b}{\sqrt{c}}(b^2-3c)\varphi + 3b\sqrt{c}\operatorname{tg}\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{c}{2}\operatorname{tg}\varphi^2 - (3b^2-c)\ln\cos\varphi\right] + C_1, \tag{204}$$

$$\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha = \frac{20g}{C(b^2+c)\cos\alpha^2}\left(\ln(\sqrt{v_x}\cos\varphi) + \frac{b}{\sqrt{c}}\varphi\right) + C_1.$$

Die Einfachheit dieser Gleichungen springt in die Augen, und sie machen daher auch rechnerisch wenig Mühe.

Wir halten es für nützlich, bevor wir weiter gehen, eine praktische Anwendung dieser Formeln zu geben und das Resultat mit den Tabellenwerten zu vergleichen.

Gegeben: $G = 10\,kg$, $2r = 10\,cm$, also $C = 10$, $v_0 = 900\,m$.

Gesucht: die Zeit, die verfließt, bis die Anfangsgeschwindigkeit auf $u = \frac{v_x\cos\tau}{\cos\alpha} = 167\cdot 8\,m$ gesunken ist. u hat die frühere Bedeutung. In diesem Falle, der die volle Ausdehnung unserer Curve umfasst, sind die Constanten der letzten Gleichungen Null, und man hat zunächst, da u zu Anfang $= v_0$

$$\operatorname{tg}\varphi = 5\cdot 1765\sqrt{\frac{v_0}{100}} - 6\cdot 706,$$

also

$$\varphi = 83^\circ\, 32' = 1\cdot 45793.$$

Die Flugzeit folgt nun aus 204) und ist für $\alpha = 0°$

$$t = 2\cdot5826(6\cdot706\varphi - \ln \cos\varphi) = 30\cdot878^s.$$

Desgleichen liefert die Formel für die Schussweite

$$x = 2712\cdot5\varphi + 193\cdot9 \operatorname{tg}\varphi + 4\cdot985 \operatorname{tg}\varphi^2 - 2971\cdot8 \log\cos\varphi,$$

wo $\log\cos\varphi = 9\cdot051635 = -0\cdot948$,

$$x = 3954\cdot7 + 1710\cdot6 + 388\cdot1 + 2817\cdot2 = 8870\cdot6.$$

Indem wir noch diese x- und t-Werte mit $0\cdot91$ multiplicieren, erhalten wir

$$x = 8072\cdot2\,m, \qquad t = 28\cdot04^s \qquad (i = 1\cdot099).$$

Siaccis Tabelle liefert

$$x = 8143\,m, \qquad t = 28\cdot23^s,$$

also nahezu dasselbe, da die Reduction auf gleiche Zeiten fast dieselbe Schussweite ergibt.

Die dritte Formel für $\operatorname{tg}\tau$ führt auf das Resultat

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{1\cdot1329}{\cos\alpha^2},$$

die Tabelle

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{1\cdot1209}{\cos\alpha^2},$$

woraus unter der Annahme $\alpha = 45°$ die Werte

$$\tau = -51°40', \text{ beziehungsweise } 51°10'$$

mit $0°30'$ Differenz hervorgehen. Die Endgeschwindigkeit ist hiernach $v_e = 191\,m$.

§. 56.

Wir stellen die allgemeinen Formeln zunächst für die Schussweite, die Flugzeit und den Tangentenwinkel zusammen.

$$\frac{i\Delta}{1\cdot 206}\cdot\frac{(2R)^2}{G}\cdot x$$

$$= 27125(\varphi_0-\varphi)+1939(\operatorname{tg}\varphi_0-\operatorname{tg}\varphi)+49\cdot 8(\operatorname{tg}\varphi_0^2-\operatorname{tg}\varphi^2)$$
$$-29718\log\cos\varphi_0+29718\log\cos\varphi$$

$$\frac{i\Delta}{1\cdot 206}\;\frac{(2R)^2}{G\cos\alpha}\cdot t$$

$$= 173\cdot 2(\varphi_0-\varphi)-59\cdot 5\log\cos\varphi_0+59\cdot 5\log\cos\varphi$$

$$\frac{i\Delta}{1\cdot 206}\cdot\frac{(2R)^2}{G\cos\alpha^2}(\operatorname{tg}\tau-\operatorname{tg}\alpha)$$

$$= -3\cdot 40\log\left(\sqrt{\frac{v_0}{u}}\;\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\right)-9\cdot 90(\varphi_0-\varphi). \qquad 205)$$

Vorher sind zu ermitteln:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = 5\cdot 1765\sqrt{\frac{v_0}{100}}-6\cdot 7059,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 5\cdot 1765\sqrt{\frac{u}{100}}-6\cdot 7059; \qquad u=\frac{v\cos\tau}{\cos\alpha}.$$

Die Gleichungen sind also in letzter Linie Functionen von u oder von v_x als der Horizontalprojection der Endgeschwindigkeit, da der Anlage der Theorie gemäß sich diese Variable von selbst einstellte und empfahl. Eine andere, wie etwa t, würde freilich unter Umständen wünschenswerter sein.

§. 57.

Das Curvenintegral lautet

$$y = x\operatorname{tg}\alpha \qquad 206)$$

$$-\frac{400g}{C^2\varepsilon(1+\varepsilon^2)\cos\alpha^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi}(1+\varepsilon\operatorname{tg}\varphi)^3\Big[\ln(1+\varepsilon\operatorname{tg}\varphi)+\ln\cos\varphi+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi-C_1\Big]d\varphi.$$

$$C=\frac{\Delta}{1\cdot 206}.i.\frac{(2R)^2}{G}, \qquad \varepsilon=\frac{b}{\sqrt{c}},$$

$$C_1=\ln\cos\varphi_0.(1+\varepsilon\operatorname{tg}\varphi_0)+\frac{\varphi_0}{\varepsilon}.$$

Die Darstellung dieses Integrals kann nicht anders als auf dem Wege der Reihenentwickelung vor sich gehen, wobei man sich der Werte

$$\int \varphi \operatorname{tg} \varphi d\varphi = -\varphi \ln \cos \varphi + \int \ln \cos \varphi d\varphi,$$

$$\int \ln \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} (\ln \cos \varphi)^2,$$

$$\int \varphi \operatorname{tg} \varphi^2 d\varphi = \varphi \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2} \varphi^2 + \ln \cos \varphi,$$

$$\int \varphi \operatorname{tg} \varphi^3 d\varphi = \frac{1}{2} \varphi \operatorname{tg} \varphi^2 + \varphi \ln \cos \varphi$$
$$- \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2} \varphi - \int \ln \cos \varphi d\varphi$$

zu bedienen hat.

Das Integral verwandelt sich dadurch in

$$J = \ln \cos \varphi \Big[2\varepsilon + \frac{7}{3} \varepsilon^3 + \frac{1}{20} \varepsilon^5 - (3 - \varepsilon^2) \varphi + 3\varepsilon^2 \operatorname{tg} \varphi +$$
$$+ \frac{1}{2} \varepsilon^3 \operatorname{tg} \varphi^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^3 - 3\varepsilon) \ln \cos \varphi \Big]$$
$$+ \left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{3\varepsilon}{2} \right) \varphi^2 - \left(5\varepsilon^2 \quad \frac{1}{4} \varepsilon^4 + \frac{1}{60} \varepsilon^6 \right) \varphi + 3\varepsilon\varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi^2$$
$$+ \left(5 e^2 - \frac{1}{4} \varepsilon^4 + \frac{1}{60} \varepsilon^6 \right) \operatorname{tg} \varphi + \left(\frac{7}{6} \varepsilon^3 + \frac{1}{40} \varepsilon^5 \right) \operatorname{tg} \varphi^2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{12} \varepsilon^4 - \frac{1}{180} \varepsilon^6 \right) \operatorname{tg} \varphi^3$$
$$- \frac{\varepsilon^5}{80} \operatorname{tg} \varphi^4 + \frac{1}{300} . \varepsilon^6 \operatorname{tg} \varphi^5 + 4(1 - \varepsilon^2) \int \ln \cos \varphi d\varphi -$$
$$- C_1 \int d\varphi (1 + \varepsilon \operatorname{tg} \varphi)^3.$$

Zur Darstellung des vorletzten Integrals benutzen wir die bekannte Reihe

$$\ln \cos \varphi = -\frac{2(2^2 - 1)}{1} B_1 \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{2^3 (2^4 - 1)}{2} B_2 \frac{\varphi^4}{4!} - \text{etc.},$$

woraus

$$\int \ln \cos \varphi d\varphi = -\varphi^3\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{60}\varphi^2+\frac{1}{315}\varphi^4+\frac{17}{22680}\varphi^6+\right.$$

$$\left.+\frac{31}{155925}\varphi^8+\frac{691}{12342330}\varphi^{10}\ldots\right)$$

folgt. Die folgenden Glieder haben das Verhältnis

$$\frac{G_n}{G_{n-1}} = \frac{2(2^{2n}-1)(n-1)}{n^2(2^{2n-2}-1).(2n+1)}\cdot\frac{B_n}{B^{n-1}}\varphi^2.$$

Da aber $\frac{B_n}{B_{n-1}}$ gegen die Grenze $\frac{2n(2n-1)}{4\pi^2}$ convergiert, so ist

$$\frac{G_n}{G_{n-1}} < \frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{4\varphi^2}{\pi^2},$$

und es stehen daher die Coefficienten der Reihe von einer gewissen Stelle an länger in einem fast constanten Verhältnisse, vom 7. Gliede an wie 3 : 10, so dass der Rest durch eine geometrische Reihe summiert werden darf. So erhalten wir mit großer Annäherung

$$\int \ln \cos \varphi d\varphi = -\varphi^3\Big\{0\cdot 16666\ldots+0\cdot 01666\ldots\varphi^2+0\cdot 003174\varphi^4+$$

$$+0\cdot 000749\varphi^6+0\cdot 000199\varphi^8+0\cdot 000056\varphi^{10}+\frac{0\cdot 000017\varphi^{12}}{1-0\cdot 3\varphi^2}\Big\}.$$

Ist z. B. $\varphi = 1\cdot 40564$, so hat das Integral den Wert

$$-\varphi^3.0\cdot 02254 = -0\cdot 626.$$

Nach Bestimmung des letzten Integrals resultiert schließlich

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{400\,g}{a^4\varepsilon(1+\varepsilon^2)C^2\cos\alpha^2}(P+Q+R+S-P_0-Q_0-R_0-S_0),$$

worin die Klammerausdrücke folgende Werte haben:

$$\left.\begin{aligned}
P &= \ln\cos\varphi\Big[2\varepsilon+\frac{7}{3}\varepsilon^3+\frac{1}{20}\varepsilon^5-(3-\varepsilon^2)\varphi+3\varepsilon^2\,\mathrm{tg}\,\varphi+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\varepsilon^3\,\mathrm{tg}\,\varphi^2-\frac{1}{2}(3\varepsilon-\varepsilon^3)\,ln\cos\varphi\Big],\\
Q &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-3\varepsilon\right)\varphi^2-\left(5\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^4+\frac{1}{60}\varepsilon^6\right)\varphi+3\varepsilon\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi+\\
&\quad+\frac{\varepsilon^2}{2}\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi^2+\left(5\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^4+\frac{1}{60}\varepsilon^6\right)\mathrm{tg}\,\varphi+\\
&\quad+\left(\frac{7}{6}\varepsilon^3+\frac{1}{40}\varepsilon^5\right)\mathrm{tg}\,\varphi^2+\left(\frac{1}{12}\varepsilon^4-\frac{1}{180}\varepsilon^6\right)\mathrm{tg}\,\varphi^3-\\
&\qquad-\frac{1}{80}\varepsilon^5\,\mathrm{tg}\,\varphi^4+\frac{1}{300}\varepsilon^6\,\mathrm{tg}\,\varphi^5-\frac{1}{840}\varepsilon^7\,\mathrm{tg}\,\varphi^6,\\
R &= -4(1-\varepsilon^2)\varphi^3\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{60}\varphi^2+\frac{1}{315}\varphi^4+\frac{17}{22680}\varphi^6+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{31}{155925}\varphi^8+\ldots\right),\\
S &= -\left(\frac{\varphi_0}{\varepsilon}+(1+\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\varphi_0)\,ln\cos\varphi_0\right)\Big[\varphi(1-3\varepsilon^2)+3\varepsilon^2\,\mathrm{tg}\,\varphi+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\varepsilon^3\,\mathrm{tg}\,\varphi^2-(3\varepsilon-\varepsilon^3)\,ln\cos\varphi\Big],\\
\mathrm{tg}\,\varphi &= \frac{a\sqrt{u}-b}{\sqrt{c}},\quad \mathrm{tg}\,\varphi_0=\frac{a\sqrt{v_0}-b}{\sqrt{c}},\quad \varepsilon=\frac{\sqrt{c}}{b},\\
u &= \frac{v\cos\tau}{\cos\alpha}.
\end{aligned}\right\}\quad 207)$$

P_0, Q_0 etc. beziehen sich auf das Argument φ_0.
Da $b = 11\cdot4$, $\sqrt{c} = 1\cdot7$, so ist

$$\varepsilon = 0\cdot149123,\quad \varepsilon^2 = 0\cdot022237,\quad \varepsilon^3 = 0\cdot003316,$$
$$\varepsilon^4 = 0\cdot000494,\quad \varepsilon^5 = 0\cdot000073,\quad \varepsilon^6 = 0\cdot0000110,$$
$$\varepsilon^7 = 0\cdot0000016,\quad \frac{1}{\varepsilon} = 6\cdot7059.$$

Wiewohl die Luftwiderstandsgleichung noch von möglichst einfacher Form ist, ist die Curvengleichung von solcher

Ausdehnung, dass sie praktisch an der Grenze der Brauchbarkeit steht. Durch die Berechnung der Constanten derselben kann sie indessen noch etwas vereinfacht werden.

Hiernach ist

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{42924}{C^2 \cos \alpha^2} (P+Q+R+S-P_0-Q_0-R_0-S_0),$$

$$P = ln \cos \varphi (0\cdot 305985 - 2\cdot 977763 \varphi + 0\cdot 066711 \operatorname{tg} \varphi + \\ + 0\cdot 001658 \operatorname{tg} \varphi^2 - 0\cdot 222026 \ln \cos \varphi),$$

$$Q = \varphi (3\cdot 129265 \varphi - 0\cdot 110233 + 0\cdot 447369 \operatorname{tg} \varphi + 0\cdot 011118 \operatorname{tg} \varphi^2) \\ + 0\cdot 111062 \operatorname{tg} \varphi + 0\cdot 003866 \operatorname{tg} \varphi^2 + 0\cdot 000041 \operatorname{tg} \varphi^3 \\ - 0\cdot 00000090 \operatorname{tg} \varphi^4 + 0\cdot 00000004 \operatorname{tg} \varphi^5 - 0\cdot 000000002 \operatorname{tg} \varphi^6,$$

$$R = -3\cdot 911052 \varphi^3 (0\cdot 1666 + 0\cdot 01666 \varphi^2 + \ldots \text{ siehe oben}),$$

$$S = -(6\cdot 7059 \varphi_0 + \ln \cos \varphi_0 (1+\varepsilon \operatorname{tg} \varphi_0)) [0\cdot 933289 \varphi + \\ + 0\cdot 066711 \operatorname{tg} \varphi + 0\cdot 001658 \operatorname{tg} \varphi^2 - 0\cdot 444053 \ln \cos \varphi],$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 5\cdot 1765 \sqrt{\frac{u}{100}} - 6\cdot 709, \quad u = v \cos \tau / \cos \alpha.$$

Anwendung. Es sei gegeben:

$$2r = 10\, cm, \quad G = 10\, kg, \quad v_0 = 602\cdot 5\, m, \quad u = 167\cdot 8\, m.$$

Gesucht: t, x, τ, y.

Aus den obigen Elementen erhalten wir zunächst $\operatorname{tg} \varphi = 6$, also $\varphi = 80° \, 32' \, 15'' = 1\cdot 40564$. u ist an der Mündung $= v_0$. Als untere Grenze haben wir wieder zur Erleichterung der Rechnung $u = 167\cdot 8\, m$ angenommen. Mit $\varphi = 0$ verschwinden dann die Glieder P, Q etc. Man bemerke noch

$$ln \cos \varphi = 2\cdot 3026 \log \cos \varphi = -2\cdot 3026 . 0\cdot 7841.$$

Die Rechnung liefert

$$P_0 = 5\cdot 44919, \quad Q_0 = 11\cdot 14598, \quad R_0 = -2\cdot 4436, \\ S_0 = -21\cdot 2504.$$

Daher ist

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{429 \cdot 24}{i^2 \cos \alpha^2} (-5 \cdot 44919 - 11 \cdot 14598 + 2 \cdot 4481 + \\ + 21 \cdot 2504),$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{3049}{i^2 \cos \alpha^2}.$$

Die Berechnung auch der übrigen Größen und die Annahme $i = 1 \cdot 094$ lässt folgende Gleichungen hervorgehen:

$$t = \frac{26 \cdot 50}{\cos \alpha}, \quad x = 6842, \quad \operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1 \cdot 1144}{\cos \alpha^2},$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{2547 \cdot 6}{\cos \alpha^2}.$$

Siaccis Tabelle liefert

$$t = \frac{26 \cdot 50}{\cos \alpha}, \quad x = 6875, \quad \operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1 \cdot 0976}{\cos \alpha^2},$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{2560 \cdot 6}{\cos \alpha^2}.$$

Die Annahme $\alpha = 24°$ ergibt $y = -5 \cdot 5\, m$ als Ordinate nach der Tabelle und $y = 3046 - 3052 = -6\, m$ nach der Formel.

Eine weitere Anwendung möge sich beziehen auf ein Schießresultat der Krupp'schen Gusstahlfabrik vom 5. Juli 1881 mit der $10 \cdot 5\, cm$ Kanone (siehe Heft 30).

Geschossgewicht $4 \cdot 8\, kg$, $2R = 10 \cdot 5\, cm$, Luftdichte 1·179.

Gemessene Geschwindigkeit $30\, m$ vor der Mündung $v_{30} = 900$, desgleichen $v_{1000} = 438\, m$. Es soll aus der Formel die betreffende Schussweite ermittelt werden.

Wir erhalten zunächst

$$\varphi_0 = 83° \, 32' = 1 \cdot 458, \quad \varphi = 76° \, 23' = 1 \cdot 333,$$

also $\operatorname{tg} \varphi_0 = 8 \cdot 8225$, $\operatorname{tg} \varphi = 4 \cdot 1281$ etc. und setzen wie vorher $i = 1 \cdot 094$. Es folgt

$$x = \frac{4\cdot 8}{i.\dfrac{1\cdot 179}{1\cdot 206}.(10\cdot 5)^2}(27125.0\cdot 125+1939.4\cdot 6944+$$

$$+49\cdot 8.60\cdot 796+29718.0\cdot 3202),$$

oder

$$x = 972\cdot 4$$

gegen 970 *m* des Versuches.

Bemerkung. Das oben angegebene logarithmische Integral R kann auch anders dargestellt werden:

$$R = -4(1-\varepsilon^2)\Big[1\cdot 0888-\cos\varphi(1-\ln\cos\varphi)-$$

$$-\frac{1}{6}\cos\varphi^3\left(\frac{1}{3}-\ln\cos\varphi\right)-\frac{3}{40}\cos\varphi^5\left(\frac{1}{5}-\ln\cos\varphi\right)-$$

$$-\frac{5}{112}\cos\varphi^7\left(\frac{1}{7}-\ln\cos\varphi\right)-\frac{35}{1152}\text{etc.}-\frac{63}{2816}\text{etc.}\Big],$$

wie sich ergibt, wenn in $\int ln\cos\varphi d\varphi$ der Ausdruck

$$ln\cos\varphi = -x$$

eingeführt wird. Die Reihe convergiert unter Umständen ziemlich rasch.

§. 58.

Um aus der allgemeinen Widerstandsgleichung einzelne Specialgesetze von der Form

$$K_{(v)}.v^n \tag{208}$$

abzuleiten, schreiben wir sie in der Gestalt

$$U = \frac{1}{10}C[(a\sqrt{v}-b)^2 v^{-n}+cv^{-n}]v^n$$

und ermitteln das Maximalmittel der Function

$$v^{-n}(a\sqrt{v}-b)^2+cv^{-n}.$$

Es resultieren die Formeln

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{a\sqrt{v}\,(a\sqrt{v}-b)}{(a\sqrt{v}-b)^2+c}, \\ v &= \frac{b^2}{4a^2}\left(\frac{2n-1\pm\sqrt{1-4n(n-1)\frac{c}{b^2}}}{n-1}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad 209)$$

Um weiter zu erfahren, bis zu welchem Grade die Potenz v^n hinaufzusteigen vermag, differentieren wir den Ausdruck für n und erhalten

$$v' = \left(\frac{b^2+c+\sqrt{c(b^2+c)}}{ab}\right)^2. \qquad 210)$$

In diesem Grenzfalle verschwindet das Radical der obigen Formel für v, und n ergibt sich aus

$$n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{b^2}{c}}\right) = 3\cdot 89,$$

und zwar für

$$v' = \frac{b^2}{4a^2}\left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^2 = 230\cdot 28\,m.$$

Demnach ist die der parabolischen Widerstandscurve entsprechende höchste Potenz $v^{3\cdot 89}$, die in der Geschwindigkeitsregion um $v = 230$ herrscht und der sich nach oben und unten die übrigen Potenzen in absteigender Linie anschließen. Das lineare Gesetz v^1 z. B. entspricht nach oben der asymptotischen Geschwindigkeit $v = \infty$, nach unten dem speciellen Werte

$$v = \frac{b^2}{a^2}\left(1+\frac{c}{b^2}\right)^2 = 175\cdot 5\,m.$$

Die nachstehende Zusammenstellung gibt für die angegebenen Geschwindigkeiten den zugehörigen Widerstandsexponenten

v	∞	1000	900	800	700	600	500
n	1·00	1·67	1·73	1·84	1·92	2·06	2·28

v	400	300	200	167·8
n	2·64	3·32	3·19	0·00

Die zweite Reihe gibt deutlich die bekannte Tendenz der aufeinanderfolgenden Widerstandsgesetze wieder, wiewohl einzelne Regionen sich etwas anders gruppieren, so z. B. das quadratische Gesetz bei $v = 638 \cdot 55$ und $v = 183 \cdot 33$.

Da alle Versuche in Theorie und Praxis analoge Verschiebungen gegen einander aufweisen, deren Einfluss auf das praktische Endresultat fast belanglos ist, so kann auch das obige Gesetz als im ganzen befriedigend und auch deshalb als annehmbar angesehen werden, weil unsere Curventabelle kaum etwas größere Differenzen gibt, als die Versuche der genannten Art sie untereinander aufweisen.

Diesen allerdings bestehenden Abweichungen gegenüber ist der Vortheil der vollständigen Integrierbarkeit der ballistischen Gleichung und des großen Anwendungsbezirkes derselben wohl nicht ganz zu unterschätzen. Jedenfalls dürfte es vorläufig noch seine Schwierigkeiten haben, aus den von E. Mach mit so großem Erfolge unternommenen Experimentaluntersuchungen über die Bewegungserscheinungen beim Schusse in Verbindung mit den hydrodynamischen Gleichungen die theoretische und directe Widerstandscurve deductiv abzuleiten.

Vielleicht sind die nachfolgenden Betrachtungen über diesen Gegenstand nicht unwillkommen.

§. 59.

Beim Geschossfluge kommt außer der Verdichtung der Stirnwelle an der Spitze auch nach und nach die Verdünnung der Luft am Geschossboden zur Wirkung, die beide vereinigt, jenen größeren Luftwiderstand zur Folge haben und in der kritischen Zone zwischen $v = 300$ bis $v = 500$ jene Complicationen herbeiführen, die das ballistische Problem zu einem so schwierigen machen.

Von Wichtigkeit für die doch endlich anzubahnende directe Lösung dieses Problems dürfte Riemanns Theorie für die Fortpflanzung der Luftwellen werden, deren weitere Entwickelung vielleicht zur vollständigen Lösung führen würde. In seiner Abhandlung: »Über die bei Explosionen in der Luft eingeleiteten Vorgänge« (Ann. d. Phys. u. Chem. 69, 1898) hat Herr Professor Wolff zuerst die Riemann'schen Gleichungen

auf den Verlauf der Verdichtung von Explosionswellen angewandt, worauf wir hier besonders hinweisen. Einer brieflichen Mittheilung seinerseits zufolge könnte man die Maximalverdichtung nach der Riemann'schen Theorie berechnen, indem man annimmt, dass die Verdichtung gleich derjenigen ist, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit endlicher Verdichtungen ergibt, wenn letztere gleich der momentanen Geschossgeschwindigkeit gesetzt wird. Größer kann sie nicht sein, weil dann die Stirnwelle dem Geschosse vorauseilen würde, kleiner kann sie ebenfalls nicht sein, weil die Geschosspitze die Maximaldichte ja mit sich führt.

Es lässt sich nicht leugnen, dass theoretisch bisher noch wenig geschehen ist, um auf diesem Wege zum Ziele zu gelangen. Wenn man indessen bedenkt, welche Schwierigkeiten sich der Erforschung der erst durch Versuche zu ermittelnden Widerstandscurve und der optisch-akustischen Begleiterscheinungen an der Geschosspitze zum Theile auch jetzt noch entgegensetzen, so wird man angesichts der weiteren zahlreichen Schwierigkeiten, die hier den Calcul umgeben, und die manchen unbesiegbar scheinen, die allgemeine Lösung eben noch nicht in nächster Zeit erwarten.

Vielleicht gibt der a. a. O. S. 357 aufgestellte Ausdruck

$$v' = \sqrt{\frac{\rho'}{\lambda} a^2 \frac{\rho'^k - \lambda^k}{\rho' - \lambda}} \tag{211}$$

für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Unstetigkeitsstellen gegen ruhende Luft einen Fingerzeig. Unter Benützung des Poisson'schen Gesetzes

$$\varphi(\rho) = p = a^2 \rho^k \tag{212}$$

leitet Riemann die Gleichung

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} = a\sqrt{k}\, \rho^{\frac{k-1}{2}} \tag{213}$$

ab, worin $\sqrt{\varphi'(\rho)}$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich die Dichte ρ von Schicht zu Schicht überträgt, k ist das Verhältnis der beiden specifischen Wärmen und λ die Dichte ruhender Luft, durch welche die Verdichtungswelle, deren Dichte während der Bewegungszeit constant angenommen wird, fortschreitet. Bei 340 m Geschwindigkeit haben wir also die Relation

$$340 = a\sqrt{k}\,\lambda^{\frac{k-1}{2}}$$

und damit

$$\left(\frac{v'}{340}\right)^2 = \frac{\rho'}{\lambda k}\,\frac{\left(\frac{\rho'}{\lambda}\right)^k - 1}{\frac{\rho'}{\lambda} - 1}. \qquad 214)$$

Unter Wiedereinführung von

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^k$$

ergibt sich die Druckformel

$$p = p_0 k\left(1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}\right)\left(\frac{v}{340}\right)^2 + p_0, \qquad 215)$$

worin p_0 den Druck bei $v_0 = 340\,m$ bezeichnet. In Function des Druckes ist die Geschwindigkeit der Stirnwelle an die Formel

$$\frac{v}{340} = \sqrt{\frac{\frac{p}{p_0} - 1}{k\left(1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}\right)}} \qquad 216)$$

gebunden, die wir leichter als die Function $p = f(v)$ berechnen können. Indem wir hiernach für die fortlaufenden Druckverhältnisse $p/p_0 = 1, 2$ etc. die entsprechenden Geschwindigkeiten, berechneten, wobei wir 350 statt 340 wählten, erhielten wir das nachstehende, den Werten $v_0 = 350$, $p_0 = 33 \cdot 4$ entsprechende Resultat. Dabei erinnern wir daran, dass unterhalb der Schallgeschwindigkeit keine oder doch nur Anfänge von Unstetigkeitsstellen vor dem Geschosse sich bilden, und dass bei Geschwindigkeiten über 400 m der saugende Einfluss des Vacuums hinter dem Geschosse den Luftwiderstand um circa 1 Atmosphäre erhöht.

p/p_0	1	2	3	4	5	6
v	350	472	567	646	714	777
p (ber.) ...	33·4	67	100	133	167	200
Tabelle ...	33·4	77	111	139	164	187

Inwieweit die berechneten Druckwerte der dritten Reihe mit den entsprechenden der Versuchs-, beziehungsweise Tabellenwerte übereinstimmen, übersieht man, und man erkennt, dass der bei $v = 350\,m$ auftretende Überdruck $p - p_0$, den die sich hier bildende Stirnwelle des Geschosses erzeugt, mit dem Druck des Luftwiderstandes und mit der Geschwindigkeit wächst und die lebendige Kraft des Geschosses vermindert.

Die obige Formel, die in ihrem Äußeren einem Widerstandsgesetze durchaus ähnlich sieht, gilt also auch nur streckenweise, und eine genauere Analyse, die auch die Wirbelbewegungen im Kielwasser der Geschosse für alle Geschwindigkeiten zum mathematischen Ausdrucke brächte, würde sie wesentlich erweitern. Nach den grundlegenden Versuchen der Physiker ist das Problem fast nur noch ein mathematisches, und es wäre wünschenswert, wenn es allseitig in Angriff genommen würde.

§. 60.

Indem wir uns nach diesem Hinweise auf die physikalischen Grundbedingungen wieder unserer empirischen Curve zuwenden, wollen wir zum Schlusse noch einige Fragen einfacherer Art erledigen.

Die früheren Gleichungen geben Veranlassung zur Frage, ob die Curve Asymptoten hat.

Führt man in die Gleichung für $\operatorname{tg}\tau$ für φ seinen Wert aus

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{v} - b}{\sqrt{c}}$$

und setzt $v = \infty$, so folgt

$$\operatorname{tg}\tau_i = \operatorname{tg}\alpha - \frac{20\,g}{C(l^2+c)\cos\alpha^2}\left(\ln\frac{a}{\sqrt{c}}\cos\varphi_0\sqrt{v_0} - \frac{b}{\sqrt{c}}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)\right). \quad 217)$$

Den genannten Bedingungen gemäß ist τ_1 der asymptotisch kleinste Tangentenwinkel, entsprechend dem unendlichen Verlauf der parabolischen Widerstandscurve. Ob noch eine zweite Asymptote am Ende der Flugbahn existiert, lässt sich wegen

der hier enger gesteckten Grenzen unserer Curve nicht ermitteln. In Bezug auf die Lagen- und Größenverhältnisse der zugrunde gelegten Parabel

$$Y^2 = 2pX \qquad 218)$$

bemerken wir noch, dass ihre Axe gegen x- oder v-Axe die durch

$$\operatorname{tg} \tau_0 = a^2 \qquad 219)$$

bestimmbare Neigung τ_0 hat.

Ihr Parameter p berechnet sich aus

$$p = \frac{2a^2b^2}{(1+a^4)^{3/2}} = 2b^2 \sin\tau_0 \cos\tau_0^2, \qquad 220)$$

und die Coordinaten ihres Scheitels sind

$$x_0 = b^2 \sin\tau_0^3 \cos\tau, \qquad y_0 = b^2 \cos\tau_0^4 + c. \qquad 221)$$

Bei der Construction ist zu beachten, in welchen Maßen die Abscissen und Ordinaten eingetragen sind. Falls z. B. die Abscissen das zehnfache der Ordinaten betragen sollten, so muss anstatt $\operatorname{tg}\tau_0 = a^2 = 0\cdot 88^2$ das zehnfache, also

$$\operatorname{tg}\tau_0 = 7\cdot 744$$

gerechnet werden, was bei den zugrunde gelegten Constanten zu dem Neigungswinkel $\tau_0 = 82°\ 38'\ 30''$ führt.

§. 61.

Unsere ballistischen Gleichungen verlangen die Kenntnis der Horizontalprojection der Endgeschwindigkeit, wenn die Elemente t, x, τ, y berechnet werden sollen und liegt hierin eine Schwierigkeit, allerdings in geringerem Maße für die Tabellen, die dieselbe Urvariable zum Ausgangspunkte haben, als für die Gleichungen selbst, sobald sie die Abhängigkeit einer beliebigen Größe, z. B. der Schussweite in Function der Zeit, darstellen sollen. Der meistens transcendente Charakter der Bedingungsgleichungen lässt eine Umkehrung der Functionen nicht zu und die Methode sieht sich in der Anwendung ihrer Mittel ziemlich beschränkt. Wir haben nun unser Augenmerk immer

darauf gerichtet, wenn möglich eine geeignetere Variable als die eingeführte u, die oft gerade gesucht und verlangt wird, zu gewinnen, und da scheint sich in der oben abgeleiteten, sehr einfachen Formel 204), die wir wie folgt schreiben

$$\varphi - \varepsilon \ln \cos \varphi = T, \tag{222}$$

hierzu eine Handhabe zu bieten. In derselben ist T eine Function der Zeit und der Ausgangselemente

$$T = \varphi_0 - \varepsilon \ln \cos \varphi_0 - \frac{Ca^2 \varepsilon \cos \alpha t}{20}, \tag{223}$$

und φ ist eine Function von v_x und liefert die Beziehung

$$v_x = \frac{b^2}{a^2} \cos \alpha (1 + \varepsilon \operatorname{tg} \varphi)^2. \tag{224}$$

Wenn es also gelänge, φ in Function von T, beziehungsweise t auszudrücken, so wäre damit die Aufgabe, v_x und damit x, τ, y in Function der Zeit zu erhalten, vollständig gelöst.

Nun lässt allerdings der einfachen Bau der ersten Gleichung zuerst darauf schließen, dass sie etwa nach dem Lagrange'schen Verfahren einer Umkehrung zugänglich sei. Die betreffende Reihe enthält aber so viele Glieder, und ihre Convergenz ist so beschränkt, dass sie für uns hierzu ungeeignet erscheint. Dagegen gelang es, eine andere Form zu gewinnen, deren Structur sehr einfach und deren Giltigkeitsgrenzen weit genug sind, um allen Anforderungen der Praxis zu genügen. Sie ist

$$\varphi = 6 \cdot 77 (\sqrt{1 - 0 \cdot 3 T} - (1 - 0 \cdot 3 T)), \tag{225}$$

und bedeutet dieselbe die sehr angenäherte Umkehrung der Function

$$\varphi - 0 \cdot 3433 \log \cos \varphi = T. \tag{226}$$

Für alle Werte von $\varphi = 0$ bis selbst über $\varphi = 80°$ hinaus liefert die erste Formel mit großer und für die meisten Fälle ausreichender Annäherung aus dem gegebenen T den φ-Wert. Ist z. B. $\varphi = 60° = 1 \cdot 04720$, so ist

$$1 \cdot 04720 - 0 \cdot 3433 (0 \cdot 698970 - 1) = T,$$

also $T = 1 \cdot 15054$. Dies oben eingesetzt, gibt $\varphi = 1 \cdot 04515$ mit der Differenz $0 \cdot 0020$ oder $0^\circ\ 7'$, was ungefähr $^1/_5{}^0/_0$ beträgt und den v_x-Wert nur minimal beeinflusst. Nicht viel größere Unterschiede, zum Theile noch kleinere, ergeben sich in den genannten Grenzen für die übrigen beliebigen Werte von φ oder T, wie man sich durch eine Stichprobe leicht überzeugen wird. Hiernach gestaltet sich das Rechnungschema wie folgt:

Zunächst berechne man aus den gegebenen Ausgangsdaten G, $2R$, i, Δ, v_0, α, t die Werte für

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\Delta}{1 \cdot 206} . i \frac{(2R)^2}{G}, \\ \operatorname{tg} \varphi_0 &= 5 \cdot 1765 \sqrt{\frac{v_0}{100}} - 6 \cdot 706, \\ T &= \varphi_0 - 0 \cdot 3433 \log \cos \varphi_0 - 0 \cdot 005774 . C \cos \alpha . t, \\ \varphi &= 6 \cdot 77 \left[\sqrt{1 - 0 \cdot 3T} - (1 - 0 \cdot 3T)\right]. \end{aligned}\right\} \quad 227)$$

Alsdann ergibt sich die Horizontalprojection der Geschwindigkeit aus

$$v_x = 167 \cdot 82 \cos \alpha (1 + 0 \cdot 14912 \operatorname{tg} \varphi)^2.$$

In gleicher Weise ergeben sich dann mittels der Formeln die übrigen Elemente x, τ, y der Flugbahn in Function der Zeit.

Der obige Ausdruck für φ, der in Theilen des Radius gegeben ist und leicht trigonometrisch umgeformt werden kann, ist in Bogenminuten

$$\varphi = 23273 \cdot 6 \left[\sqrt{1 - 0 \cdot 3T} - (1 - 0 \cdot 3T)\right] \qquad 228)$$

und ergibt durch Division mit 60 sogleich die Bogengrade und im Reste die Bogenminuten.

Anwendung: Es sei gegeben

$$G = 10\,kg,\ 2r = 10\,cm,\ i = 1,\ \Delta = 1 \cdot 206,\ v_0 = 900,\ \alpha = 0^\circ.$$

Gesucht: Die Geschwindigkeit nach 20 Secunden Flugzeit. Die Formeln geben:

$$C = 10, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = 8 \cdot 8235, \quad \text{also} \quad \varphi_0 = 83^\circ\ 32', \quad \varphi_\theta = 1 \cdot 45793.$$

und damit

$$T = 1 \cdot 45793 + 0 \cdot 32557 - 1 \cdot 1548 = 0 \cdot 6287.$$

Die Formel für φ liefert nunmehr

$$\varphi = 0 \cdot 60510 \text{ oder } \varphi = 34^\circ\, 40',$$

und die Formel für v_x

$$v_x = 204\, m.$$

Siaccis Tabelle gibt für dieselben Grundlagen $v_x = 202\, m$. Den Grund lässt unsere Tabelle erkennen, die in der Mehrzahl der Fälle einen kleineren Widerstand verzeichnet, als die Versuche sie aufweisen. Die Folge davon ist für gleiche Flugzeit eine etwas größere Endgeschwindigkeit und eine größere Schussweite $x = 6840\, m$ gegen 6630 der Tafel.

Die Formel für t lässt noch eine Controle zu zur Prüfung der Rechnung. Sie gibt $t = 19 \cdot 91$ anstatt 20^s, welcher Unterschied von $0 \cdot 09^s$ in Anbetracht der großen Geschwindigkeitsdistanzen verhältnismäßig klein ist.

§. 62.

Die Form der Gleichungen der Geschossbewegung gestattet noch die Lösung der Aufgabe, die Höhe zu bestimmen, die ein Geschoss beim verticalen Schuss nach oben erreicht.

Wir wollen, um im Zusammenhange mit den Versuchen zu bleiben, die Gleichungen auf den Schuss anwenden, der am 28. April 1892 auf dem Krupp'schen Schießplatze bei Meppen aus einer 24 *cm* Kanone abgefeuert wurde, wobei das 215 *kg* schwere Geschoss mit 640 *m* Anfangsgeschwindigkeit bei 44° Erhöhung eine Schussweite von 20.226 *m* erreichte. Die Flugzeit dauerte 70 Secunden und die berechnete Scheitelhöhe ergab 6540 *m*.

Wir fragen also im Anschlusse an diese außerordentliche Leistung, welche Höhe dasselbe Geschoss erreicht haben würde, wenn es in der Verticalen abgefeuert worden wäre.

Infolge der verticalen Bewegung, bei welcher die Beschleunigung der Schwere vollständig in Kraft tritt, haben wir dem Ausdruck für den Luftwiderstand noch die Größe $g = 9 \cdot 81$,

die wir als constant ansehen wollen, hinzuzufügen. Daher ist die gesammte, der Bewegung entgegengesetzte Beschleunigung durch

$$U_1 = \frac{\Delta}{1\cdot 206} i \frac{(2R)^2}{10G} [\{0\cdot 88\sqrt{v}-11\cdot 4\}^2+2\cdot 89]+g \qquad 229)$$

bestimmt.

Wir setzen normale und constante Luftdichte $\Delta = 1\cdot 206$ und $i = 1$ voraus, welche Abstraction hier geboten ist.

Indem wir einsetzen $2R = 24$, $G = 215$, transformieren wir den betreffenden Ausdruck in

$$U_1 = (0\cdot 4555\sqrt{v}-5\cdot 8962)^2+10\cdot 5842. \qquad 230)$$

Man sieht, dass die neue Form der alten ähnlich ist und nur die Constanten

$$a = 0\cdot 4555, \quad b = 5\cdot 8992, \quad c = 10\cdot 5842$$

andere geworden sind.

Die Hauptgleichungen sind

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{a\sqrt{v}-b}{\sqrt{c}}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{c}}{b}, \\ t &= \frac{2}{a^2\varepsilon}(\varphi-\varepsilon \ln \cos\varphi), \\ x &= \frac{2b^2}{a^4}\left[\frac{1}{\varepsilon}(1-3\varepsilon^2)\varphi+3\varepsilon \operatorname{tg}\varphi+\right. \\ &\left.\qquad +\frac{1}{2}\varepsilon^2 \operatorname{tg}\varphi^2-(3-\varepsilon^2)\ln\cos\varphi\right]. \end{aligned}\right\} 231)$$

Die Constante ist hier $= 0$, weil wir bis zur Grenze $v = 167\cdot 8\, m$ gehen. Von da ab werden wir das quadratische Gesetz benützen. Die Rechnung ergibt zunächst

$$\operatorname{tg}\varphi = 1\cdot 7290, \quad \varphi = 59^\circ\, 57'\, 20'' = 1\cdot 04642.$$

Die Zeitdauer der Bewegung, innerhalb welcher die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 640$ auf $v = 167\cdot 8\, m$ gesunken ist, beträgt

$$t = 25\cdot 05 \text{ Secunden,}$$

und die entsprechende Steighöhe

$$x = 8688\ m.$$

Indem wir nun für den letzten Theil der aufsteigenden Bewegung das quadratische Widerstandsgesetz zugrunde legen, und die bekannten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g + \frac{g}{k^2} v^2, \\ \operatorname{tg} \frac{gt}{k} &= \frac{v_0}{k}, \quad x = \frac{k^2}{2g} \ln \frac{v_0^2 + k^2}{k^2} \end{aligned}\right\} \quad 232)$$

benutzen, haben wir zunächst den Widerstand $\frac{g}{k^2} v_0^2$ zu bestimmen. Da für $G = 10$ und $2R = 10$ $U = 2 \cdot 89$ ist, so ist für $G = 215$ und $2R = 24$

$$U = \frac{g}{k^2} v_0^2 = \frac{24^2}{215} \cdot \frac{2 \cdot 89}{10} = 0 \cdot 7742,$$

woraus $k^2 = 356780$, $k = 597 \cdot 3$ folgt.

Damit erhalten wir aus

$$\operatorname{tg} \frac{gt}{k} = 0 \cdot 2809, \quad \frac{gt}{k} = 0 \cdot 27383$$

die Flugzeit

$$t_1 = 16 \cdot 67 \text{ Secunden}$$

und weiter

$$x_1 = 1381\ m$$

als Steighöhe.

Die volle Flugzeit bis zum höchsten Punkte ist demnach

$$T = 41 \cdot 72 \text{ Secunden}$$

und die volle Steighöhe

$$H = 10069\ m = 10\ km.$$

Wenn man will, kann man diese Leistung der Krupp'schen 24 *cm* Kanone als eine Kraftprobe oder ballistische Maximalleistung ansehen, die man seinerzeit mit den angewandten

Treibmitteln erreicht hat. Die Ladung bestand aus P. P. C/82 115 *kg* prismatischem braunen Pulver vom Jahre 1882 (79% Salpeter, 3% Schwefel, 18% braune Kohle).

Würde der Schuss thatsächlich in der Richtung nach oben abgefeuert worden sein, so würde das Geschoss den höchsten Berg der Erde, den Gaurisankar im Himalaya, dessen absolute Höhe 8880 *m* ist, noch weit überstiegen haben. Zugleich wollen wir hier noch James Gleishers Luftfahrt erwähnen, der in Begleitung mit Coxwell am 5. September 1862 von Wolverhampton aus eine Höhe von über 10.000 *m* erreichte. In gleicher, wenn nicht noch größerer Höhe bewegen sich die in neuerer Zeit von Berson und anderen unternommenen Luftfahrten.

Von Interesse dürfte noch die Bemerkung sein, dass die berechnete Flughöhe ungefähr der Hälfte der gemessenen und wahrscheinlich größten Schussweite nahekommt. Im luftleeren Raume würde das Geschoss eine Höhe von 20.876 *m* ersteigen. Indem es nur die Hälfte dieser Höhe erreicht, bedarf es zur Überwindung des Luftwiderstandes einer Arbeit, die der berechneten Höhe nahezu entspricht.

Die wirkliche Höhe würde im gegebenen Falle übrigens eine bei weitem größere — dem Menschen kaum mehr zugängliche — sein, da die nach oben abnehmende Luftdichtigkeit dem Geschossfluge einen immer geringer werdenden Widerstand entgegensetzt. Wir haben eine constante Dichtigkeit der Luft, und zwar die mittlere an der Erdoberfläche der einfacheren Rechnung zuliebe angenommen. Die Einführung der genaueren Formel für

$$\Delta = 1\cdot 206 . e^{-\frac{x}{8000}},$$

die bei 8000 *m* Höhe die anfängliche Dichte von 1·206 *kg* auf den 2·718. Theil oder auf circa 280 *mm* Barometerstand herunterbringen würde, lässt eine vollständige Integration der Gleichungen nicht zu und zwingt zur Zerlegung der Flughöhe in Strecken constanter Luftdichte. Dies würde aber hier zu weit führen.

Daher geben wir hier nur andeutungsweise die Formeln für den freien Fall.

Die negative Beschleunigung ist

$$U = (0\cdot 4555\sqrt{v} - 5\cdot 8992)^2 - 9\cdot 0358, \qquad 233)$$

giltig von $v = 168$ bis zur Grenze des Erreichbaren.

Da c jetzt negativ ist, führen wir ein

$$\sin\varphi = \frac{a\sqrt{v} - b}{\sqrt{c}}, \qquad 234)$$

wo $a = 0\cdot 4555$, $b = 5\cdot 8992$, $c = 9\cdot 0358$. $\varepsilon = \frac{\sqrt{c}}{b}$.

Die Integrale sind

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{2}{a^2\varepsilon}\left[\ln \operatorname{tg}\left(45 + \frac{1}{2}\varphi\right) - \varepsilon \ln \cos\varphi\right], \\ x &= \frac{2b^2}{a^4}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon} + 3\varepsilon\right)\ln \operatorname{tg}\left(45 + \frac{1}{2}\varphi\right) - \right. \\ &\qquad \left. -(3+\varepsilon^2)\ln\cos\varphi - 3\varepsilon\sin\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin\varphi^2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad 235)$$

Bei unendlichem Falle erreicht die Geschwindigkeit eine endliche Grenze, die eintritt, wenn der Luftwiderstand der Schwerebeschleunigung gleich geworden ist. Beim vorliegenden Falle beträgt sie 382 *m*.

Im übrigen gelten auch hier dieselben Bedingungen wie vorher und sind gegebenenfalls für andere Verhältnisse zu berücksichtigen. Für ein anderes Geschoss als das gewählte des 24 centimetrigen, hat man die obigen Ausdrücke rechtsseitig mit $\frac{G}{215}\left(\frac{24}{2R}\right)^2$ zu multiplicieren. Versuche, betreffend Schüsse in der Verticalen, werden wohl kaum angestellt. Sie dürften auch meist resultatlos verlaufen. Immerhin aber würde die nicht gerade unmögliche Ermittelung der Flugzeit als einziges Beobachtungsresultat zur angenäherten Bestimmung der übrigen Elemente nutzbar gemacht werden können.

§. 63.

Eine ziemlich allgemeine Luftwiderstandsformel, die auch noch drei Integrale liefert, ist durch die folgende Gleichung definiert:

$$U = (az^m - bz^n)^\rho + cz^{1+m-n}, \quad z = \frac{v}{100}, \qquad 236)$$

$$m\rho = 1 + m - n.$$

Die Constanten *abcmn* sind den Versuchen gemäß zu bestimmen. Wir benutzen $m = {}^3/_4$, $n = {}^1/_4$, also $\rho = 2$ und erhalten für $a = 5$, $b = 6$, $c = 1$ die folgende Widerstandsformel, aus welcher wir die U-Werte berechnet haben

$$U = (5z^{3/4} - 6z^{1/4})^2 + z^{3/2}. \quad (G = 10\,kg,\ 2R = 10\,cm). \qquad 237)$$

v	900	800	700	600	500	400	300	200	100
U	270	210	156	110	71	40	17	4·4	2
Tab. ..	232	196	159	123	87	51	15	4·9	1·2

Bemerkenswert ist die Einfachheit des Zeitintegrals

$$t = A\int\frac{dy}{y^\rho + B}, \quad y = 1 - \frac{b}{a}z^{n-m}, \quad z = \frac{v}{100},$$

das für $\rho = 2$ eine recht brauchbare Formel liefert. Nach bekannten Methoden erhalten wir aus der Formel die nachfolgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{10}C[(az^{3/4} - bz^{1/4})^2 + z^{3/2}], \quad C = i.\frac{\Delta}{1\cdot 206}\frac{(2R)^2}{G}, \\ t &= \frac{2000}{bC\cos\alpha}(\varphi_0 - \varphi), \end{aligned}\right\} \qquad 238)$$

$$x = \frac{200000\,ab}{C(a^2+1)}\left[\frac{a^2-1}{a}(\varphi_0 - \varphi) + \ln\frac{v_0}{u} + 2\ln\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{a^2+1}{ab}\left\{\left(\frac{v_0}{100}\right)^{1/2} - \left(\frac{u}{100}\right)^{1/2}\right\}\right],$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{20.ag}{b^3 C\cos\alpha^2}\left[\frac{a^2-1}{a}(\varphi_0 - \varphi) + 2\ln\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi} + \right.$$
$$\left. + \frac{b}{a}\left\{\left(\frac{100}{u}\right)^{1/2} - \left(\frac{100}{v_0}\right)^{1/2}\right\}\right],$$

$$\operatorname{tg}\varphi = a - b\left(\frac{100}{u}\right)^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = a - b\left(\frac{100}{v_0}\right)^{1/2}, \quad u = \frac{v\cos\tau}{\cos\alpha}.$$

Hat man also mittels der letzten Relationen $\varphi_1 \varphi_0$ ermittelt, so sind die Elemente der Flugbahn: Flugzeit, Schussweite und Flugrichtung leicht zu berechnen. Die Curve selbst ist schwieriger zu bestimmen, weil zwei transcendente Integrale darin auftreten.

In Anwendung dieser Gleichungen wählen wir im Anschlusse an Siaccis Tabelle $G = 10\,kg$, $2R = 10\,cm$ und benützen zunächst

$$v_0 = 900\,m, \quad u = 100.$$

Damit erhalten wir auf Grundlage der Annahme $a = 5$, $b = 6$ die Werte

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = 3, \ \operatorname{tg}\varphi = -1, \quad \text{also} \quad \varphi_0 = 71^\circ\,34', \ \varphi = -45^\circ$$

und für $i = {}^{10}/_9$ folgt

t	$61 \cdot 0^s$	x	$12220\,m$
Tabelle ...	$60 \cdot 6$	Tabelle ...	12410
Differenz ..	$0 \cdot 4^s$	Differenz ..	$190\,m$

Ferner:

$$v_0 = 900, \qquad u = 225, \qquad i = 1,$$

$$t = 15 \cdot 45 \text{ (Differenz } 0 \cdot 43), \quad x = 5487 \text{ (Differenz 32)}.$$

Desgleichen für die Intervalle 900—324 und 900—400 ergibt sich

$$t = 6 \cdot 48 \text{ (Differenz } 0 \cdot 19) \text{ und } t = 4 \cdot 28 \text{ (Differenz } 0 \cdot 10).$$

Die Ausdehnung von $v_0 = 1500$ bis $u = 100$ liefert für $i = 1 \cdot 09$

$$t = 63 \cdot 4 \text{ (Differenz 0)}, \qquad x = 12856 \text{ (Differenz 680)}.$$

Man sieht, dass die i-Werte von der Einheit wenig verschieden sind.

Geben wir dem Widerstandsgesetze die Form $W = Kv^n$ und differentieren

$$K = \left(az^{3/4 - \frac{1}{2}n} - bz^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}n}\right)^2 + z^{3/2 - n}$$

nach $z = \frac{v}{100}$, um die Maximalwerte für K hinsichtlich der mit n veränderlichen Gruppen Kv^n zu erhalten, so ergibt sich

$$n = \frac{3}{2} + \frac{b(az^{1/2} - b)}{(az^{1/2} - b)^2 + z}. \qquad 239)$$

Hiernach haben wir für die in erster Reihe angegebenen Geschwindigkeiten die entsprechenden Widerstandsexponenten berechnet:

v:	∞	900	625	400	324	225	206	200	196	144
n:	1·5	2·1	2·3	2·7	3·1	3·5	3·5495	3·54	3·52	1·5

In hinreichender Übereinstimmung mit der Erfahrung zeigt die obige Potenzcurve des Widerstandes von $v = \infty$ bis 206 m eine stetige Zunahme der Exponenten von $n = 1{\cdot}5$ bis $n = 3{\cdot}5$, der alsdann eine raschere Abnahme folgt.

Eine weitere Untersuchung zeigt, dass die Widerstandscurve W in dem Geschwindigkeitsbereiche zwischen 0 und 144 noch ein Maximum-Minimum hat.

Mit der 50 Kaliber langen Krupp'schen 8·7 *cm* Kanone erhielt man bei einem Versuche

$$v_{50} = 838{\cdot}7, \quad v_{1474} = 367{\cdot}9\ m.$$

Es soll die Schussdistanz berechnet werden. Es ist

$$G = 4, \quad \Delta = 1{\cdot}275, \quad i = 1.$$

Auf Grundlage der allgemeinen Formeln

$$t = \frac{1000}{3C\cos\alpha}(\varphi_0 - \varphi), \qquad 240)$$

$$x = \frac{8875{\cdot}7}{C}\Big[4{\cdot}8(\varphi_0 - \varphi) + 2{\cdot}3026(\log v_0 - \log u)$$
$$+ 4{\cdot}6052(\log\cos\varphi - \log\cos\varphi_0) + 0{\cdot}8666\left\{\sqrt{\frac{v_0}{100}} - \sqrt{\frac{u}{100}}\right\}\Big],$$

worin

$$C = i\frac{\Delta}{1\cdot 206}\frac{(2R)^2}{G},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = 5-6\left(\frac{100}{v_0}\right)^{1/2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = 5-6\left(\frac{100}{u}\right)^{1/2},$$

erhalten wir für

$$v_0 = 838\cdot 7, \quad u = 367\cdot 9, \quad \alpha = 0, \quad \varphi_0 = 71^\circ\, 8'\, 20'',$$
$$\varphi = 61^\circ\, 53'\, 20'':$$

$$x = 1430 \text{ (gemessen 1424)}.$$

Wir stellen zum Schlusse noch v_x in Function von t dar:

$$v_x = \frac{3600\cos\alpha}{\left[5-\operatorname{tg}\left(\varphi_0 - \frac{3C}{1000}\cos\alpha t\right)\right]^2}. \qquad 241)$$

Beispiel:

$$G = 10, \quad 2R = 10\,cm, \quad i = \frac{10}{9}, \quad v_0 = 900,$$

also

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = 3, \quad \varphi_0 = 71^\circ\, 34', \quad \alpha = 0.$$

Es folgt für $t = 33^1/_3{}^s$:

$$v_x = 152\,m \text{ (Tabelle 152).}$$

In gleicher Weise lassen sich die Schussweite etc. in Function der Zeit ausdrücken.

Die obigen Beispiele dürften genügen. Eine weitere Durcharbeitung überlassen wir dem geneigten Leser.

Hiermit schließen wir unsere Studie über das ballistische Problem mit dem Wunsche, dass die darin vorgetragenen Ideen und Methoden eine freundliche Aufnahme seitens der interessierten Kreise finden mögen.

Es liegt mir noch die gebührende Pflicht ob, zunächst dem Königl. Preußischen Kriegsministerium für die gütigst gewährte Benützung der von der Militär-Versuchsanstalt in

Spandau herausgegebenen Berichte, und gleichzeitig Herrn Professor W. Wolff, Vorsteher des Physikalischen Institutes genannter Anstalt für sein förderliches und liebenswürdiges Entgegenkommen in dieser Angelegenheit meinen ehrerbietigsten und wärmsten Dank auszusprechen.

In gleicher Weise bin ich Herrn Geheimrath Friedrich Krupp in Essen für verschiedene technische Angaben und graphische Darstellungen ballistischer Versuchsdata, die er mir zuzusenden die Güte hatte, zu besonderem Danke verpflichtet, nicht minder und nicht zuletzt der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien hinsichtlich der freundlichen Aufnahme meiner Arbeit in ihre Sitzungsberichte.

E. Oekinghaus: Über das ballistische Problem.

Preußisches schweres Feldrohr *C*/73. 0·71 *kg* Würfelpulver (3).

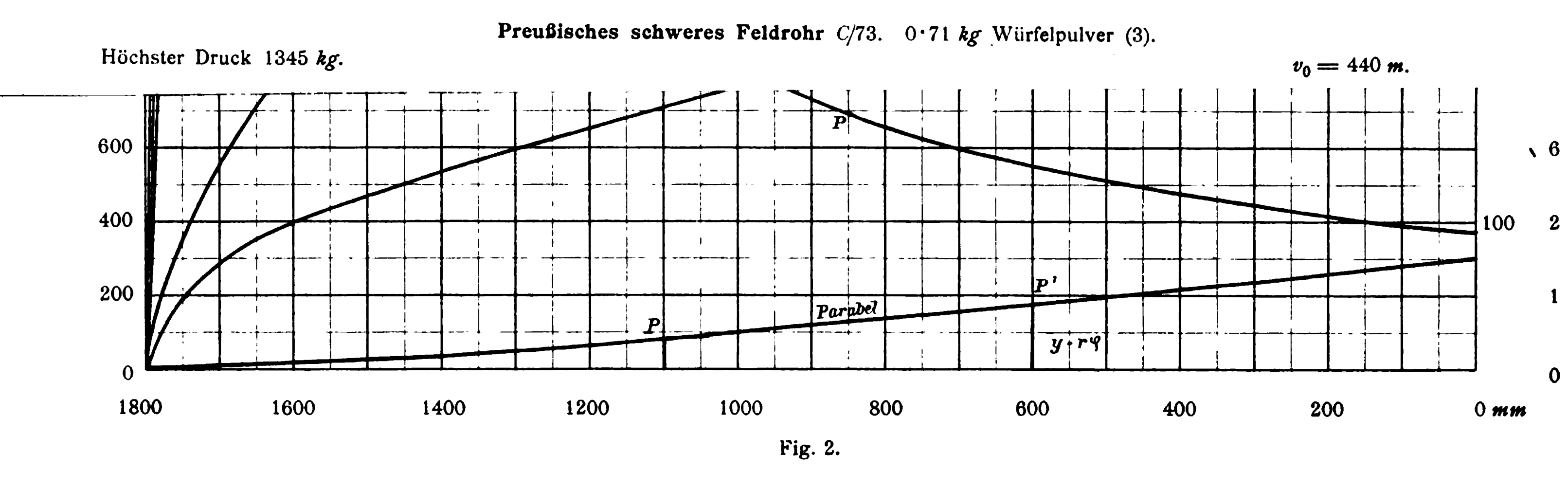


Fig. 2.

XXVII. SITZUNG VOM 20. DECEMBER 1900.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 21, Heft IX (November 1900).

Das c. M. Herr Prof. R. Hoernes in Graz übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Die vorpontische Erosion«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit »Über das Acetaldol«, von Herrn Jakob H. Halpern.

Das c. M. Herr Director Th. Fuchs legt eine Arbeit vor unter dem Titel: »Beiträge zur Kenntnis der Tertiärbildungen von Eggenburg«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Moreno M., Anda M. S. A. und Gomez A., El clima de la república mexicana en el año de 1896. Año II. México, 1900. 8°.

Wilde H., Dr., Correspondence in the matter of the Society of arts and Henry Wilde on the award to him of the Albert medal 1900, and on the invention of the dynamo-electric machine. Manchester, 1900. Groß 8°.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerolds Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.

